This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

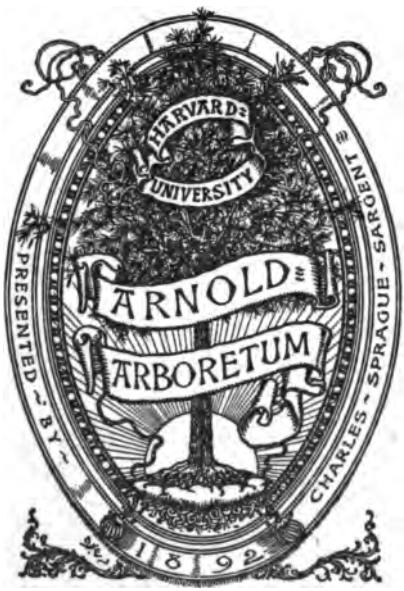
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

T5
H79
m

JP



DEPOSITED AT THE
HARVARD FOREST
1943

RETURNED TO J. F.
MARCH, 1967

Wilhelm Hoßfeld's

iningschen Forstkommissärs, öffentlichen
- und Landwirthschafts - Akademie zu
eralsekretärs der Forst - und Jagd-
Mitglied der Kayserlichen Köni-
eichischen Landwirthschaftsge-
aft in Steiermark ꝛc.

) e m a t i k

für

)ekonomen und Cameralisten

---

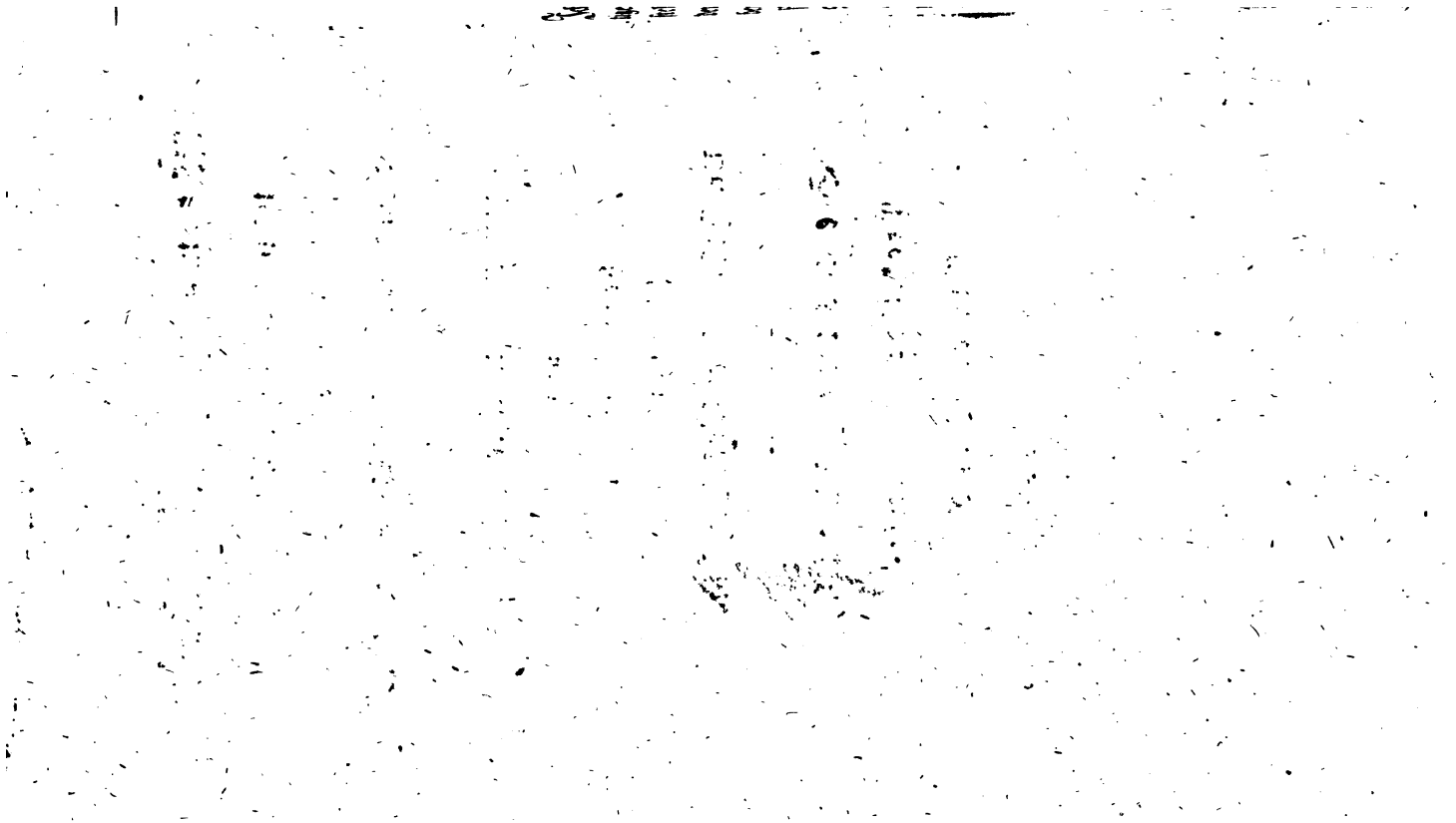
tter Band,

che und praktische Geometrie, die
und Wälder und das Nivelliren
enthält.

3a Kupfertafeln.

.tha 1821.

ngs'schen Buchhandlung.



Vorbericht.

Ich habe wahrgenommen, daß viele auswärtige Leser meiner Schriften in der Meinung stehen, als würden auf der hiesigen Forstakademie die Sätze der Mathematik nach derselben Ordnung und Ausführlichkeit Schritt für Schritt gelehrt, wie ich sie hier liefere. Dieß ist aber nichts weniger der Fall, sondern es wird hier der mathematische Unterricht in mehrere Cursus eingetheilt, und zwar werden im ersten Cursus die gewöhnlichen Elementarlehren und alle diejenigen Sätze herausgehoben, welche jeder Forstmann verstehen muß, im zweiten Cursus werden diejenigen Kapitel und Paragraphen gelehrt, welche ein praktischer Geometer und Taxator zunächst nöthig hat, und im dritten Cursus werden

diejenigen Subjekte, welche vorzüglich Lust und Anlage zur Mathematik haben und sich zum Schlichten verwickelter Aufgaben aus der höhern Forst- und Landwirthschaft fähig machen wollen, ins ganze Feld der vorliegenden Mathematik eingeführt. Uebrigens verweist der Lehrer fast überall aufs Nachlesen des Paragraphen im Buche, wo seine vorgetragene Sätze abgehandelt sind.

Da diese Lesebücher vollständig seyn, zum Nachschlagen über jede vorkommende theoretische und praktische Aufgabe dienen sollten, ich einen synthetischen Gang bewahren und alle Sätze, welche zu einem Kapitel oder Paragraphen gehören, umständlich auseinander-setzen wollte; so erhielt dieß Buch eine Einrichtung, welche zwar nicht jedem Layen gefallen mag, aber von demjenigen vertheidiget werden wird, der ans consequente Denken gewöhnt ist und die mathematische Wahrheiten in ihrem ganzen Umfange studirt hat und studiren will.

Inhalts-Anzeige.

Erster Abschnitt.

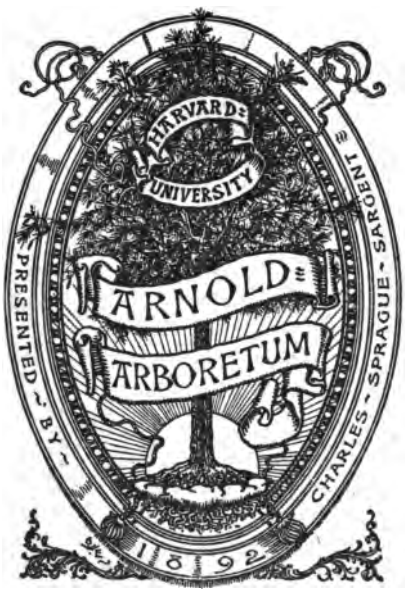
Berichtigung der Vorbegriffe.

Erstes Kapitel.

Vom Punkte und von Linien.

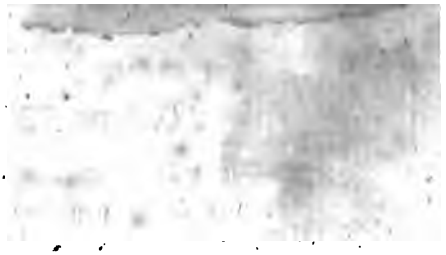
§. 1. Vom Punkte.
§. 2. Von Linien überhaupt.
§. 3. Von geraden insbesondere.
§. 4. Vergleichung der begrenzten Linien.
§. 5. Ziehung und Messung einer geraden Linie.

166389 n
Gift in 32 Kupf
Tf
H79
m
JP



~~DEPOSITED AT THE HARVARD FOREST~~
1943

RETURNED TO J. P.
MARCH, 1967



Johann Wilhelm Hoßfeld's

Herzogl. Sachsen-Meiningschen Forstkommissärs, öffentlichen Lehrers an der Forst- und Landwirthschafts-Akademie zu Dreyßigacker, Generalsekretärs der Forst- und Jagdsocietät daselbst, Mitglied der Kayserlichen Königlichen Oestreichischen Landwirthschaftsgesellschaft in Steiermark ꝛc.

Mathematik

für

Forstmänner, Oekonomen und Cameralisten

Dritter Band,

welcher die theoretische und praktische Geometrie, die Theilung der Felder und Wälder und das Nivelliren enthält.

Mit 32 Kupfertafeln.

Gotha 1821.

In der Hennings'schen Buchhandlung.

Die

Forst- und Jagdwissenschaft

nach allen ihren Theilen

für

angehende und ausübende Forstmänner und Jäger.

Ausgearbeitet von einer Gesellschaft

und

herausgegeben

von

Dr. Johann Matthäus Bechstein.

Sechster Theil.

Praktische Geometrie.

Erster Band

welcher die Forstgeometrie, Theilung der Figuren und das Nivelliren enthält.

Gotha 1821.

In der Henningsschen Buchhandlung.

Vorbericht.

Ich habe wahrgenommen, daß viele auswärtige Leser meiner Schriften in der Meinung stehen, als würden auf der hiesigen Forstakademie die Sätze der Mathematik nach derselben Ordnung und Ausführlichkeit Schritt für Schritt gelehrt, wie ich sie hier liefere. Dieß ist aber nichts weniger der Fall, sondern es wird hier der mathematische Unterricht in mehrere Cursus eingetheilt, und zwar werden im ersten Cursus die gewöhnlichen Elementarlehren und alle diejenigen Sätze herausgehoben, welche jeder Forstmann verstehen muß, im zweiten Cursus werden diejenigen Kapitel und Paragraphen gelehrt, welche ein praktischer Geometer und Taxator zunächst nöthig hat, und im dritten Cursus werden

diejenigen Subjekte, welche vorzüglich Lust und Anlage zur Mathematik haben und sich zum Schlichten verwickelter Aufgaben aus der höhern Forst- und Landwirthschaft fähig machen wollen, ins ganze Feld der vorliegenden Mathematik eingeführt. Uebrigens verweist der Lehrer fast überall aufs Nachlesen des Paragraphen im Buche, wo seine vorgetragene Sätze abgehandelt sind.

Da diese Lesebücher vollständig seyn, zum Nachschlagen über jede vorkommende theoretische und praktische Aufgabe dienen sollten, ich einen synthetischen Gang bewahren und alle Sätze, welche zu einem Kapitel oder Paragraphen gehören, umständlich auseinander setzen wollte; so erhielt dieß Buch eine Einrichtung, welche zwar nicht jedem Layen gefallen mag, aber von demjenigen vertheidiget werden wird, der ans consequente Denken gewöhnt ist und die mathematische Wahrheiten in ihrem ganzen Umfange studirt hat und studiren will.

Inhalts-Anzeige.

Erster Abschnitt.

Berichtigung der Vorbegriffe.

Erstes Kapitel.

Vom Punkte und von Linien.

§. 1. Vom Punkte.
§. 2. Von Linien überhaupt.
§. 3. Von geraden insbesondere.
§. 4. Vergleichung der begrenzten Linien.
§. 5. Ziehung und Messung einer geraden Linie.

Zweytes Kapitel.

Vom Ziele der ebenen und krummen Flächen.

§. 6. Erklärung der Winkel.
§. 7. Von Vertikalen und Horizontalen.
§. 8. Erklärung der Flächen.
§. 9. Erklärung der Ebene.
§. 10. Das Querziel einer geraden Linie ist eine Ebene.
§. 11. Vom Unterschiede der ebenen und krummen Flächen.
§. 12. Von der parallelen Lage der Linien und Flächen.
§. 13. Von vertikalen und horizontalen Flächen, und Auspfählung derselben.
§. 14. Von der Setzwage und Libelle.
§. 15. Vom Apparate zum Horizontallegen einer Ebene.

Drittes Kapitel.

Von der Größe und Messung der Winkel.

§. 16. Entstehung der Winkel auf einem Kreiswege.
§. 17. Vergleichung der Winkelgrößen.
§. 18. Von Messen und Hinlegen der Winkel in einer Ebene.
§. 19. Von der Axe und vom Winkel der Ebenen.

§. 20. Beschreibung der gebräuchlichsten Winkelinstrumente.
§. 21. Berichtigung derselben.

Zweyter Abschnitt.

Von den einfachen Figuren in einer Ebene.

Viertes Kapitel.

Von Vergleichung der Winkel in einfachen Figuren.

§. 22. Erklärung der geradlinigen Figuren.
§. 23. Vom Neben-, Scheitel- und Ergänzungs-Winkel.
§. 24. Vom Sinus und Cosinus der Winkel.
§. 25. Vom Tangenten und Sekanten derselben.
§. 26. Von der Sehne der Winkel.
§. 27. Von Parallel- und Wechselwinkeln.
§. 28. Von Zwillingswinkeln, Zwillings-Sinus- und Tangenten.
§. 29. Vom Sehnen- und Tangentenwinkel.

Fünftes Kapitel.

Vergleichung der Seiten in einfachen Figuren.

§. 30. Von der Congruenz der Dreyecke.
§. 31. Von der gleichen Fläche der Parallelogramme und Dreyecke.
§. 32. Vom Verhältnisse der Linien in ähnlichen Dreyecken.
§. 33. Von den Seiten eines rechtwinklichen Dreyeckes, besonders im Kreise.
§. 34. Vergleichung der Quadrate oder Produkte der Seiten mit der Fläche der Dreyecke und Parallelogramme.
§. 35. Von allerley Dreyecken im Kreise und Vergleichung der Sinus und Tangenten in demselben.
§. 36. Vom vorgelegten und hinzulegenden Trapeze.
§. 37. Vom vorgelegten und hinzulegenden Trapezoide.

Sechstes Kapitel.

Vergleichung der Winkel oder Bögen mit den Seiten der einfachen Figuren.

(Trigonometrie.)

§. 38. Von Sinus und Tangenten eines zusammengesetzten und vielfachen Bogens.

§. 39. Berechnung der Kreisbögen, Sinus und Tangenten.

§. 40. Anwendung der Sinus und Tangenten auf Berechnung der Drey- und Vierecke.

I. Berechnung der Horizontalen und Vertikalen aus den Schiefen.

II. Berechnung der Vertikalen aus den Horizontalen.

III. Verhältniß der Seiten zum Sinus der entgegen stehenden Winkel.

IV. Folgesätze.

V. Berechnung der übrigen beyden Winkel eines Dreyeckes aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

VI. Zusatz.

VII. Berechnung der dritten Seite für denselben Fall.

VIII. Berechnung der Winkel zu den drey Seiten.

IX. Zusatz. Stehen die drey Seiten zweyer Dreyecke im Verhältnisse, so sind die Winkel beyder Dreyecke einerley.

X. Berechnung der Fläche der Dreyecke, wenn dazu drey wesentliche Stücke gegeben sind.

XI. Tafel zur Berechnung aller Fälle, welche bey einem Dreyecke vorkommen.

XII. Berechnung des Parallelograms aus seinen schiefen Seiten.

XIII. Berechnung des Trapezes.

XIV. Berechnung des Trapezoides.

XV. und XVI. Berichtigung der Grenzsteine.
XVII. Den dritten Ort zu zweyen zu bestimmen.
XVIII. u. XIX. Zwey Orte zu zweyen,
XX. den vierten Ort zu dreyen zu bestimmen.
§. 41. Gleichungen vom zweyten und dritten Grade trigonometrisch zu lösen.
§. 42. Berechnung der Bögen und Flächen im Kreise.
I. u. II. Länge des Bogens aus Sinus und Tangenten berechnet.
III. u. IV. ganze Kreisfläche.
V. u. VI. Kreisausschnitt.
VII. u. VIII. Fläche der Abschnitte.
IX. Länge des Bogens der Abschnitte.
X. Auspfählung einer Kreislinie ohne Kenntniß ihres Mittelpunktes.
§. 43. Kreise, Aus- und Abschnitte vom begehrten Flächeninhalte zu machen.

Dritter Abschnitt.

Von zusammengesetzten Figuren in einer Ebene.

Siebentes Kapitel.

Von Messen der vieleckigen und krummlinigen Figuren.

§. 44. Von regelmäßigen Vielecken.
§. 45. Berechnung der Fläche der vieleckigen und krummlinigen Figuren.
§. 46. Erster Unterricht im Messen einer Figur im Felde und zwar durchs Kreuzmaaß (Wirksamkeit der Netzlinien.)
§. 47. Zweyter Unterricht im Aufnehmen einer Figur und zwar durch den Messtisch. (Geschicktes Anlegen eines Netzes. Messung der Teiche, Flüsse und Bergwände.)
§. 48. Messung mit der Schreibe und dem Tische in Verbindung einer Magnetnadel.

§. 49. Was zu thun sey, wenn die Figur nicht aufs Blatt geht.
§. 50. Messung mit der Bouffole und dem Theodolite.
§. 51. Von Aufnehmen großer Felder mit allen inliegenden einzelnen Grundstücken.
§. 52. Von Aufnehmen der Städte und Dörfer mit den anliegenden Gärten.
§. 53. Von Aufnehmen der Wälder.
§. 54. Von Anfertigung der Lagerbücher.
§. 55. Von Zeichnen, Verjüngen und Reduciren der Risse.
§. 56. Vom Situationsplane.

Achtes Kapitel.

Theilung der Felder, (Vielecke) von allerley Figur und Werthe.

§. 57. Welche Gegenstände in dieß Kapitel gehören.
§. 58. Theilung der einfachen geradlinigen Figuren von einerley Werthe.
§. 59. Theilung der einfachen krummlinigen Figuren durch gerade Linien.

§. 60. Theilung der einfachen krummlinigen Figuren durch krumme.

§. 61. Theilung der zusammengesetzten Figuren von allerley Werthe durch Parallellinien.

§. 62. Theilung dergleichen Figuren durch Strahllinien.

Anmerkung. Die Theilung der Figuren vom veränderlichen Werthe kann erst nach der Lehre von Momenten gezeigt werden.

Neuntes Kapitel.

Von Vielecken in vertikaler Fläche.

(Nivelliren und Höhenmessen.)

§. 63. Erklärung der verschiedenen Höhen auf unsrer Erdoberfläche.

§. 64. Abweichung des Erdgewölbes von einer horizontaler Fläche.

§. 65. Berechnung des Höhenunterschiedes zweyer sichtbarer Orte.

§. 66. Berichtigung eines horizontalen gezogenen Visirstrahls.

§. 49. Was zu thun sey, wenn die Figur nicht aufs Blatt geht.
§. 50. Messung mit der Bouſſole und dem Theodoliten.
§. 51. Von Aufnehmen großer Felder mit allen inliegenden einzelnen Grundstücken.
§. 52. Von Aufnehmen der Städte und Dörfer mit den anliegenden Gärten.
§. 53. Von Aufnehmen der Wälder.
§. 54. Von Anfertigung der Lagerbücher.
§. 55. Von Zeichnen, Verjüngen und Reduciren der Risse.
§. 56. Vom Situationsplane.

Achtes Kapitel.

Theilung der Felder, (Vielecke) von allerley Figur und Werthe.

§. 57. Welche Gegenstände in dieß Kapitel gehören.
§. 58. Theilung der einfachen geradlinigen Figuren von einerley Werthe.
§. 59. Theilung der einfachen krummlinigen Figuren durch gerade Linien.

§. 60. Theilung der einfachen krummlinigen Figuren durch krumme.

§. 61. Theilung der zusammengesetzten Figuren von allerley Werthe durch Parallellinien.

§. 62. Theilung dergleichen Figuren durch Strahllinien.

Anmerkung. Die Theilung der Figuren vom veränderlichen Werthe kann erst nach der Lehre von Momenten gezeigt werden.

Neuntes Kapitel.

Von Vielecken in vertikaler Fläche.

(Nivelliren und Höhenmessen.)

§. 63. Erklärung der verschiedenen Höhen auf unsrer Erdoberfläche.

§. 64. Abweichung des Erdgewölbes von einer horizontaler Fläche.

§. 65. Berechnung des Höhenunterschiedes zweyer sichtbarer Orte.

§. 66. Berichtigung eines horizontalen gezogenen Visirstrahls.

§. 67. Den Höhenunterschied zweyer Oerte zu finden, wenn man nicht aus einem zum andern sehen kann.

Anmerkung. Die Messung der Höhen durchs Barometer gehört in die Mechanik.

§. 68. Anhang, welcher einige Aufgaben zur Forstkultur enthält.

Einleitung.

Die Geometrie ist die Wissenschaft, die Lage und Größe der Linien, Flächen und Körper, von welcher Form sie auch gedacht oder gegeben seyn mögen, richtig zu messen und zu berechnen.

Was man unter Linien und Flächen, unter Lage derselben und unter Körpern verstehe, und wie man die verschiedenen Formen von Linien, Flächen und Körpern mathematisch auslegen müsse, kann erst in der Folge deutlich gemacht werden.

Uebrigens haben wir die Geometrie nach den in der Inhaltsanzeige genannten Abschnitten, Kapiteln und Paragraphen, und zwar nach einer Ordnung abgehandelt, welche uns für Anfänger nöthig schien, wenn sie von geometrischen Gegenständen richtige Begriffe erhalten, die verwandten Sätze nahe bei einander sehen, mit dem mathematischen Geiste immer vertrauter, und nach und nach schulgerechte Geometer werden wollen.

Erstes Kapitel.

Vom Punkte und von Linien.

§. 1.

Vom Punkte.

Ein Punkt ist die Mitte eines kaum sichtbaren Tüttelchens oder Kügelchens, das an irgend einem Orte ist, oder dahin gesetzt wird.

Auf dem Papiere bemerkt man einen solchen Punkt durch eine feine Nadel- oder Zirkelspitze, Bleystift- oder Schreibfeder-Spitze, und auf dem Felde — durch die Spitze eines Stäbchens oder Pfahles. Einen entfernten Punkt macht man durch Errichtung einer Stange oder Säule kennbar, wovon wieder die Mitte gilt, und welche Säule man nöthigenfalls noch mit weißen oder blendenden Tüchern behängt.

Uebrigens haben wir vom Punkte nur den einzigen Satz zu merken: Ein Punkt kann an einen jeden zugängigen oder auch nur sichtbaren Ort an eine beliebige Stelle gesetzt oder dahin gedacht werden.

§. 2.

Von Linien überhaupt.

Wenn sich ein Punkt von einem Orte zum andern bewegt, so ist der Weg, den der Punkt nimmt oder beschreibt, eine Linie.

Da ein Punkt kaum sichtbar ist, und nur die Mitte desselben gilt, so wird auch sein Weg kaum sichtbar seyn, keine Breite haben dürfen, und wenn er ja eine bemerkbare Breite hat, so wird nur diejenige Linie gelten, welche mitten durch die Breite des Wegs fortgeht.

Die Folge wird lehren, daß durch Bewegung der Linien, Flächen gebildet werden, und daß die Durchschnitte oder Wege durch Flächen wieder Linien sind, gleichwohl ist und bleibt eine Linie ein Weg von einem Punkte zum andern, es mag dieser Weg vorgezeichnet und demnach unsern Gedanken mitgetheilt seyn, oder auch ein solcher Weg blos gedacht werden.

Aus der Entstehung der Linien folgen nachstehende Sätze:

1) Eine Linie hat blos Länge, keine Breite und Dicke. [Bemerkt wird hier, daß der Raum (z. B. eines Zimmers) drey Ausdehnungen oder drey Abmessungen hat, nämlich eine in die Länge, die andere in die Breite und die dritte in die Höhe oder Tiefe (Dicke). Eine Linie hat aber nur eine einzige Ausdehnung oder eine einzige Abmessung. Man sieht ein, daß jede Ausdehnung, die Länge, die Breite und die Höhe oder Tiefe, einzeln genommen, eine Linie seyn müsse].

2) Eine Linie ist ein Continuum (Ausdehnung), nämlich eine solche Größe, deren Theile unmittelbar zusammenhängen, indem das Ende eines vorhergehenden Theils zugleich der Anfang eines folgenden ist.

3) Der Anfang und das Ende und der Querdurchschnitt einer Linie ist ein Punkt.

4) Eine Linie kann durch hineingesetzte Punkte in mehre Theile getheilt werden, und jeder Theil ist wieder eine Linie.

5) Da eine Linie, wie jede Größe, in willkührliche Theile getheilt werden kann, so wird man auch an einem jeden willkührlichen Orte, nämlich an allen Orten, Punkte in der Linie denken oder dahin setzen können.

§. 3.

Von geraden Linien insbesondere.

Der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern ist die gerade Linie, alle andern Wege sind krumm oder eckig. Eine gerade Linie pflegt man auch bloß Gerade oder bloß Linie, und eine krumme Linie auch bloß Krumme oder Curve zu nennen.

Fig. 1. Macht man (siehe die erste Figur der hinten angefügten Steintafeln) in einer geraden Linie AG mehre Punkte F; B; C; I; D; E ꝛc.; so liegen alle diese Punkte, von A nach G gegangen, zwischen A und G, weder drüber noch drunter, weder zur Rechten noch zur Linken. Indem man aber eine gerade Linie AG durch einige Punkte B; C; D; E ꝛc. in mehre Theile AB; BC; CD; DE ꝛc. theilt; so wird man sogleich gewahr, daß diese einzelnen Theile ebenfalls auch gerade Linien sind, welche insgesammt nach denselben Punkten A und G hingerichtet sind (hinzielen). Es haben daher alle Theile einer geraden Linie — und wenn ein solches Theilchen CI noch so klein seyn sollte — ein und dasselbe Ziel — oder ein und dieselbe Richtung.

Jede gerade Linie CD kann demnach, der Geradheit ungeschadet, nicht nur beliebig verkürzt, nämlich CD auf CI zurückgebracht, sondern auch sowohl vorwärts nach E und H hin, als rückwärts nach B und A hin beliebig, ja in Gedanken unendlich verlängert werden.

Eine gerade Linie ist demnach dasjenige, was (im Ziele) zwischen zwei Punkten, vor und hinter denselben zu liegen kömmt. Ist nämlich CE eine gerade Linie, so wird auch, wenn ein Punkt D zwischen C und E gesetzt wird, CD und auch ED eine gerade Linie seyn, wenn ein Punkt E hinter — oder ein Punkt B vor den beyden Punkten C und D gesetzt wird, CE oder DB ebenfalls eine gerade Linie seyn.

Aus dem Begriffe von geraden Linien folgen nun nachstehende Sätze:

1) Von einem Punkte zum andern kann nur eine einzige gerade Linie gezogen werden, weil alle andern dahin gezogenen gerade Linien in die erste fallen. Dagegen können aber unzählig viele krumme und eckige Linien von einem Punkte zum andern gezogen werden.

2) Zwey in einer Linie nahe an einander gesetze Punkte bestimmen schon die Richtung oder das Ziel des dazwischen liegenden Theils der Linie, und wenn alle Theile einer Linie einerley Richtung behalten, so ist die Linie gerad; verändert aber jeder folgende kleine Theil allmählig die Richtung, so ist die Linie krumm, und nimmt eine Linie in einem gewissen Punkte plötzlich eine andere Richtung an, so ist sie eckig.

3) Werden zwei gerade Linien so an oder auf einander gelegt, daß nur zwey Punkte der einen Linie in Berührung mit zwey Punkten der andern kommen, oder haben zwey gerade Linien nur zwey Punkte gemein, so haben sie auch alle übrigen Punkte mit einander gemein, oder beyde Linien decken sich.

4) Eine gerade Linie ist in Hinsicht ihrer Lage oder Richtung unendlich lang, und ein Punkt liegt außerhalb einer Graden, wenn er weder in ihr, noch in der Verlängerung derselben, liegt.

5) Eine gezogene gerade Linie, welche immer nur ein Stück von der zugehörigen unendlich langen ist, wird durch ihre beyden äußersten Punkte begrenzt, wovon der eine Grenzpunkt Anfangspunkt und der andere — Endpunkt heißt. Die Länge einer solchen begrenzten Linie ist nichts anders als die Entfernung ihrer Grenzpunkte.

§. 4.

Vergleichung der begrenzten Linie.

Hierher gehören folgende Sätze:

1) Gerade Linien sind gleich, wenn die Entfer-

nung ihrer Endpunkte gleich ist, und gerade Linien macht man gleichlang, wenn man die Entfernung ihrer beyden Endpunkte durch Hilfe eines Hand- oder Stangenzirkels gleich macht.

Der Handzirkel ist jedem aus dem Reißzeuge bekannt, und er bedarf keiner Beschreibung, und wenn der eine Fuß desselben durch eine Schraube etwas enger oder weiter gestellt werden kann, so heißt er Haarzirkel.

Fig. 2. Der Stangenzirkel Fig. 2. besteht aus einem dünnen (metallenen) genau gearbeiteten Stäbchen IK, woran umschließende kurze Hülsen L und M unten mit Spitzen N und O hin und hergeschoben und oben durch Schrauben befestiget werden können. Da diese Hülsen und Spitzen nach Oeffnung der Schrauben einander näher und entfernter gestellt werden können, so wird man auch mit diesen Spitzen jede nicht zu lange Linie fassen und von einem Orte zum andern Fig. 1. tragen können. Faßt man, in Fig. 1., AB mit diesen Spitzen, und trägt man diese unverrückte Entfernung der Spitzen nach BC oder CD, so sind auch die dazwischen gezogenen Linien BC und CD = AB.

2) Zwey gerade Linien AB und BC Fig. 1. werden an einander gesetzt (addirt), so daß wieder eine ununterbrochene gerade Linie AC entsteht, wenn beyde Linien AB und BC einerley Richtung von A nach H behalten, und der Endpunkt B der ersten Linie AB zugleich der Anfangspunkt B der zweyten Linie BC ist.

Eben so kann man drey und mehr Linien AB; CB; DE ꝛc. so aneinander hängen, daß alle diese Linien nur eine einzige AD oder AE ausmachen.

3) Linien können nicht nur addirt, sondern auch subtrahirt werden. So z. B. erhält man durch Addition der beyden Linien AD und DH die Linie AH, und durch Subtraktion der Linie HD von AH erhält man AD. Nämlich es ist AH = AD + DH und AD = AH − DH. Werden daher zwey Linien AH und DH so aufeinander gelegt, daß einer ihrer Endpunkte H sich deckt, so ist das Stück AD, was nicht gedeckt wird, die Differenz der beiden Linien.

4) Linien können ferner durch eine Zahl vervielfältiget oder multiplicirt werden. Trägt man z. B. AB mittelst eines Zirkels in der Linie AG mehrmal fort, und macht man dadurch alle einzelnen aneinander hängende Stücke AB; BC; CD; DE; EH ꝛc. einander gleich, so ist AC = 2 × AB; AD = 3 × AB; AE = 4 × AB; AH = 5 AB u. s. w. Wäre AB = 1 Ruthe, so würde AC = 2 Ruthen; AD = 3 Ruthen; AE = 4 Ruthen und AH = 5 Ruthen seyn. Wär AB = 5 Ruthen, so würde AC = 2 . 5 R.; AD = 3 . 5 R.; AE = 4 . 5 R. u. s. f. seyn. Fig. 2.

5) Eine Linie AC wird in 2 gleiche Theile AB und BC getheilt, wenn man eine solche Linie AB aufsucht, welche in AC zweymal fortgetragen werden kann. Eben so wird eine Linie AD in 3 gleiche Theile getheilt, wenn man eine solche Linie AB aufsucht, welche in der vorletzten Linie AD dreymal fortgetragen werden kann; und eine Linie a wird in m gleiche Theile getheilt, wenn man eine solche Linie x sucht, welche in a mmal fortgetragen werden kann.

Das Aufsuchen eines Theils AB, welcher in der Linie AH m oder fünfmal enthalten ist, kann zwar durchs mehrmalige Probiren mit einem Zirkel geschehen, am sichersten geschieht dies aber

a) auf einem geometrischen Wege, der erst dann gezeigt werden kann, wenn wir die Aehnlichkeit der Dreiecke abgehandelt haben, und dann geschieht

b) eine Eintheilung der Linien in beliebige Theile durch Hilfe der Schraubenwerkzeuge, von welchen bekannt ist, daß sich der eine Theil der Schraube mit einem jedesmaligen Umdrehen um etwas, weiter vor- oder zurückbewegt, wornach man die Länge einer Linie und eines zu machenden Theiles höchst genau berechnen kann.

6) Eine Linie wird mit $\frac{m}{n}$ multiplicirt, und demnach $\frac{m}{n}$ dieser Linie gefunden, wenn man entweder die vorgelegte Linie mmal aneinander hängt, und

die erhaltene Länge in n gleiche Theile theilt; oder wenn man die vorgelegte Linie in n gleiche Theile theilt und den erhaltenen Theil $m$mal an einander hängt. So z. B. erhält man $\frac{3}{5}$ einer Linie, wenn man diese Linie dreymal an einander hängt, und die erhaltene ganze Länge in 5 gleiche Theile theilt, oder, wenn man die vorgelegte Linie zuerst in 5 gleiche Theile theilt, und einen solchen Theil 3mal an einander hängt.

7) Eine Linie wird mit $m \cdot n$ z. B. $4 \cdot 5$ multiplicirt, wenn man sie zuerst 4fach und dann das erhaltene Vierfache noch 5fach nimmt. Eben so wird

8) eine Linie in $4 \cdot 5$ gleiche Theile getheilt, wenn man die vorgelegte Linie a zuerst in 4, und dann auch dieselbe Linie a in 5 gleiche Theile theilt und diese letzten Theile, an allen ersten Theilungspunkten angefangen, sowohl vor- als rückwärts, und zwar so vielmal fortträgt, als es in der Linie a geschehen kann, welche Theilung jeder selbst versuchen kann.

§. 5.

Ziehung und Messung einer geraden Linie.

Hierüber führen wir folgendes an:

1) Auf einem ebenen Papiere wird, wie bekannt, eine gerade Linie durch Hilfe eines gut abgerichteten Lineals gezogen, wo man aber, während des Ziehens nicht mit dem Schreibstifte wanken darf.

Auf Bauholze und auf dem Felde geschieht dieß mittelst einer geraden Stange oder Latte, oder mittelst einer gerad gespannten Schnur.

Ist die Linie auf dem Felde lang, so werden zuvor mehr Zwischenstäbe ins Ziel gesetzt, und dann von einem zum andern die gerade Linie gezogen.

Da sich eine nach der Lage der Balken oder des Erdbodens ausgespannte Schnur (noch mehr aber eine Meßkette, wenn sie in der Mitte frey in der Luft schwebt) durch ihr eignes Gewicht in die Tiefe

krümmt, so muß man diese Schnur oder Kette oder auch einzelne Theile derselben in der Mitte unterstützen oder etwas heben und diese Theile dadurch ins Ziel der geraden Linie bringen.

2) Eine Linie wird durch eine andere, welche Maaßstab heißt, gemessen, wenn man angiebt, wie oftmal diese in jener fortgetragen oder fortgelegt werden kann, oder wie vielmal diese in jener enthalten ist.

Ist Fig. 1. z. B. AB eine Ruthe, und kann AB in AH fünfmal fortgelegt werden, so ist AH = 5 Ruthen. Ist aber eine zumessende Linie HG kürzer als der Maaßstab AB, so muß man AB in mehre gleiche, z. B. in 10 gleiche Theile theilen, und dann angeben, wie viele dieser Theile in HG enthalten sind. Soll AG durch AB gemessen werden, so wird, wie vorher, AB in AG mehrmal, z. B. fünfmal fortgelegt, und wenn am Ende ein Stück HG überbleibt, worin AB nicht ganz fortgelegt werden kann, so mißt man dieß Stück durch Theile von AB. Angenommen, daß AF ein Theil von AB sey, welchen man in HG 1; 2; 3 und m mal fortlegt, so wird man gewärtigen müssen, daß am Ende wieder ein Stück überbleibe, welches alsdann wieder durch Theile von AF gemessen werden muß. Ja es kann sogar der Fall eintreten, daß wieder Theile von den letzten Theilen zu Hilfe genommen werden müssen, und so fort. Fig. 1.

3) Der Maaßstab AB zum Messen der geraden Linien im Felde, ist gewöhnlich eine Ruthe von 10; 12; 14 bis 18 Fußen, oder eine Klafter (Toise) von 6 Fußen. Die Länge des Fußes muß vorgeschrieben oder gegeben seyn, und ist diese Länge bekannt, so kann man hiernach leicht auch die Länge einer Ruthe oder Klafter abmessen. Die Ruthe mag lang oder kurz seyn, so theilt man sie der leichten Rechnung wegen in 10 gleiche Theile ein, welche Theile Decimalfuße heißen. Eben so theilt man ferner den Decimalfuß in 10 Decimalzolle, und diese wieder in 10 und 100 Theile und so fort ein.

Der Maaßstab zum Messen kurzer Linien, z. B.

beym Bauwesen, ist der vorgeschriebene Fuß, der in 10 oder 12 Theile, Zolle genannt, getheilt wird.

Der Maaßstab zum Messen ganz kurzer Linien ist der gemeine Zoll, wovon 12 auf den Fuß gehen, und welcher Zoll wieder in 12 oder 10 gleiche Theile getheilt wird. Ein solcher Theil heißt Linienbreite oder auch blos Linie, und wird wieder in 10 und 100 Theile getheilt, gedacht.

Man hat daher den gewöhnlichen Fuß vom Decimalfuße einer Ruthe, den gemeinen Zoll vom Decimalzolle einer Ruthe, und vom Decimalzolle eines gemeinen Fußes wohl zu unterscheiden.

Alles dies und die Verwandlung der verschiedenen Maaße, ist jedoch schon im ersten Bande der Mathematik (Kapitel 12 und 13) weitläufig genug auseinander gesetzt worden.

4) Hat man die Linie AH nach Ruthen, und das übrige Stück HG nach Decimalfußen und Zollen gemessen, und unter andern gefunden, daß AH = 5 Ruthen und HG = 6 Decimalfuße + 4 Decimalzolle = 6,4 Fuße = 0,64 Ruthen ist; so wird alsdann AG = AH + HG = 5 Ruthen + 0,64 Ruthen = 5,64 Ruthen seyn.

Statt des Wortes Ruthen schreibt man auch blos den Buchstaben R., und da ein Fuß = $\frac{1}{10}$ R. und 1 Zoll = $\frac{1}{100}$ R. ist, so wird man, wenn eine Linie 87 R. 6 Fuße und 5 Zolle enthält, dafür 87,65 R. anzumerken haben.

5) Auf dem Felde mißt man gewöhnlich mit einer langen Stange oder Latte, welche eine Ruthe oder 2 Klafter lang ist, oder mit einer aus Fußlangen Gelenken zusammengesetzten Kette, welche aus starken Eisendrahte gemacht, und 10 Klafter oder 4 bis 5 Ruthen hält. Von einem Fuße zum andern sind kleine messingene Ringe, und, um desto besser die Ruthen und Fuße unterscheiden zu können, von einer Ruthe oder Klafter zur andern (alle 10 oder 5 Fuße) größere Ringe zwischen den Gelenken angebracht. Die ganze Kette läßt sich demnach in einen Bündel zusammenlegen und leicht tragen. An beyden

Enden der Kette sind ebenfalls auch große Ringe zu finden, wodurch man unten zugespitzte, so genannte, Kettenstäbe steckt, die aber unten einen Zapfen haben müssen, damit die Kette nicht davon fällt und dadurch festgehalten werden könne. Mittelst dieser Stäbe kann man die Kette, ohne sich zu bücken, auf der Erde fortziehen.

Eine Hauptsache ist, daß man vor dem Gebrauche die Kette untersucht, ob sie ihre gehörige Länge von einem Kettenstabe zum andern hat, und ob sie richtig in Ruthen und Fußen abgetheilt ist, weshalb man zuvor die wahre Länge der Fuße und Ruthen auf eine gerade Latte mittelst eines Stangenzirkels aufträgt, und mit den aufgetragenen Theilen der Latte alsdann die Theile der Kette vergleicht. Auch muß man vor dem Messen mit der Kette den Kettenbündel gehörig auseinander legen und wohl nachsehen, ob nicht etwa ein Gelenk oder ein Ring umschlungen ist. Uebrigens geschieht die Messung einer Linie AG Fig. 1. mittelst der Kette, welche letzte die Länge AB haben soll, auf folgende Art. Fig. 1.

Nachdem alle Gelenke der Kette gehörig auseinander gespreiset sind, und die Kette nach ihrer ganzen unumschlungenen Länge vor Augen liegt, so faßt eine Person mit ihrem Kettenstabe den einen Endring in A und richtet nun eine zweyte Person, die den andern Endring B mit ihrem Stabe gefaßt hat, gehörig ein, so daß ABG eine gerade Linie ist, worauf sodann die Person in B, mit dem Auge nach A sehend, die Kette nach der Richtung AB gehörig gerad zieht, und die wahre Länge der Kette durch einen in B eingesetzten Drahtstift (dergleichen diese Person 5 bis 10 vorräthig hat) bemerkt. Es wird hier vorausgesetzt, daß der Boden von A bis B, worauf die Kette zu liegen kommt, gerad ist, oder daß man von A nach B und G frey sehen, und man die Kette in der Mitte und mehr Orten so unterstützen kann, daß sie sich leicht gerad zieht. So dieß nicht der Fall ist, so muß die Messung auf eine künstliche Art geschehen, welche erst in den folgenden Kapiteln beschrieben werden

Fig. 1. kann. Wählt man nicht zulange Meßlatten statt Ketten zum Messen einer Linie, so hat man freylich nicht zu befürchten, daß sich eine solche Latte in der Mitte merklich in die Tiefe krümme.

Nachdem die Kettenzieher einen Kettenzug von A nach B gemacht haben, so verfügt sich nun mit Stab und Kette die vordere Person aus B nach C und die hintere aus A nach B, welche letzte den daselbst eingesteckten Drahtstift herausnimmt, dafür ihren Kettenstab einsetzt, und alsdann die vordere Person mit ihrem Stabe wieder so abrichtet, daß BCG eine gerade Linie ist, in welcher Richtung die Kette, wie vorher, durch die andere Person in C gehörig gerad gezogen werden muß, worauf in C ein zweiter Drahtstift eingesetzt wird. Eben so können diese Personen einen dritten, vierten Kettenzug CD; DE u. s. f. machen, wo am Ende, wenn das letzte noch übrige Stück HG nach Ruthen und Fußen gemessen wird, die hintere Person in H eben so viele Drahtstifte in Händen haben muß, als wie viele Kettenzüge in AH gemacht worden sind; und fehlen dem vordern Kettenzieher eben so viele Stifte, so kann keine Irrung in der Zahl der Kettenzüge obwalten; und eben dieß ist der Grund, warum man diese Drahtstifte Zähleisen oder Zählstäbchen zu nennen pflegt.

Die ganze Länge AG läßt sich leicht nach Ruthen und Fußen berechnen, sobald als die Zahl der Kettenzüge in AH und die Länge des übrigen Stücks HG nach Ruthen und Fußen bekannt ist. Denn wenn die Kette 4 Ruthen hält, und in AH fünf Kettenzüge gemacht worden sind, so ist AH = 5 . 4 Ruthen, und wenn HG 2 Ruthen und 6 Fuße = 2,6 R. lang ist, so ist AG = AH + HG = 20 R. + 2,6 R. = 22,6 R.

Anmerkungen.

1) Wenn nur erst Ein Kettenzug AB gemacht ist, so kann alsdann der vordere Kettenzieher zum Machen der folgenden Kettenzüge sich selbst dadurch abrichten, daß er von B ausgegangen, in der geraden Linie BG so ziemlich richtig

fortschreitet, in BC so viele Schritte thut, als zu einem Kettenzuge nöthig sind; sodann in C sich umkehrt, über BA wegzielend seinen Kettenstab nach der geraden Linie AB in C einsetzt, und daselbst die Kette gehörig anzieht. Ist beym ersten Kettenzuge AB der Punkt B recht gut in die Linie AG abgerichtet worden, so werden auch die folgenden Kettenzüge sehr genau in die Linie AG kommen, selten, daß der hintere Kettenzieher den vordern besser abzurichten nöthig hat.

2) Das Abrichten eines Kettenziehers geschieht durchs bloße Winken mit der Hand oder mit einer Fahne nach der Rechten oder Linken, in die Höhe oder Tiefe. Ein starkes oder schwaches Winken bedeutet, daß der Kettenzieher viel oder wenig seinen Stab fortrücken soll.

Zweites Kapitel.

Vom Ziele der ebenen und krummen Flächen.

---

§. 6.

Erklärung der Winkel.

Wenn zwei gerade Linien AC und BC (s. Fig 3.) in einem Punkte C sich einander treffen oder daselbst sich durchschneiden, so entsteht in C eine Ecke (angulus) oder ein sogenannter Winkel ACB; und man pflegt die beyden Linien CA und CB, welche den Winkel ACB einschließen, die Schenkel (crura) des Fig. 3.

§. 3.

Von geraden Linien insbesondere.

Der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern ist die gerade Linie, alle andern Wege sind krumm oder eckig. Eine gerade Linie pflegt man auch bloß Gerade oder bloß Linie, und eine krumme Linie auch bloß Krumme oder Curve zu nennen.

Fig. 1. Macht man (siehe die erste Figur der hinten angefügten Steintafeln) in einer geraden Linie AG mehre Punkte F; B; C; I; D; E ꝛc.; so liegen alle diese Punkte, von A nach G gegangen, zwischen A und G, weder drüber noch drunter, weder zur Rechten noch zur Linken. Indem man aber eine gerade Linie AG durch einige Punkte B; C; D; E ꝛc. in mehre Theile AB; BC; CD; DE ꝛc. theilt; so wird man sogleich gewahr, daß diese einzelnen Theile ebenfalls auch gerade Linien sind, welche insgesammt nach denselben Punkten A und G hingerichtet sind (hinzielen). Es haben daher alle Theile einer geraden Linie — und wenn ein solches Theilchen CI noch so klein seyn sollte — ein und dasselbe Ziel — oder ein und dieselbe Richtung.

Jede gerade Linie CD kann demnach, der Geradheit ungeschadet, nicht nur beliebig verkürzt, nämlich CD auf CI zurückgebracht, sondern auch sowohl vorwärts nach E und H hin, als rückwärts nach B und A hin beliebig, ja in Gedanken unendlich verlängert werden.

Eine gerade Linie ist demnach dasjenige, was (im Ziele) zwischen zwei Punkten, vor und hinter denselben zu liegen kömmt. Ist nämlich CE eine gerade Linie, so wird auch, wenn ein Punkt D zwischen C und E gesetzt wird, CD und auch ED eine gerade Linie seyn, wenn ein Punkt E hinter — oder ein Punkt B vor den beyden Punkten C und D gesetzt wird, CE oder DB ebenfalls eine gerade Linie seyn.

Aus dem Begriffe von geraden Linien folgen nun nachstehende Sätze:

1) Von einem Punkte zum andern kann nur eine einzige gerade Linie gezogen werden, weil alle andern dahin gezogenen gerade Linien in die erste fallen. Dagegen können aber unzählig viele krumme und eckige Linien von einem Punkte zum andern gezogen werden.

2) Zwey in einer Linie nahe an einander gesetze Punkte bestimmen schon die Richtung oder das Ziel des dazwischen liegenden Theils der Linie, und wenn alle Theile einer Linie einerley Richtung behalten, so ist die Linie gerad; verändert aber jeder folgende kleine Theil allmählig die Richtung, so ist die Linie krumm, und nimmt eine Linie in einem gewissen Punkte plötzlich eine andere Richtung an, so ist sie eckig.

3) Werden zwei gerade Linien so an oder auf einander gelegt, daß nur zwey Punkte der einen Linie in Berührung mit zwey Punkten der andern kommen, oder haben zwey gerade Linien nur zwey Punkte gemein, so haben sie auch alle übrigen Punkte mit einander gemein, oder beyde Linien decken sich.

4) Eine gerade Linie ist in Hinsicht ihrer Lage oder Richtung unendlich lang, und ein Punkt liegt außerhalb einer Graden, wenn er weder in ihr, noch in der Verlängerung derselben liegt.

5) Eine gezogene gerade Linie, welche immer nur ein Stück von der zugehörigen unendlich langen ist, wird durch ihre beyden äußersten Punkte begrenzt, wovon der eine Grenzpunkt Anfangspunkt und der andere — Endpunkt heißt. Die Länge einer solchen begrenzten Linie ist nichts anders als die Entfernung ihrer Grenzpunkte.

§. 4.

Vergleichung der begrenzten Linie.

Hierher gehören folgende Sätze:

1) Gerade Linien sind gleich, wenn die Entfer-

nung ihrer Entpunkte gleich ist, und gerade Linien macht man gleichlang, wenn man die Entfernung ihrer beyden Endpunkte durch Hilfe eines Hand- oder Stangenzirkels gleich macht.

Der Handzirkel ist jedem aus dem Reißzeuge bekannt, und er bedarf keiner Beschreibung, und wenn der eine Fuß desselben durch eine Schraube etwas enger oder weiter gestellt werden kann, so heißt er Haarzirkel.

Fig. 2. Der Stangenzirkel Fig. 2. besteht aus einem dünnen (metallenen) genau gearbeiteten Bälkchen IK, woran umschließende kurze Hülsen L und M unten mit Spitzen N und O hin und hergeschoben und oben durch Schrauben befestiget werden können. Da diese Hülsen und Spitzen nach Oeffnung der Schrauben einander näher und entfernter gestellt werden können, so wird man auch mit diesen Spitzen jede nicht zu lange Linie fassen und von einem Orte zum andern Fig. 1. tragen können. Faßt man, in Fig. 1., AB mit diesen Spitzen, und trägt man diese unverrückte Entfernung der Spitzen nach BC oder CD, so sind auch die dazwischen gezogenen Linien BC und CD = AB.

2) Zwey gerade Linien AB und BC Fig. 1. werden an einander gesetzt (addirt), so daß wieder eine ununterbrochene gerade Linie AC entsteht, wenn beyde Linien AB und BC einerley Richtung von A nach H behalten, und der Endpunkt B der ersten Linie AB zugleich der Anfangspunkt B der zweyten Linie BC ist.

Eben so kann man drey und mehr Linien AB; CD; DE ꝛc. so aneinander hängen, daß alle diese Linien nur eine einzige AD oder AE ausmachen.

3) Linien können nicht nur addirt, sondern auch subtrahirt werden. So z. B. erhält man durch Addition der beyden Linien AD und DH die Linie AH, und durch Subtraktion der Linie HD von AH erhält man AD. Nämlich es ist AH = AD + DH und AD = AH − DH. Werden daher zwey Linien AH und DH so aufeinander gelegt, daß einer ihrer Endpunkte H sich deckt, so ist das Stück AD, was nicht gedeckt wird, die Differenz der beiden Linien.

4) Linien können ferner durch eine Zahl vervielfältiget oder multiplicirt werden. Trägt man z. B. AB mittelst eines Zirkels in der Linie AG mehrmal fort, und macht man dadurch alle einzelnen aneinander hängende Stücke AB; BC; CD; DE; EH ꝛc. einander gleich, so ist AC = 2 × AB; AD = 3 × AB; AE = 4 × AB; AH = 5 AB u. s. w. Wäre AB = 1 Ruthe, so würde AC = 2 Ruthen; AD = 3 Ruthen; AE = 4 Ruthen und AH = 5 Ruthen seyn. Wär AB = 5 Ruthen, so würde AC = 2 . 5 R.; AD = 3 . 5 R.; AE = 4 . 5 R. u. s. f. seyn. Fig. 1.

5) Eine Linie AC wird in 2 gleiche Theile AB und BC getheilt, wenn man eine solche Linie AB aufsucht, welche in AC zweymal fortgetragen werden kann. Eben so wird eine Linie AD in 3 gleiche Theile getheilt, wenn man eine solche Linie AB aufsucht, welche in der vorletzten Linie AD dreymal fortgetragen werden kann; und eine Linie a wird in m gleiche Theile getheilt, wenn man eine solche Linie x sucht, welche in a mmal fortgetragen werden kann.

Das Aufsuchen eines Theils AB, welcher in der Linie AH m oder fünfmal enthalten ist, kann zwar durchs mehrmalige Probiren mit einem Zirkel geschehen, am sichersten geschieht dies aber

a) auf einem geometrischen Wege, der erst dann gezeigt werden kann, wenn wir die Aehnlichkeit der Dreiecke abgehandelt haben, und dann geschieht

b) eine Eintheilung der Linien in beliebige Theile durch Hilfe der Schraubenwerkzeuge, von welchen bekannt ist, daß sich der eine Theil der Schraube mit einem jedesmaligen Umdrehen um etwas, weiter vor- oder zurückbewegt, wornach man die Länge einer Linie und eines zu machenden Theiles höchst genau berechnen kann.

6) Eine Linie wird mit $\frac{m}{n}$ multiplicirt, und demnach $\frac{m}{n}$ dieser Linie gefunden, wenn man entweder die vorgelegte Linie m mal aneinander hängt, und

Fig. 3. 4) Indem aber eine Linie AB gezogen wird, so kommen wieder zwei Winkel CAB und CBA, nämlich der eine in A und der andere in B, zum Vorschein; wo man nun zwischen den Schenkeln AB und AC des einen Winkels A wieder Querlinien BC; BE und CH, und zwischen den Schenkeln BC und BA des andern Winkels B ebenfalls auch Querlinien CA; AG und CH ziehen kann, welche Linien offenbar in der zuvor namhaft gemachten Fläche liegen, weil die Linien CA und CB; AG und BF schon nach Nr. 1. in diese Fläche zu liegen kamen.

5) Denkt man sich von einem Schenkel CA zum andern CB lauter unendlich nahe an einander gezogene gerade Linien, so füllen diese Linien einen ganz ebenen Platz oder eine ganz ebene Fläche aus, welche zwischen den Schenkeln CA und CB zu liegen kömmt, und eben diese ebene Fläche ist es, welche man bloß Ebene nennt, und worin alle vorhin genannte gerade Linien gezogen werden. Natürlich hat diese Ebene eben so wenig eine Dicke, als eine Linie.

Eine Ebene ist daher eine solche Fläche, auf der sich durch was immer für zwey Punkte eine gerade Linie dergestalt ziehen läßt, daß sie nach ihrer ganzen Länge auf der Fläche liegt.

6) Da die Schenkel eines Winkels verlängert, ja unendlich verlängert und verkürzt werden können, so wird auch die Ebene verlängert, ja unendlich verlängert und verkürzt werden können. Die kleinste Ebene liegt innerhalb eines unendlich kleinen Dreyecks.

7) Durchkreuzen sich die beyden geraden Linien AE und BD im Punkte C und zieht man die Linien DA; AB; BE und ED; so liegen alle Punkte A; B; C; D; E und die ganze viereckige Figur DABE in einer Ebene. Denn wenn man den Schenkel BC bis D verlängert, so wird der Ebene ABC das Stück ACD zugesetzt, und durch Verlängerung AC bis E wird der Ebene BAC das Stück BCE zugesetzt und das Stück DCE ergänzt sich sowohl durchs Dreyeck DAC als durchs Δ EBC.

8) Denken wir uns AE und BD unendlich lang oder unendlich kurz, so erhalten wir auch eine unendlich große oder eine unendlich kleine Ebene.

Noch bemerken wir

9) den Satz: Ein Punkt liegt außerhalb einer Ebene, wenn er weder in ihr, noch in der Verlängerung derselben liegt.

§. 10.

Das Querziel einer geraden Linie ist eine Ebene.

Wenn man eine quergelegte gerade Linie AB Fig. 7. aus einem Punkte C, der zur Seite oder außer AB liegt, ansieht, oder mit andern Worten, wenn man aus C an der geraden Linie AB fortzielt; so fallen alle Sehstrahlen und geraden Linien CP; CQ; CR; CS; CT ꝛc. CY, welche aus C über oder durch die Gerade AB weggehen und gezogen werden, in eine und dieselbe Ebene; weil das, was zwischen einem Winkel oder innerhalb eines geradliegenden Dreyecks ACB liegt, eine Ebene ist und durch Ziehung dieser Strahlen diese Ebene nur verlängert wird. Fig. 7.

Es liegt daher die ganze Ebene PCY, welche unendlich groß seyn kann, ja unendlich groß ist, im Querziele der geraden Linie AC, wenn man diese Linie aus einem Punkte C, der jedoch in derselben Ebene liegt, betrachtet.

Zieht man eine Linie DE neben AB, und will man wissen, ob zwischen AB und DE eine Ebene gezogen werden kann, so hat man weiter nichts zu thun, als zuerst aus D eine gerade Linie DFC, die über oder durch AB geht, anzulegen, und sodann aus einem beliebigen Punkte C dieser Linie nach E eine gerade CE zu führen, wo nun diese Grade ebenfalls wieder einen Punkt G der Geraden AC berühren muß. Betrachtet man nun jetzt die Linie DE aus einem solchen Punkte C, der in gerader Linie DFC hinter AB liegt, so erscheint der Punkt D in F, und wird man sodann gewahr, daß die ganze Linie DE sich in der Linie FB präsentirt, so liegt auch DE im Querziele der Linie AB.

Da nach §. 8. eine Fläche zwey Ausdehnungen
Fig 5. hat, so wird, wenn Fig. 5. die Fläche ABDC eine Ebene seyn soll,

erstens BD in demselben Querziele wie AC, und zweitens AB in demselben Querziele wie CD liegen müssen.

Wir haben daher folgenden Satz wohl zu merken:

Zwey Schenkel AB und CD, welche Fig. 5. auf der Linie IK errichtet sind, liegen in gleichen Querziele oder in einer Ebene, wenn die Linien GO und HO (welche aus beliebigen Punkten G und H des einen und des andern Schenkels durch IK schneidend geführt werden) in einem Punkte O zusammen treffen.

Liegen beyde Schenkel AB und CD im Querziele des Punkts O, so liegt auch jede Linie GH; BD; GD ꝛc., welche von einem Schenkel zum andern gezogen wird, in diesem Querziele oder in einer und derselben Ebene ABDC; und liegen zwey neben einander gezogene Linien AC und BD im Querziele eines Punktes O, so werden auch alle Linien AB; CD; EF; AD ꝛc., welche von AC nach BD gezogen werden, in derselben Ebene oder in demselben Querziele liegen.

Zwischen zwey neben einander gelegte Linien AC und GH oder BD kann aber keine Ebene gezogen werden, wenn die aus G und H über AC gezogenen Linien GLO und HNO nicht in einem Punkt O zusammentreffen, denn in diesem Falle liegt der Schenkel CD über oder unter der Ebene BAC.

Nur solche Linien, zu welchen eine Ebene gezogen werden kann, können sich durchschneiden, weil diese einen Winkel machen und die Schenkel eines Winkels allemal in einer Ebene liegen.

Das Blatt, die Wand, die Decke, worauf wir schreiben und Figuren zeichnen, ferner die Oberfläche eines stillstehenden Wassers ꝛc., sehen wir als eine Ebene an, weil diese Flächen einer Ebene sehr nahe kommen; eine wahrhafte oder mathematische Ebene

gibt es aber nirgends als in unserer Vorstellung. Wir sehen uns genöthiget, auch die Dinge, welche nicht in einer Ebene liegen, auf einem ebenen Blatte Papier durch Zeichnug darzustellen, der Anfänger thut aber wohl, wenn er sich diese, in einem freyen Raume gedachte Dinge, durch gebaute Modelle versinnlichet.

§. 11.

Vom Unterschiede der ebenen und krummen Flächen.

Da eine Fläche ABDC Fig. 5. zwey Ausdehnungen, eine Länge EF und Breite HG hat (welche beide rechtwinklig sich durchkreuzen); so wird man auch die Richtung einer Fläche nach der Richtung der Länge und Breite zu beurtheilen haben, wobei wir folgendes bemerken: Fig. 5.

1) Alle Theile einer Ebene liegen im Querziele einer geraden Linie AC oder CD, man mag diese Ebene aus einem Punkte O oder aus einem Punkte Q betrachten, wenn nur diese Punkte O und Q selbst in der Ebene oder in der Verlängerung derselben liegen.

Macht man daher nur für einen kleinen Theil einer Ebene solche Punkte O und Q namhaft, die im Querziele dieses Theils liegen, so werden auch alle übrigen Theile der Fläche in demselben Ziele nach O und Q liegen.

2) In einer Ebene können mehre gerade Linien neben einander sowohl nach der Richtung AC; GH und BD, als nach der Richtung CD; EF und AB gelegt werden.

Hierauf gründet sich die Untersuchung, ob eine Fläche ABDC wirklich eben ist. Legt man nämlich die gerade Seite eines gut abgerichteten Lineals auf AC und führt man sie langsam querfort nach GH und BD, so muß man, während dieser langsamen Bewegung an allen Orten bemerken, daß das Lineal gehörig die Fläche berührt und nirgends das Licht

Fig. 5. stärker zwischen durchschimmert. Dieselbe Probe muß man auch durch eine Bewegung des Lineals von AB querfort nach EF und CD machen.

3) In einer krummen Fläche können nur nach einer dieser Richtungen gerade — und nach der andern krumme —, oder nach beiden Richtungen zugleich krumme Linien neben einander gelegt werden.

4) Eine krumme Fläche ändert von einem kleinen Theile zum andern, oder von einer höchst nahe gezogenen Linie zur andern. — ihr Ziel.

Die meisten natürlichen Körper und zwar alle Thiere und Pflanzen, und auch viele künstliche Körper, als Walzen, Kegel, Kugeln und alle auf der Drehbank zubereitete Körper — sind von krummen Flächen umschlossen.

§. 12.

Von der paralleln Lage der Linien und Flächen.

Wenn AC und BD (Fig. 5.) nicht nur im gleichen Querziele neben einander liegen, sondern auch alle darzwischen gezogene senkrechte Linien AB; EF; CD ꝛc. gleich lang sind, so laufen beyde Linien AC und BD zu einander parallel, und es werden sich diese gerade Linien durch keine Verlängerung durchschneiden, weil auch dann, wenn sie verlängert werden, die dazwischen gezogene senkrechte Linien = EF = AB ꝛc. seyn müssen.

Um anzuzeigen, daß zwey Linien AC und BD zu einander parallel laufen, bedient man sich des zwischen gesetzten Zeichens ∥, als AC ∥ BD. Gelesen wird diese Form: AC parallel zu BD, oder BD parallel zu AC.

Da beyde Linien AC und BD im gleichen Querziele liegen, so kann auch eine Ebene von einer zur andern gezogen werden.

Bewegt sich AC in einer Ebene (oder in einem unveränderten Querziele) von AC bis GH und bis BD dergestalt, daß jeder Punkt A; E; C ꝛc. der sich

bewegenden Linie AC nicht nur einen gleichen Weg AG; ER; CH ꝛc. oder den gleichen Weg AB; EF; CD ꝛc. macht, sondern auch diese Wege AB; EF; CD ꝛc. rechtwinklig auf AC stehen; so wird nicht nur GH und BD parallel zu AG, sondern auch, weil auch AC = GH = BD ist, AB, EF und CD zu einander parallel seyn. 3 u. 8.

Würde sich BD nach GH und AC, oder würde sich AB nach EF und nach CD; oder CD nach EF und AB auf die jetzt beschriebene Art bewegen, so würde ebenfalls auch BD, GH und AC zu einander und CD, EF und AB zu einander parallel seyn.

Der Abstand zweier Parallelen AC und GH ist jederzeit die darzwischen gezogene Senkrechte ER. Ist ER groß oder klein, oder gar = O, so liegen auch die Parallelen weit von einander, oder eng bey einander, oder im letzten Falle gar auf oder in einander. Es läuft daher jede Linie zu sich selbst parallel.

Bey Parallelen kömmt es ebenfalls, wie bey den Winkeln, nicht auf die Länge, sondern bloß auf die Lage dieser Linien an. AC liegt zu GH parallel, AC selbst mag kurz oder lang seyn. Wär AC so lang als IK, oder so kurz als AL, so würde auch IK und AL zu GH und GR parallel laufen. Der Abstand derselben ist und bleibt = AG oder = ER = CH und es ist willkührlich, an welchem Orte dieser Abstand gemessen wird.

Von den Parallelen gelten übrigens folgende Sätze:

1) Wenn eine Linie zu einer zweyten, und eine zweyte zu einer dritten ꝛc. parallel läuft, so laufen auch alle diese Linien zu einander parallel.

2) Nur diejenigen Parallelen, welche in einer Ebene gezogen werden, liegen im gleichen Querziele.

3) Werden in einer Ebene auf einer Geraden IK mehre senkrechte Linien AB; EF und CD errichtet, so laufen diese zu einander parallel.

4) Liegen zwey Linien AB und EF in einer Ebene neben einander und sind die darzwischen gezogene Senkrechten EA und FB einander gleich, so wer

Fig. 5. den die beyden Linien AB und EF durch keine Verlängerung, weder rückwärts noch vorwärts, zusammentreffen. Ist aber

5) EA etwas kleiner als FB, so werden sich die geraden Linien BA und FE durchs rückwärts Verlängern (nach der Linken hin) immermehr nähern und endlich gar durchschneiden. Eben so würden sich die beyden Linien AB und EF durchs vorwärts Verlängern (nach der Rechten hin) endlich schneiden, wenn FB etwas kleiner als EA wäre.

6) Es ist nicht möglich, zwey solche Linien AB und EF neben einander zu legen, die durch keine Verlängerung zusammen träfen. Wenn aber der Abstand GR ziemlich klein ist und der Durchschnittspunkt der beyden Linien AB und EF, wenn sie verlängert werden, sehr fern liegt, so sieht man diese Linien ebenfalls als parallel an. So z. B. werden zwey neben einander vertikal gespannte Fäden als parallel angesehen, ob man gleich weiß, daß diese vertikale Linien im oder nahe am Mittelpunkte der Erde (also in einer Entfernung von 860 teutschen Meilen) zusammentreffen.

Errichtet man in der Nähe an 3; 4 und mehr Orten vertikale Linien, so werden alle diese Linien als parallel angesehen. So z. B. laufen die vier (vertikale) Ecken eines Hauses parallel. Von einer Vertikalen oder Parallelen zur andern, welche im freyen Raume errichtet werden, kann allemal eine Ebene gezogen werden, wenn auch die übrigen Parallelen nicht in einer und derselben Ebene oder Querziele liegen.

Eine ebene Fläche läuft zu einer andern parallel, wenn an allen Orten der senkrechte Abstand dieser Flächen sich gleichbleibt. So z. B. laufen die beyden Flächen eines gleichdicken Bretes oder einer gleichdicken Platte parallel. Es ist nicht nöthig, daß man, um die Parallelschaft zweyer Ebenen zu prüfen, an vielen Orten den senkrechten Abstand derselben mißt, sondern es ist schon genug, wenn dieß an drey Orten (einer Platte) geschieht, welche in einem Dreyecke liegen, weil, wenn drey Punkte zu einem Dreyecke gegeben

sind, sodann auch die Lage der Ebene, welche durch Fig. 5.
drey Punkte eines Dreyecks geht, hinlänglich bestimmt ist. Uebrigens werden wir von der Lage der Ebenen noch in einem besondern Kapitel das Umständliche abhandeln.

§. 13.

Von vertikalen und horizontalen Flächen.

Eine Fläche ist nach den vorigen Paragraphen eben, wenn alle Theile derselben und alle darin gezogenen Linien im gleichen Querziele liegen.

Oder:

Eine Ebene ist eine solche Fläche, worin überall kreuzweis gelegte gerade Linien gezogen werden können, die demnach die Fläche der Länge nach berühren.

Eine vertikale Fläche ist eine solche, worin eine vertikale Linie neben der andern gelegt werden kann. Ein vertikal stehender runder Thurm hat von außen eine solche Fläche.

Eine vertikale Ebene ist eine solche, die im gleichen Querziele einer vertikalen Linie liegt. (§. 10.)

Eine horizontale Fläche ist eine solche, worin eine horizontale Linie neben der andern gezogen werden kann. Die äußere Oberfläche einer liegenden Walze ist so beschaffen und wir werden darauf zu seiner Zeit zurückkommen.

Eine horizontale Ebene ist eine solche Ebene ABDC Fig. 5, welche nicht nur nach der Lage EF, sondern auch nach der Lage GH horizontal ist, und es können daher in derselben keine andern, als horizontale Linien gezogen werden, und wenn sie selbst von A nach D gehen sollte.

Eine Ebene ABDC wird dadurch ins Feld gelegt, daß man zuvor zwei gerade Pfähle oder Latten AC und GH in die Richtung oder ins Querziele dieser Ebene (nach §. 10) bringt, sodann noch mehre Lat-

ten BD in dasselbe Querziel bringt [wo, wenn BD zuerst angelegt wäre, man sodann auch GH zwischen AC und BD anlegen kann], und wenn am Ende viele oder genug Latten in die Ebene gebracht sind, so läßt man von einem Pfahle zum andern den Erdboden nach dem angezeigten Querziele eben graben, oder Erde aufschichten, oder eine ebene Wand oder Decke von Bretern aufführen.

Fig. 8. Auf dieselbe Art wird auch auf der unebenen Oberfläche AEGCILB Fig. 8. der Erde eine vertikale Ebene NOBA von einem Orte A zum andern B ausgepfählt, wenn man sich mit einem vertikal gehaltenen Faden PQ vor A aufstellt, den Faden ins Ziel der Orte A und B bringt und dann nach dem Querziele des Fadens Stäbe in A; C und B (und noch mehre Zwischenstäbe in E; G; I; L ꝛc.) vertikal einsetzen läßt. Alle diese Stäbe stehen in der vertikalen Ebene NOBCA, und in so fern diese Ebene weder rechts noch links, sondern von A nach B gerade fortläuft, so pflegt man auch die untere Linie AEGCILB dieser vertikalen Fläche, welche auf den Erdboden fortläuft, eine ausgepfählte gerade Linie von A nach B zu nennen, obgleich diese Linie in der vertikalen Fläche krumm ist.

Liegt der Punkt C nicht sehr tief gegen A und B, so hat man keinen Faden nöthig, sondern man stellt zuerst Stäbe in A und B nach Gutdünken vertikal, und läßt alsdann einen und mehre Zwischenstäbe in C und andern Orten nach dem Querziele einsetzen.

Fig. 9. Sollte Figur 9. von einem Orte A zum andern D, obgleich die Aussicht von einem zum andern durch einen zwischen liegenden Berg versperrt ist, eine gerade Linie AEFD oder vertikale Ebene, welche über den Berg wegläuft, ausgepfählt werden; so stellen sich, in so fern die Aussicht vom Berge nach A und D frey ist, zwei Personen B und C, nach Gutdünken in einiger Entfernung von einander auf, und indem die Person B die andere C nach der geraden Linie BD — und zugleich auch die Person C die andere B nach der geraden Linie CA abrichtet; so müssen beide

Personen B und C immer näher nach E und F hin und endlich ganz in die gerade Linie AEFD kommen, wo zuletzt ein Stab in E genau zwischen F und A, und ein Stab in F genau zwischen E und D eingesetzt wird. Nachher kann man auch noch mehre Stäbe zwischen E und A und zwischen F und D einsetzen lassen. Fig. 9.

Wäre die Aussicht so sehr verschlossen, daß auch die jetzt erzählte Verfahrungsart nicht angewandt werden könnte, so muß man irgend einen Weg, der von A nach D führt, geometrisch aufnehmen, und sodann einen Punkt E, der in der Geraden AD liegt, durch die Kunst suchen, welche Verfahrungsart aber jetzt noch nicht deutlich gemacht werden kann.

§. 14.

Von der Setzwage und Libelle.

Ein Instrument CED Fig. 10. (in Form eines Dreyecks und von der Dicke eines Brets oder einer Messingplatte), das unten eine gerade Seite CE hat und wo auf der breiten Fläche CED eine Linie FG vorgezogen ist, welche auf CE rechtwinklig steht, und wo im Punkte F ein Faden FG hängt, der durch ein unten angebundenes Gewicht G (das in einem Ausschnitte frey schweben kann) vertikal ausgespannt wird — heißt Setzwage. Fig. 10.

Wird dies Instrument auf eine gerade Latte AB gestellt und diese Latte so gerichtet, daß das Senkblei den Faden genau in die Linie FG treibt, und daselbst ruhig stehen bleibt (zu welcher Linie nur der Anfangs- und Endpunkt F und G angezeigt zu seyn braucht), so wird die Latte horizontal liegen.

Verwechselt man die Füße C und E der Setzwage, so daß D zwar oben bleibt, aber E in C und C in E zu stehen kömmt, so muß auch jetzt noch der Senkfaden auf der Linie FG bleiben, wo nicht, so ist die Setzwage fehlerhaft und man hat alsdann die

entdeckte Abweichung durch einen zwischen gesetzten Punkt zu halbiren, und beym künftigen Gebrauch der Setzwage auf diesen Punkt den Senkfaden einspielen zu lassen.

Da das Senkbley und der Faden im freyen Felde beym Winde nicht ruhig bleibt, so faßt man den Spielraum des Fadens und des Bleyes in einen Rahm ein und setzt eine Fensterscheibe vor, durch welche man ebenfalls die wahre Lage des Fadens beobachten, jedoch den Zugang des Windes verhindern kann.

Die Setzwage ist zwar im Bauwesen und bey groben geometrischen Arbeiten zu gebrauchen, aber nicht zu feinen Untersuchungen einer sehr genauen horizontalen Lage. Soll dies letzte geschehen, so wählt man lieber ein anderes Instrument, was Wasser- oder Quecksilberwage (Libelle) heißt und im Nachfolgenden beschrieben werden soll.

Fig. 11. Bekanntlich schwimmt in einem Gefäße, worin Wasser und Luft ist, die Luft oben. Füllt man nun eine unten verschlossene, in der Mitte kaum merklich bauchige, Glasröhre bis auf einen kleinen Raum mit Wasser, Spiritus oder Quecksilber, und verschließt oder schmilzt man oben die Röhre zu, so wird, wenn man die Röhre AB Fig. 11. horizontal legt, oben in der Mitte eine Luftblase in C schwimmen. Um die Glasröhre vor dem Zerbrechen zu schützen und zugleich auch die Luftblase zu sehen, umschließt man die Röhre mit einer andern von Metall, welche oben in C offen ist. Die Mittelröhre hat an beyden Enden A und B Zapfen, welche durch vertikale Stöckchen DF und EG gehen, die auf einer horizontalen Platte DE feststehen. Durchs eine Stöckchen G und den einen Zapfen B geht eine sogenannte Richtschraube, mittelst welcher der Zapfen und demnach auch die Röhre in B gehoben und niedergelassen und dergestalt geschroben werden kann, daß, wenn die untere Platte DE der Libelle auf eine horizontale Latte HI gesetzt wird, sodann die Luftblase C genau in der Mitte steht und auf die zu beyden Seiten der Blase ins Glas eingeschnittene Linien einspielt.

Der Gebrauch der Libelle ist derselbe wie der Setzwage. Stellt man nämlich die Libelle auf einen Balken HI und bemerkt man, daß die Blase nicht in der Mitte, sondern weiter nach A hinsteht, so ist A höher als B und mithin auch H höher als I und man muß den Balken in H etwas tiefer oder in I etwas höher und so weit durch Keile höher legen, bis die Luftblase wirklich in die Mitte kömmt. Verwechselt man die Füße D und E einer richtigen Libelle, wie die der Setzwage, so wird auch jetzt noch die Luftblase in der Mitte bleiben, wo nicht, so muß die Libelle vor dem Gebrauche erst berichtiget werden, welches im Nachfolgenden beschrieben werden soll.

Hat man schon eine berichtigte Libelle bey der Hand, so kann man eine andere hiernach dadurch berichtigen, daß man zuvor durch die erste einen ebenen Balken HI genau horizontal legt, und dann auf diesen Balken die zweyte Libelle DEGF setzt und die Luftblase C durch die Richtschraube in G genau in die Mitte bringt und die Lage der Luftblase durch feine Linien ins Glas bezeichnet. Vermissen wir aber eine schon berichtigte Libelle, so müssen wir auf folgende Art zu Werke gehen.

Man lege auf ein Bälkchen AC Fig. 12. durch Fig. 12.
welches eine Schraube DE geht, und das auf festen Unterlagen in A und C ruht, noch ein anderes gut abgehobeltes Bälkchen AB, so daß beyde Bälkchen einen Winkel BAC machen; setze die zu berichtigende Libelle FG aufs obere Bälkchen, und bringe durch die Schraube DE (mittelst welcher man das obere Bälkchen in B heben und tiefer herunter lassen kann) in eine solche Lage, daß die Luftblase der darauf gesetzten Libelle in der Mitte steht; verwechselt sodann die Füße F und G der Libelle, und bringe, indem man die Schraubengänge zählt, durch die Schraube DE die Luftblase wieder in die Mitte. Hierauf schraube man wieder die Hälfte der Schraubengänge zurück, und bringe die Luftblase durch die Richtschraube H der Libelle in die Mitte, verwechsele wieder die Füße der Libelle und wenn die Luftblase jetzt noch nicht in

der Mitte bleibt, so muß man wieder durch die Schraube DE auf die vorige Art nachhelfen, die Hälfte der Gänge wieder zurück thun, und überhaupt die jetzt beschriebene Arbeit so lange wiederholen, bis die Libelle vollkommen berichtiget ist.

Anmerkung. Statt einer Schraube DE kann man sich auch zwischen geschobener Keile zum Heben und Niederlassen der Platte AB bedienen.

§. 15.

Vom Apparate zum Horizontal-Legen einer Ebene.

Mit einer berichtigten Libelle kann man nicht nur eine Linie, sondern auch eine ebene Fläche oder ebene Platte horizontal stellen, wenn nämlich diese Fläche auf drey oder gar vier Schrauben oder Keile gelegt
Fig. 5. wird; denn wenn die Fläche ABDC Fig. 5. eine Ebene ist und diese nicht nur nach der Linie oder Richtung EF, sondern auch nach der Linie HG, (welche jene rechtwinklig durchkreuzet), durch die Libelle horizontal gestellt wird, so ist auch die ganze Ebene horizontal. Soll man daher eine auf drey Schrauben A; B und
Fig. 13. D Fig. 13. gelegte Platte horizontal stellen, so hat man weiter nichts zu thun, als die Libelle zuerst auf die Platte über die Linie AB zu legen, und die Platte nach dieser Richtung durch Hilfe der Schrauben A und B horizontal zu stellen; sodann muß man auch die Libelle über die Linie CD (welche auf AB rechtwinklig steht) setzen und durch Hilfe der Schraube in D die Platte zugleich auch nach der Richtung CD horizontal stellen.

Fig. 14. Mit vier Schrauben E; F; G; und H Fig. 14. wird eine darauf gelegte Platte, (die in der Mitte durch einen Zapfen in K an einer Pfanne festgehalten wird), horizontal gestellt, wenn man die Libelle zuerst über die Schrauben E und F, und sodann auch über die Schrauben G und H legt, und nach beyderley Richtungen EF und GH die horizontale Lage herstellt;

da aber die Platte AB Fig. 15. an einem Zapfen DC unten mit einer Kugel C befestiget ist, und diese Kugel nicht aus ihrer Pfanne FE weichen kann, so wird man, indem man die Platte AB durch die eine Schraube G hebt, die andere gegenüber stehende Schraube H zugleich tiefer stellen müssen, und umgekehrt. Fig. 15.

Bey unsern geometrischen Arbeiten im Felde ist es oft erforderlich, eine Platte AB von ein bis zwey Fuß Länge und Breite horizontal aufzustellen, man muß sich daher hierzu einen besondern tragbaren Apparat anschaffen. Es besteht derselbe aus einer ziemlich dicken Metallplatte IK Fig. 15, wodurch vier Schrauben G, H ꝛc. gehen, womit man die Platte AB horizontal stellt. [Da unsere Figur nur ein vertikaler Durchschnitt vom Apparate ist, so können nur zwey dieser Schrauben G und H sichtbar seyn.] Die Platte AB hat, wie vorher, einen Zapfen DC unten mit einer Kugel C, welche von einer, auf der Platte IK befestigten, Pfanne oder Hülse FE umschlossen ist und festgehalten wird. Es kann sich daher die Platte AB (mit ihrem Zapfen D und ihrer Kugel C) in der Pfanne FE zwar etwas drehen, aber von der Pfanne FE und von der Platte IK sich nicht entfernen. Unten an der Platte IK ist noch ein dreyeckiger Körper LM befestiget, an dessen Seitenflächen drey Beine oder Füße N, O, P angeschraubt werden können, vermittelst man den Apparat an jeden beliebigen Ort im Felde fest aufstellen kann. Der ganze Apparat ist gegen 5 Fuß hoch.

Drittes Kapitel.

Von der Größe und Messung der Winkel.

§. 16.

Entstehung der Winkel auf einem Kreisbogen.

Fig. 16. Es sey (Fig. 16.) PQ eine gerade Linie, welche wie eine Radaxe, zwar nicht ihre Stelle in P und Q verlassen, aber doch um sich selbst herum gedreht werden kann; ferner sey auf PQ eine Gerade AO wie eine Speiche, rechtwinklig befestiget, die mithin auch während des Umdrehens rechtwinklig darauf stehen bleibet so wird, indem sich die Axe PQ langsam (von der Linken zur Rechten) herum dreht, diese Speiche AO nach und nach die Lage BO; CO; DO; EO ꝛc. annehmen und endlich einen ganzen Kreis (Vollkreis) ABCDEFGHIA um den Punkt O herum beschreiben. Dieser Kreis erscheint zwar, von der Seite angesehen, länglich rund, halten wir aber unser Auge gerade
Fig. 16. und 17. über ihn, so erscheint er ganz rund, wie Fig. 17.

Vom Kreise und der Lage der Linien haben wir nun folgendes zu merken:

1) Der Arm AO durch dessen Umlauf der Kreis beschrieben wird, heißt Gleichmesser (Radius, Normale, Halbmesser), und der Punkt O, um welchen er läuft, Mittelpunkt, (Centrum, Brennpunkt).

Fig. 16. 2) Da (Figur 16.) AO nach und nach die Lage BO; CO; DO; EO; ꝛc. annimmt, alle diese Linien = AO sind und ebenfalls auch rechtwinklig auf den Punkt O der Linie PQ stehen, so sind diese Linien BO; CO; DO; EO; ꝛc. ebenfalls Gleichmesser, und

es

es ist einerley, mit welchem Gleichmesser AO; oder BO; oder FO ꝛc. man den Kreis beschreibt.

3) Bewegt sich AO ganz um die Axe PQ herum, so beschreibt der Punkt A die volle Kreislinie ABGDFFGHIA und die Linie AO selbst beschreibt die volle Kreisfläche, welche von der vollen Kreislinie umschlossen ist. Die volle Kreislinie wird auch Peripherie oder Umfang genannt. Ein Stück ABC der Kreislinie heißt auch Kreisbogen (arcus), und ein Stück AOCB der Kreisfläche, welches durch zwei Gleichmesser AO und OC und den zugehörigen Bogen ABC begrenzt wird, heißt Kreisausschnitt oder auch bloß Ausschnitt (Sektor).

4) Durchschneidet AF die Axe PQ rechtwinklig in O und ist AO = FO; so ist auch POF ein rechter Winkel und OF ein Gleichmesser oder Radius. Bewegen sich beyde Radien zugleich auf die obige Art um die Axe PQ, so wird, wenn OA in OF und OF in OA angelangt ist, der Schenkel OA den Halbkreis ABCDEF und der Schenkel OF den Halbkreis FGHIA beschrieben haben. Hat daher der Radius OA den halben Weg eines Vollkreises gemacht, so liegt OA in OF und es machen beyde Radien zusammen eine gerade Linie AF aus, welche Durchmesser (Diameter) heißt. Der Durchmesser AF (Fig. 16. und 17.) geht daher von einem Punkte A des Kreises durch den Mittelpunkt O bis zu einem gegenüber stehenden Punkt F des Kreises und ist zwey Radien zusammen gleich. Eben so kann man auch den Durchmesser DOH ziehen. Fig. 16. und 17.

5) Indem AO im Kreise herum läuft und nach und nach die Lage BO; CO; DO; EO ꝛc. annimmt; so bilden sich auch nach und nach die Winkel und Flächen AOB; AOC; AOD; AOE; AOF; AOG ꝛc. und der Punkt A beschreibt die zwischen fallenden Wege oder Bogen: AB; ABC; ABCD, ABCDE und so fort. Da die Oeffnung eines Winkels desto größer ist, je größer der dazwischen fallende Bogen ist: so wird auch die Größe eines Winkels nach der Größe oder Länge des dazwischen fallenden Bogens beurtheilt,

wenn nämlich diese Bogen einen gleichgroßen Radius haben. Hieraus entspringt der leicht zu merkende natürliche Hauptsatz:

Gleiche Winkel schließen auch gleiche Bögen ein und umgekehrt gehören zu gleichen Bögen auch gleiche Winkel.

Ist z. B. in Fig. 17. der Bogen AB = dem Bogen BC, so ist auch der Winkel AOB = dem Winkel BOC. Und ist der Winkel DOE = dem ∠ FOG, so ist auch der Bogen DE = dem Bogen FG.

Fig. 17. Es ist bekannt, daß wenn die Grade AF durch DH rechtwinklig durchkreuzet wird, sodann der Winkel AOD = dem Winkel FOD ist; es wird daher auch der Bogen ABCD = dem Bogen DEF und mithin ein solcher Bogen die Hälfte vom Halbkreise oder ein Viertel vom Vollkreise seyn. Der Viertelkreis heißt auch Quadrant.

Fig. 16. 6) Es durchkreuze der Durchmesser DH den Durchmesser AF rechtwinklig in O und es sey DO zugleich auch ein Radius desselben Kreises und mithin DOP und HOP rechte Winkel; ferner denke man sich noch ungleich mehre Durchmesser EI und Radien BO; CO; OG ꝛc. gezogen, welche insgesammt auf der Axe PQ in O rechtwinklig stehen; so wird, wenn sich dieß Kreuz oder dieser Stern von Radien um die Axe PQ bewegt, jeder Arm dieses Sterns in derselben Kreisfläche bleiben.

Man sieht daraus, daß ein Kreis eine Ebene seyn müsse, weil dahinein ein geradliniges Kreuz nach allen Richtungen so gelegt werden kann, daß alle vier Arme desselben die Kreisfläche berühren. Verlängert man OF und OH bis K und L und zieht man die Gerade KL und betrachtet man die Kreisfläche aus einem Punkte M, der hinter KL im verlängerten OG liegt, so wird die Kreisfläche im Querziele der geraden Linie KL erscheinen. In einer Ebene kann man demnach auch krumme Linien FGH; DEFG ꝛc. ziehen, es liegen aber alle Theile derselben im gleichen Querziele.

7) Da eine Ebene beliebig verlängert und verkürzt werden kann, so wird dieß auch mit einem Kreise geschehen können. Ist nämlich der Radius AO unendlich klein, so ist auch die Fläche des Kreises unendlich klein, ist aber der Radius unendlich groß, so ist auch die Kreisfläche unendlich groß und es durchschneidet diese Fläche das ganze Weltall und theilt dasselbe in zwey Theile. Sind aber die Gleichmesser (Radien) oder Durchmesser zweyer Kreise einander gleich, so sind auch ihre Kreislinien und Kreisflächen einander gleich. Wenn aber zwey Dinge in allen Stücken einander gleich sind, so pflegt man sie congruent zu nennen; es sind daher auch Kreise vom gleichen Radio oder Durchmesser congruent.

8) Da Theile einer Ebene wieder ebene Flächen sind, so wird auch die im Kreise verzeichnete geradlinige Figur ADFH oder DHF oder HFO ꝛc. eine Ebene seyn. Fig. 16.

9) Jeder willkührliche Punkt einer Ebene kann zum Mittelpunkte O (Fig. 17.) eines Kreises gemacht, und aus demselben ein Kreis MNPQRSTUV mittelst eines Hand- oder Stangenzirkels dadurch beschrieben werden, daß man den einen Fuß des Zirkels in O unverrückt stehen läßt, den andern Fuß M aber in einer Linie MNPQRSTUV um den Punkt O herum dergestalt bewegt, daß die Entfernung MO; NO; PO; QO ꝛc. beständig sich gleich bleibt. So z. B. wird ein ebener Tisch als eine Ebene angesehen, und man kann auf demselben an allen Orten Kreise beschreiben. Fig. 17.

Ein Kreis ist daher eine solche Linie in einer Ebene, deren Punkte M; N; P; Q ꝛc. alle gleich weit von einem gewissen festen Punkte O, den man Brennpunkt nennt, abstehen.

§. 17.

Vergleichung der bloßen Winkel.

Bey Winkeln kömmt es nicht auf die Länge, sondern auf die Lage der Linien gegen einander an, wie schon §. 6. bemerkt worden ist.

Hieraus folgt nun:

Fig. 17. 1) Ein Winkel AOB Fig. 17. ist = ∠ MON = ∠ AQN = ∠ MOB. Eben so ist ∠ AOD = ∠ AOQ = ∠ DOM.

2) In einer geraden Linie AOF oder MOF kann ein Punkt O an eine willkührliche Stelle gesetzt und die gerade Linie selbst als zwey Schenkel AO und OF eines Winkels AOF angesehen werden, aus dessen Scheitelpunkte O ein Halbkreis ABCDEF oder MNPQRS von einem Schenkel OA zum andern OF geführt werden kann.

3) Ein rechter Winkel AOD oder MOQ ist ein solcher, aus dessen Scheitelpunkte O ein Viertelkreis (Quadrant) ABCD oder MNPQ zwischen den beyden Schenkeln AO und OD beschrieben werden kann.

4) Um einen Punkt O herum können vier rechte Winkel AOD; DOF; FOH und HOA gestellt werden, wovon allemal je zwey an einander liegende Winkel als DOF und FOH eine gerade Linie DH ausmachen.

5) Da es bey Winkeln nicht auf die Länge, sondern auf die Lage der Linien ankömmt, so dürfen auch die Schenkel MO und OQ unendlich kurz seyn, und gleichwohl wird MOQ ein rechter Winkel seyn, indem auch in diesem Falle die Ecke in O sich nicht ändert.

6) Die Lage der Linien AO und OC gegen einander, oder die Größe des Winkels AOC ergiebt sich aus dem Antheil des zwischen fallenden Bogens ABC gegen den Viertel- oder Vollkreis. Ist ABC die Hälfte des Bogens ABCD, so ist auch der Winkel AOC halb so groß, als der rechte ∠ AOD. Da nun ∠ AOD = $\frac{1}{4}$ aller Winkel in O ist, so wird auch ∠ AOC = $\frac{1}{8}$ aller Winkel in O seyn, weil AC = $\frac{1}{8}$ des ganzen Kreises ABCDEFGHI ist. Da ∠ MOP = ∠ AOC ist, so ist auch der Bogen MNP = $\frac{1}{8}$ des ganzen Kreises MNPQRSTUV.

7) Man denke sich sowohl den großen als den kleinen Kreis in 360 gleiche Theile eingetheilt, und nenne diese Theile Grade, so wird der Halbkreis 180 und der Viertelkreis 90 dieser Theile oder Grade enthalten. Es kommen daher auf den rechten Win-

kel AOD oder MOQ 90 Grade, man mag diesen Winkel durch den Bogen ABCD, oder durch den Bogen MNPQ messen. Ist zwar der Radius OM und der zugehörige Kreis MNPQRSTUV kleiner als der Radius OA und der zugehörige Kreis ABCDEFGHI; so sind auch die 360 gleiche Theile des ersten Kreises kleiner als die 360 gleiche Theile des andern Kreises, und es werden daher auch, weil der rechte Winkel AOD von beyden Kreisen den vierten Theil abschneidet, 90 Theile von beyden Kreisen im rechten Winkel zu liegen kommen, nur mit dem Unterschiede, daß die Theile im Bogen MNPQ kleiner sind, als die Theile im Bogen ABCD. Hiernach haben beyde Winkel AOD und DOF zusammen, welche eine gerade Linie AOF ausmachen, 180 Grade oder 180 gleiche Theile. §. 17.

8) Würde man einen ganzen Kreis in 400 gleiche Theile oder in 400 sogenannte Centesimal-Grade eintheilen, so würden auf den rechten Winkel 100 und auf die gerade Linie 200 dieser Grade kommen. Diese Kreiseintheilung ist neuerer Zeit von vielen Meßkünstlern angenommen, wir werden aber die ältere von 360 Graden, ihres bequemern Gebrauchs wegen, beybehalten.

9) Nach der alten Gradeintheilung ist daher ein Winkel von 90 Graden ein solcher, worin $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ des ganzen Kreises zu liegen kömmt. Ein Winkel von einem Grade ist $= \frac{1}{360}$; von 2 Graden $= \frac{2}{360} = \frac{1}{180}$; von 3 Graden $= \frac{1}{120}$; von 4 Graden $= \frac{1}{90}$; von 5 Graden $= \frac{1}{72}$; von 6 Graden $= \frac{1}{60}$; von 7 Graden $= \frac{7}{360}$; von 30 Graden $= \frac{1}{12}$; von 40 Graden $= \frac{1}{9}$; von 45 Graden $= \frac{1}{8}$; von 60 Graden $= \frac{1}{6}$ des Vollkreises u. s. w.

10) Einen gemeinen Grad denkt man sich ferner in 60 gleiche Theile oder sogenannte Grad-Minuten und eine solche Minute in 60 Grad-Sekunden eingetheilt, und man bezeichnet

diese Grade durch °
diese Minuten durch '
diese Sekunden durch ''

Hiernach wird ein Winkel von 73 Graden 46

Fig. 17. Minuten und 19 Sekunden kurz durch 73° 46′ 19″ angedeutet.

Einen Centesimalgrad theilt man in 100 und 1000 Theile und man bezeichnet ihn durch ein drüber gesetztes kleines °, als 63,584° oder 63°584; welches 63 Centesimalgrade und $\frac{584}{1000}$ dieser Grade bedeutet und wo sich der Werth dieser Theile schon aus der dekadischen Anordnung ergiebt.

Hiernach sind 360° = 400° oder 9° = 10° und $\frac{9^\circ}{10^\circ}$ oder $\frac{10^\circ}{9^\circ} = 1$.

11) Winkel AOB und BOC können auch addirt werden, wenn man beyde Winkel so zusammen oder neben einander legt, daß ihre Ecken oder Spitzen in einem gemeinschaftlichen Scheidepunkte O zusammentreffen, und ein Schenkel BO des einen Winkels AOB den Schenkel BO des andern Winkels BOC deckt, wo nun ∠ AOC = ∠ AOB + ∠ BOC ist.

Eben so kann auch ein Winkel COB von einem andern COA subtrahirt werden, wenn man den Winkel COB auf den Winkel COA so legt, daß die Scheitel beyder Winkel in O zusammentreffen, und der Schenkel CO des einen und des andern Winkels sich deckt, wo nun durch den Schenkel BO der Winkel AOB abgeschnitten wird, der = ∠ AOC — COB ist.

Da bey Winkeln nichts auf die Länge der Schenkel ankömmt, so ist auch ∠ MOB + ∠ NOG = ∠ AOP und ∠ DOM — ∠ DOP = ∠ MOG.

Auch drey und mehr Winkel können addirt werden. So z. B. ist ∠ AOB + ∠ BOC + ∠ COD = ∠ AOD.

Sind die Winkel AOB und BOC in Graden, Minuten und Sekunden gegeben, so geschieht die Addition und Subtraktion derselben nach den Regeln des ersten Bandes der Mathematik §. 91. und 92. Wenn nämlich

∠ AOB = 24° 35′ 46″ und
∠ BOC = 21° 37′ 25″, so ist die Summe
= ∠ AOC = 46° 13′ 11″, wo die Ziffer in der Einerstelle der Minuten und Sekunden auf die ge-

wöhnliche Art addirt, die Summe der Zehner aber (weil 60″ = 1′ und 60′ = 1° ist) durch 6 dividirt, der Rest daselbst bemerkt, und der Quotient zum nächst linken Rang gezählt worden ist. Fig. 17.

Ziehen wir dagegen vom Winkel

AOC = 46° 13′ 11″ den Winkel

AOB = 24° 35′ 46″ ab, so bleibt der

∠ BOC = 21° 37′ 25″ übrig, wo man bei der Subtraktion der Sekunden zuerst 6 von 11 abgezogen, den Rest 5 bemerkt, sodann 5 statt 4 von 6 abgezogen, den Rest 1 zum Zehner 1 der Sekunden addirt hat, u. s. f.

12) Auch können Winkel vervielfältiget und getheilt werden, wie schon aus §. 96. 97. 98 des ersten Bandes klar ist. Es enthalte z. B. ein Winkel 87° 46′ 39″, so ist das 12fache desselben = 1053° 19′ 48″ = 2 Umkreise + 333° 19′ 48″, weil 360° = ein Umkreis ist. Und wenn ein Winkel = 87° 46′ 39″, so ist der siebente Theil desselben = 12° 32″ 22″, 7.

Die Multiplikation der Bögen oder Winkel kann mittelst eines Zirkels leicht geschehen. Faßt man z. B. die Endpunkte A und B eines Bogens AB mit dem Zirkel und trägt man AB im Kreise weiter nach BC; CW; WD ꝛc. fort, so ist ABC = 2 AB; ABCW = 3 AB; ABCWD = 4 AB u. s. f. Soll man dagegen den Bogen ABCW in drey gleiche Theile theilen, so muß man eine solche Abtheilung AB des Bogens mittelst eines Schraubenzirkels aufsuchen, welche gerade dreymal im vorgelegten Bogen fortgetragen werden kann, und dann ist AB = $\frac{1}{3}$ ABCW. Eben so wird der Bogen ABCWD in 4 gleiche Theile getheilt, wenn man eine solche Abtheilung AB aufsucht, welche 4mal im Bogen fortgetragen werden kann, u. s. f. Natürlich ist alsdann auch ∠ AOB = $\frac{1}{4}$ ∠ AOD.

Diese Vervielfältigung und Theilung der Bögen und Winkel wird jedoch gründlicher gezeigt werden können, wenn wir zuvor die Lehre von Sehnen, Vielecken und von Proportion der Linien abgehandelt haben.

Am richtigsten geschieht die Eintheilung eines Kreises durch eine Theilmaschine, welche aus einer

Fig. 17. großen Kreisplatte ABCWDEFGHI besteht, deren Umkreis 2160 genau eingetheilte Zähne hat, worein eine Schraube greift, welche mit einem jedesmaligen Umdrehen die Platte um $\frac{1}{6}$ Grad (um ihren Mittelpunkt O) dreht. Will man nun hiernach eine andere kleinere Kreisplatte MNPQRSTUV eintheilen, so wird diese über jene gelegt, so daß der Mittelpunkt O beyder Kreise genau über einander zu liegen kömmt, und indem sich ein Arm OA durchs Schrauben nach und nach von OA nach OB; OC ꝛc. bewegt, werden die Theilungslinien in M; N; P ꝛc. gezogen. Wenn der Kreisring MNPQRST ꝛc. nicht zu klein ist, und die Theilstriche sehr fein gemacht werden, so können richtig Sechstel wenigstens Drittel Grade deutlich eingetragen werden. Die Theilungslinien für die einzelnen Grade werden ein wenig länger gezogen, als für Drittel oder Sechstel Grade. Eben so zieht man auch die Theilstriche von 5 zu 5 und von 10 zu 10 Grade länger, und schreibt (gravirt) die zugehörigen Nummern 10; 20; 30; 40 bis 360° ein, welches das Aufsuchen der wirklichen Grade eines Winkels sehr erleichtert.

Wenn die Schraube einmal herumgedreht wird, so beschreibt sie einen ganzen Kreis, die Platte dreht sich aber nur um ein $\frac{1}{6}$ Grad oder um 10 Minuten. Dreht man nun die Schraube nur um einen Theil ihres Kreises, so wird sich auch die Platte nur um einen Theil von jenen 10 Minuten drehen, dergestalt daß wenn die Schraube nur $\frac{m}{10}$ Kreis beschreibt, sodann die Platte sich auch nur um m Minuten dreht. Macht man mit einem jedesmaligen Umdrehen der Schraube einen Theilstrich auf den Gradring, so kann man alsdann auch Theilstriche von der Art machen, daß 10 von der letzten Art so viel ausmachen, als 11 von der ersten Art, wenn man bey einem jedesmaligen Umdrehen den 10 Theil des Schraubenkreises zugiebt oder mehr macht. Diese Eintheilung wird nöthig, wenn wir die Größe eines Winkels durch Hilfe eines Verniers oder Nonius auf die Mi-

nute richtig bestimmen wollen, welches im folgenden 16. 17. Paragraphen beschrieben werden soll.

§. 18.

Vom Messen und Hinlegen der Winkel in einer Ebene.

I. Vom Messen und Hinlegen eines rechten Winkels auf dem Papiere.

1) Alle rechte Winkel sind congruent oder einander gleich und wenn man einen rechten Winkel DOA auf der andern DOF Fig. 17. so legt, daß der Scheitel O beyder Winkel sich deckt, und der eine Schenkel DO beyder Winkel in einander zu liegen kömmt, so wird auch der andere Schenkel AO des einen Winkels AOD in den andern Schenkel OF des zweyten Winkels FOD zu liegen kommen.

2) Eine Linie AO steht senkrecht auf einer andern DO, oder DO steht senkrecht auf OA, wenn zwey dieser Winkel DOA und DOF eine gerade Linie AOF ausmachen, wo diese Winkel so an- oder nebeneinander gelegt werden, daß der Scheitel O und der eine Schenkel DO beyder Winkel sich deckt, wie §. 17. Nr. 11.

3) Zieht man von einem Schenkel OA eines rechten Winkels AOD zum andern Schenkel OD eine gerade Linie AD, so erhält man ein geradliniges rechtwinkliges Dreyeck AOD, wovon die beyden Seiten AO und OD, welche den rechten Winkel machen, Catheten heißen, die dritte Seite AD aber, welche dem rechten Winkel O gegenüber liegt, Hypothenuse genannt wird. Ein solches Dreyeck mit einem rechten Winkel, wenn man es aus einem ebenen Brete oder aus einer Metallplatte arbeiten läßt, dient dazu, um eine Senkrechte OD auf AO oder auf AF zu ziehen, nur gehört dazu, daß der Winkel AOD richtig ein rechter ist. Um zu erforschen, ob der rechte Winkel

Fig. 18. AOD Fig. 18. eines Dreyecks richtig ist, legt man dasselbe auf eine Ebene, schließt an die eine Cathete AO ein berichtigtes Linial GH an, zieht an der andern Cathete eine gerade Linie DO auf die Ebene, hält das Linial GH auf der Ebene fest, legt alsdann das Dreyeck AOD nach DOF und zwar die eine Cathete OF genau ans Linial und die andere Cathete nahe an die Linie DO und zieht hart an diese Linie DO noch eine Linie. Ist nun das feine Fädchen oder Härchen zwischen den beyden in DO gezogenen Linien gleich stark, so ist der Winkel AOD richtig; ist aber das Fädchen in D schmäler oder breiter als in O, so ist der Winkel AOD um etwas zu groß oder zu klein und er muß daher so lange abgeschliffen und zugerichtet werden, bis er die begehrte Probe hält. Daß die beyden Schenkel AO und OD ganz gerad seyn müssen, versteht sich von selbst.

4) Auf einer geraden Linie GH wird in dem Punkte O eine Senkrechte OD, oder aus dem Punkte D eine Senkrechte DO errichtet, wenn man an der Linie GH ein Linial anlegt und ans Linial die eine Cathete AO eines rechtwinkligen Dreyecks am Lineale so weit vor- oder zurück schiebt, bis die andere Cathete DO genau an dem vorgelegten Punkt O oder D zu liegen kömmt, wornach man die begehrte Senkrechte DO zu einem solchen Punkte ziehen kann.

II. Vom Messen und Hinlegen eines rechten Winkels im Felde.

Fig. 17. Man bedient sich hierzu einer Kreisscheibe MNP QRSTUV Fig. 17. mit senkrechten Einschnitten in MS und QU oder mit vier Visiren oder Dioptern in M: Q; S und U, wo QU und MS einen rechten Winkel machen; oder man bedient sich hierzu eines bloßen Kreuzes MSQU, welches aus zwei rechtwinklig in einander gefügten Linialen oder Bälkchen MS und QU besteht und wo auf jedem Bälkchen je zwei Visire oder Dioptern M und S; U und Q stehen. Visirt man zuerst durch die beiden Dioptern in M und

S und verlängert man diese Linie MS bis F, und visirt man sodann auch über die andern beyden Dioptern in U und Q und verlängert man UQ bis D, so ist DOF ein rechter Winkel. Oder läßt man zuerst einen Stab F im Ziel MS und dann auch einen Stab D ins Ziel UQ setzen und bemerkt man den Punkt O, wo sich die beyden Ziele durchkreuzen, so ist DOF ein rechter Winkel. Beyde Visire oder Dioptern stehen senkrecht auf ihren Bälkchen oder Linialen, und wenn die Liniale horizontal liegen, so stehen die Dioptern darauf vertikal. Das eine Diopter in M oder U, welches während des Visirens dem Auge am nächsten steht, ist ein bloßes (vertikales) Stäbchen, welches in der Mitte der Länge nach einen feinen Einschnitt hat, durch welchen Einschnitt man sieht. Das andere Diopter in S oder Q, welches dem ersten gegenüber steht und über welches man wegvisirt, hat zwar ebenfalls die Gestalt eines (vertikalen) Stäbchens; ist aber inwendig breit ausgeschnitten, jedoch dergestalt, daß oben und und unten einander entgegen gekehrte sehr spitzige Dreyecke stehen geblieben sind, damit man eben über diese Spitzen sehr genau visiren könne. Ist (in Fig. 19.) ABCD ein hinteres Linial (oder eine sogenannte Rehel), so muß auf AB der feine Einschnitt EF (der mitten durch das vordere Diopter geht) und die Linie GH, (welche mitten durch das andere Diopter geht und worin die scharfen Spitzen der genannten Dreyecke liegen) senkrecht auf AB stehen, und man visirt alsdann mit dem Auge aus einem Punkte I durch den Einschnitt EF über eine solche Spitze K weg nach irgend einen entfernten Gegenstand in L. Fig. 19.

Ein Instrument ABCD, Fig. 20. das die Form eines Kreuzes hat, mit Visiren oder Perspektiven versehen ist und wodurch man rechte Winkel ELF ins Feld legen kann, wird gewöhnlich Kreuzmaaß genannt. Ob dasselbe einen rechten Winkel genau angiebt, kann man auf folgende Art erfahren. Man verfüge sich mit demselben in eine ziemlich ebene Gegend HEFG und stelle das Kreuzmaaß durch den Fig. 20.

Fig. 20. §. 15 beschriebenen Apparat horizontal, visire über CD nach E und über AB nach F und lasse in E und F vertikale Stäbe in die Erde setzen; sodann drehe man das Kreuzmaaß, ohne den Punkt L zu verrücken, um 90 Grade auf der horizontalen Platte des Apparats, so daß CD in AB zu liegen kömmt und nach dem Stab F hinzielt, so wird AB in DC zu liegen kommen und nach D hinzielen, wohin man ebenfalls einen Stab setzen läßt. Jetzt drehe man das Kreuzmaaß wieder um 90 Grade, so wird CD in DC zu liegen kommen, und indem man diesen Arm auf den Stab G richtet, wird AB in BA zu liegen kommen und nach einen in H auszusetzenden Stab hinzielen. Endlich dreht man das Kreuzmaaß nochmals um 90 Grade, wo nun jetzt CD in BA zu liegen kommen und nach H zielen muß, während AB in CD zu liegen kommt und nach dem ersten Punkt E hinzielen muß. Zielt nun jetzt der letzte Arm richtig auf E, so ist das Kreuzmaaß in Ordnung, so er aber etwas nach I oder nach K zielt, so ist der Winkel DLB um etwas zu groß oder zu klein, und, um diesen Fehler zu verbessern, muß man mit LE einen Bogen EI oder EK beschrieben denken, den Punkt I oder K um den vierten Theil dieses Bogens weiter nach E hinrücken und wenn diese Verrückung geschehen, sodann den einen Arm des Kreuzmaaßes genau nach dem Punkt H, und den andern Arm nach dem verrückten Punkt I oder K hinrichten, welches am leichtesten dadurch geschehen kann, daß man von einem Arm zum andern ein Querband AD mit Schraubengängen (die durch Zapfen in A und D gehen) anbringt, wodurch man den Winkel ALD weiter und enger stellen kann.

Mit einem solchen Kreuzmaaße kann man zwar leicht aus dem Punkte L einer Linie HF eine Senkrechte LE errichten, denn man hat weiter nichts zu thun, als den Durchkreuzungspunkt L genau über den vorgelegten Punkt L der Linie HF zu bringen, den einen Arm AB auf F zu richten und einen Stab E ins Ziel des andern Arms CD zu setzen; nicht so leicht ist es aber, aus dem Punkte I, der ziemlich fern

von HF liegt, eine Senkrechte IM auf HF zu fällen. Fig. 20.
Hier muß man nöthigen Falls die Linie HF verlängern und noch einen Stab N in diese Linie setzen, sodann stellt man sich, über die Stäbe N und F wegzielend, in einen Punkt L der Linie HF dergestalt auf, daß man überzeugt seyn kann, es werde die daselbst errichtete Senkrechte LE, wo nicht ganz in den Punkt I, doch nicht fern von demselben hinfallen; fällt alsdann aus I die Senkrechte IE auf LE, mißt EI und macht LM = EI, so wird M der Punkt seyn, aus welchem die begehrte Senkrechte MI nach I errichtet werden muß. Natürlich muß man hier schon einige Uebung und Geschicklichkeit besitzen, nach dem Augenmaße einen rechten Winkel ziemlich richtig zu beurtheilen.

Geschwinder wird der Punkt L, wohin die aus E auf HF errichtete Senkrechte EL geht, durch einen sogenannten Winkelspiegel gefunden. Es besteht Fig. 21.
dies Instrument aus einer Perspectivröhre AB Fig. 21. welche zur Seite eine Oeffnung D hat und worauf eine kurze zweyte Röhre DE senkrecht steht; sodann ist inwendig ein Spiegel IH quergelegt, der die Röhre AB halb verschließt und halb offen läßt. Hält man um das Aug vor der Oeffnung A, so kann man nicht nur über den Spiegel wegsehen und durch die Röhre AB einen Gegenstand F, sondern zugleich auch im Spiegel C durch die Röhre DE einen Gegenstand G wahrnehmen, wo alsdann, wenn ∠ ICB = 45° ist, der Winkel GCF = 90° ist, und mithin GC auf AF senkrecht steht. Um dem Spiegel IH vor dem Gebrauche die richtige Lage gegen CF und CG zu ertheilen, so muß sich derselbe durch einen Zapfen, der durchs Rohr geht, so drehen lassen, daß, wenn man diesen Zapfen in den Scheitel C eines richtigen rechten Winkels GCF (mit entfernten Pfählen in F und G) bringt, man sodann durch die Oeffnung A richtig die beiden Gegenstände F und G wahrnimmt. Daß es uns vorkommt, als wäre der Gegenstand G, der sich im Spiegel C präsentirt, nicht zur Seite, sondern hinter dem Spiegel in F, ist eine bekannte Sache.

Fig. 20. Soll man nun mit dem Winkelspiegel ABD Fig 20. eine Senkrechte EL auf HF fällen, so geht man durch Hilfe des Stabes N in der geraden Linie HNF fort, zielt mit dem Rohre AB nach F und wenn man so weit vorgegangen ist, daß man durchs Seitenrohr LD den Gegenstand E erblickt, so ist alsdann L der Punkt der Linie HG, wohin die Senkrechte EL fällt. Kann man sich auf die Genauheit des Winkelspiegels nicht ganz verlassen, so muß man den Punkt L noch durch ein gutes Kreuzmaaß berichtigen.

Anmerkung. Man hat auch Winkelspiel mit hohen Fig. 21. Dioptern in A; B und E Fig. 21. und mit einem etwas niedern, schmalen, viereckigen Spiegel in IC oder HC, welche in Gebirgegegenden brauchbarer als jene sind. Daß Dioptern und Spiegel auf AB und DE senkrecht stehen müssen, ist schon aus obigem und aus Fig. 19. klar. Will man von diesen Winkelspiegeln beym Feldmessen Gebrauch machen, so müssen die Röhren oder Linäle AB und DE horizontal gerichtet werden, weil, wie weiter unten gelehrt werden wird, alle Grundstücke im Felde nur nach ihrer horizontalen Fläche gemessen werden.

III. Von Messen und Hinlegen eines Winkels auf dem Papiere.

Zum Messen eines Winkels auf dem Papiere oder auf dem Felde bedient man sich eines in 360 oder 400 Grade eingetheilten Kreisringes, wie schon bekannt. Soll nun ein solcher Gradring zum Messen eines Winkels auf dem ebenen Papier gebraucht werden, so muß man im Mittelpunkte C des Ringes Fig. 22. Fig. 22. eine kleine, ganz durchsichtige Glasscheibe anbringen, welche durch Speichen OE, OF, OG und OH an dem Gradringe EFGH befestiget ist und an deren untern Fläche der eigentliche Mittelpunkt des Kreises durch ein feines Linien-Kreuz angezeigt ist, und dann legt man den durchs Glas sichtbaren Mittelpunkt genau in den Scheitel eines zu messenden Winkels AOC oder BOC und beurtheilt jetzt die Größe des Winkels nach folgenden Regeln.

1) Wenn der Anfangs- oder Nullpunkt o der Gradeintheilung genau über den einen Schenkel OA des Winkels AOB zu liegen kommt, so schneidet der andere Schenkel OB von selbst so viele Grade (z. B. 48 + $\frac{1}{3}$ Grade) vom Ringe ab, als wie viel Grade der Winkel groß ist. Fig. 22.

2) Wenn der Winkel BOC gemessen werden soll und der Nullpunkt o der Gradeintheilung außerhalb seiner Schenkel liegt, so zählt man zuerst die Grade $48\frac{1}{3}$, welche durch den Schenkel OB — und dann auch die Grade $141\frac{1}{3}$, welche durch den Schenkel OC abgeschnitten werden, und zieht die ersten und die letzten Grade von einander ab, wo der $\angle$ BOC = $141\frac{1}{3}$ — $48\frac{1}{3}$ = $92\frac{1}{3}$ ist.

3) Wenn der Winkel BOD gemessen werden soll und der Nullpunkt des Gradringes innerhalb der Schenkel des zu messenden Winkels zu liegen kömmt, so werden zuerst die Grade $329\frac{1}{3}$, welche der Schenkel OD abschneidet, von 360 abgezogen, wodurch man die Grade des Winkels AOD = $30\frac{2}{3}$ erhält, und dann addirt man diesen Rest zu den Graden $48\frac{1}{3}$ des Schenkels AB, wo alsdann die Summe der beyden Winkel DOA + AOB = $30\frac{2}{3}$ + $48\frac{1}{3}$ = 79° = DOB ist.

4) Umgekehrt kann man auch wieder einen Winkel AOB von begehrten $48\frac{1}{3}$ Graden hinlegen, wenn man den Mittelpunkt O der Glasscheibe in den Punkt O der Linie AO legt, aus welchem der Schenkel OB errichtet werden soll, sodann im Gradringe die verlangten $48\frac{1}{3}$ Grade abzählt und am äußern Rande des Gradringes einen Punkt macht, der $48\frac{1}{3}$ Grade abschneidet, und zu diesem Punkte aus O den Schenkel OB zieht. Wenn zum Schenkel OB ein zweyter Schenkel OC gezogen werden soll, dergestalt, daß der Winkel BOC = $92\frac{1}{3}$ Grade ist, so muß man zuvor die Grade $48\frac{1}{3}$, welche durch den Schenkel OB abgeschnitten werden, gehörig beobachten, zu diesen Graden die Grade $92\frac{1}{3}$ des hinzulegenden Winkels BOC addiren, und alsdann aus O einen Schenkel OC ziehen, der die Summe $48\frac{1}{3}$ + $92\frac{1}{3}$ = $141\frac{1}{3}$ Grade abschneidet.

Fig. 22. Wäre der Winkel DOB = 79° zu machen, und beobachtete man, daß der Schenkel OD auf 329⅓ Grade zeigte, so muß man 329⅓ von 360° abziehen, den Rest AOD = 360 — 329⅓ = 30⅔ vom hinzulegenden Winkel DOB = 79° abziehen und jetzt nun aus O einen Schenkel OB errichten, der nur noch 79 — 30⅔ = 79° + 329⅓ — 360 = 48⅓ Grade vom Kreisring abschneidet.

5) Ein Winkel BOA kann von einem Blatt Papiere aufs andere Blatt gebracht werden, wenn man das zweyte Blatt unter das erste ganz eben legt, den Scheitel O und auch einen Punkt A und B des einen und des andern Schenkels BO und OA mit einer feinen Nadel senkrecht durchsticht, so daß die Punkte B; O und A auch auf dem untergelegten Papiere sichtbar werden, und zuletzt aus den Punkten B und A des untergelegten Papiers nach dem Punkte O desselben den begehrten Winkel BOA zieht. Tränkt man ganz dünnes halbdurchsichtiges Papier mit Oel (oder mit einer Flüssigkeit aus aufgelösten weißen Wachse in Kienöl), so wird das Papier ganz durchsichtig werden. Legt man dergleichen Oelpapiere auf irgend einen Winkel oder auf irgend eine Figur, so kann man dieses genau abmahlen und abstechen, und nachdem man die Figur auf dem durchsichtigen Papiere hat, so kann man diese ferner auf ein drittes Blatt übertragen. Wir werden jedoch das Copieren der Figuren zu seiner Zeit umständlicher abhandeln.

6) Wie wir Winkel auf dem Papiere von einem Orte zum andern tragen können, wird bey der Lehre von Sehnen, und wie wir Winkel durch Hilfe eines in Grade eingetheilten Reißbretes messen und nach vorgeschriebenen Graden hinlegen können, wird erst dann gezeigt werden können, wenn wir die Lehre von Parallelen abgehandelt haben.

IV. Copiren, Messen und Hinlegen eines Winkels im Felde.

1) Auf dem ebenen oder horizontalen Felde wird
Fig. 23. bekanntlich ein Winkel EOF Fig. 23. bloß durch drei ver-

vertikale (oder senkrechtstehende) Pfähle in F; O und Fig. 23.
E angezeigt. Soll ein solcher Winkel FOE zu Papier gebracht werden, so überzieht man zuvor die obere Platte ABCD des §. 15. beschriebenen Apparats mit ebenem Papiere und befestiget es am äußern Rande durch Kleister (Leim) oder durch einen Rahm; nimmt sodann den Stab in O von der Erde weg, und setzt den Apparat über diesem Punkte O so auf, daß die beyden vertikalen Flächen, welche über die beyden Linien OF und OE weggehen, sich in einem Punkte G auf der Platte durchschneiden, wo demnach der Punkt O der Platte vertikal über dem zugehörigen Punkte O der Erde steht; richtet nun jetzt die obere Platte ABCD ganz horizontal; ergreift mit der linken Hand ein Linial GH mit Dioptern (oder mit einem Perspektive); bemerkt mit der rechten Hand den Punkt O auf dem Papiere und hält ihn mit einer feinen Nadelspitze fest; führt das Linial an diese Spitze O, und indem man durch die Dioptern nach F hinvisirt, und das Linial GH noch immer an der Nadel in O anhält, zieht man an demselben die Linie OH oder HG durch den Punkt O gehend. Jetzt drehe man das Linial GH um den Punkt O und gebe ihm die Lage IK, und indem man damit nach E visirt, zieht man die Visirlinie IK, welche ebenfalls durch den Punkt O geht. Der erhaltene Winkel IOH auf dem Papiere ist alsdann = dem vorgelegten Winkel FOE im Felde.

2) Sollen aber die Grade eines Winkels AOB Fig. 24. auf dem Felde gemessen werden, so muß Fig. 24.
man eine genau eingetheilte Kreisscheibe GHIKLMN auf den Meßapparat (§. 18.) legen, welche Scheibe statt der obersten Platte horizontal gestellt, und auf dem Apparate befestiget werden kann; sodann stellt man den Apparat mit der Scheibe über dem Scheitelpunkte O des Winkels so auf, daß der Mittelpunkt O der Scheibe gerade (vertikal) über dem zugehörigen Punkt O der Erde zu stehen kömmt, und ertheilt der Scheibe eine vollständige horizontale Lage. Nun ist auf die Scheibe ein Visirlinial oder eine sogenannte

Fig. 23. treffen, dergestalt, daß wenn G in M angelangt ist, auch sodann der Theilstrich 10 Grade auf N paßt. Steht daher der Zeiger G zwischen den Graden in B und M und paßt der 3te; 5te oder 8te Theilstrich des Nonius genau auf irgend einen Theilstrich des Bogens BL, so ist auch G nach M um $\frac{3}{10}$; $\frac{5}{10}$ oder $\frac{8}{10}$ Grade vorgerückt, wenn nämlich die Striche in BL um einen Grad weit von einander abstehen; zeigen aber diese Striche schon Drittel-Grade oder 20 Minuten an; so theilt der Nonius diese 20 Minuten in zehn Theile, nämlich in 2 Minuten ab, und dann ist der Zeiger G nach M nur um 3. 2; 5. 2 oder 8. 2 Minuten weiter vorgerückt. Wäre der Gradring ABC gar in Sechstel-Grade oder in 10 Minuten abgetheilt, so würde der Nonius gar die einzelnen Minuten anzeigen. Oder wäre der Gradring zwar in Drittel-Grade abgetheilt, man hätte aber aus 21 solcher Theile in BL nur 20 gleiche Theile im Nonius GF gemacht, so würde man durch einen solchen Nonius ebenfalls die einzelnen Minuten erhalten. Da die Theilstriche auf dem Gradringe und auf dem Nonius sehr genau und fein seyn müssen, so nimmt man, um sie besser zu sehen und zu unterscheiden, eine Loupe (Handvergrößerungsglas) zu Hilfe. Wird sowohl das eine Ende F als das andere E einer Vi-
Fig. 24. sirregel EF Fig. 24. mit einem Nonius versehen, so müssen beyde Nonien, was die Theile eines Grades betrifft, übereintreffen; wonicht, so ist der Zapfen O des Visirlinials EF nicht genau im Mittelpunkte des Gradkreises, welches eben durch die beiden Nonien entdeckt wird. Zeigen sich hier nur unbedeutend Verschiedenheiten, so muß man zwischen den Resultaten der beiden Nonien ein mittleres nehmen. Ob ein Nonius überhaupt gut gearbeitet ist, erkennt man aus einer langsamen Vorrückung sogleich, wo immer ein Theilstrich nach dem andern auf irgend einen Theilstrich des Gradringes passen und kein anderer Theilstrich passen muß. Übrigens versteht sich von selbst, daß man durch den einen Zeiger F allemal 180 ganze Grade mehr oder weniger als durch den andern Zei-

ger F der Regel erhalten muß, weil der Bogen HIKL oder der Bogen LMDGH = 180° ist.

Geht die Gradeintheilung von B nach C, so gilt der Nonius GF, geht sie aber von B nach A, so gilt der Nonius GH, welches vor Augen liegt.

§. 19.

Von der Axe und vom Winkel der Ebenen.

1. Wenn, Fig. 16., AO auf PQ rechtwinklig steht und AO sich um PQ in einem Kreise ABCDEFGHI bewegt, während PQ immerfort an einer festen Stelle bleibt, so ist (nach §. 16.) PQ die Axe des Kreises. Da nun dieser Kreis in einer Ebene ADFH liegt und die Winkel AOP; COP; DOP; EOP; FOP; HOP rechte sind, so folgen hieraus nachstehende Sätze. Fig. 16.

1) Auf einer Ebene ADFH steht im Punkte O eine Linie PO oder PQ senkrecht, wenn PQ nicht nur auf einer Linie AF, welche in der Ebene ADFH liegt und durch den Punkt O geht) senkrecht steht, sondern auch PQ senkrecht auf einer zweyten Linie DH steht, welche ebenfalls in der genannten Ebene liegt und jene Linie AF im Punkte O (rechtwinklig) durchkreuzet.

Ob eine Linie auf einer Fläche senkrecht steht, muß demnach kreuzweise untersucht werden.

2) Ist die Axe PQ vertikal, so ist ADFH eine horizontale Fläche, und alle Linien AO; BO; AD; OK; KL ꝛc., welche in dieser Fläche und in der Verlängerung derselben liegen, sind horizontale Linien, welche durch vertikale Linien, die mit ihnen in Berührung kommen, senkrecht durchschnitten werden.

3) Ein gerader Stab PO steht vertikal, wenn man ihn nach Nr. 1. in einer kreuzweise genommenen Richtung AF und DH betrachtet, sich in A und nachher auch in D aufstellt, in beyden dieser Orte einen vertikalen Faden vor sich hinhält, über diesen Faden (nach §. 13) wegzielt und man alsdann findet, daß PO bey dieser kreuzweisen Beobachtung im gleichen Querziele des Fadens zu liegen kömmt.

Fig. 16. Auf demselben Wege kann man auch finden, ob ein Punkt, den man auf einer horizontal gerichteten Platte weit über der Erde annimmt, vertikal über dem dazu gehörigen Punkt der Erde steht.

4) Ist die Axe PQ horizontal, so ist die Kreisfläche ABCDEFGHI oder die geradlinie Fläche ADFH vertikal. Um sich dies zu versinnlichen, darf man nur die Axe PQ wirklich horizontal legen, so wird die Kreisfläche darauf senkrecht stehen und eine vertikale Lage haben.

5) Errichtet man auf einer Ebene mehre senkrechte Linien, so laufen diese zu einander parallel, wie §. 12. Ist die Ebene horizontal, so sind die darauf errichteten Senkrechten vertikal und parallel, und ist die Ebene vertikal, so sind die darauf errichteten Senkrechten horizontal und parallel.

Fig. 26. II. Wenn eine Ebene ABCD Fig. 26. sich um eine darin gezogene gerade Linie AD, welche hier ebenfalls Axe heißt, dreht und nach und nach die Lage AEFD annimmt, so beschreibt jeder Punkt H der sich bewegenden Fläche ABCD einen Kreisbogen HI, und wenn diese Fläche ganz um die Axe AD herumläuft, so beschreibt der Punkt H auch einen ganzen Kreis HIKLMNH. Fällt man aus H eine Senkrechte HG auf die Axe AD, so beschreibt HG während der genannten Bewegung die ebene Kreisfläche HIKLMNH, deren Mittelpunkt in G liegt. Hieraus ergeben sich nun folgende Sätze.

1) Der Durchschnitt zweyer Ebenen ABCD und AEFD ist eine gerade Linie AD, selbst auch dann, wenn diese Ebenen Kreisflächen seyn sollten.

2) Da eine unendlich große Ebene das ganze Weltall in zwey Theile theilt (§. 16. Nr. 7); so werden sich zwey Ebenen (wenn sie hinlänglich verlängert werden) allemal durchschneiden, den einzigen Fall ausgenommen, wenn diese Ebenen streng parallel laufen (§. 12), in welchem Falle der Durchschnitt unendlich fern angenommen wird.

3) Der Winkel HGI, den die beyden Flächen DABC und DAEF machen, ist ganz derselbe Winkel, den die beyden Schenkel GH und GI machen, welche

in einer und in der andern Fläche aus einem festen Fig. 26.
Punkte G der Axe (Durchschnittslinie) AD senkrecht auf AD errichtet werden.

Soll daher der Winkel HGI, welcher von zwey Flächen BADG und EADF eingeschlossen wird, gemessen werden, so muß man aus einem Punkte G des Flächen-Durchschnitts AD senkrechte Linien GH und GI in einer und der andern Fläche errichten und den Winkel HGI dieser errichteten Senkrechten messen. Die Axe des Kreises HIKLMN, durch welchen der Winkel HGI gemessen wird, ist der Durchschnitt AD der genannten Flächen, und es steht daher dieser Kreis senkrecht auf die Axe AD, welche durch den Mittelpunkt G geht.

4) Sind die beyden Winkel DAE und DAB rechte, so ist auch ∠ HGI = ∠ BAE. Es ist mithin einerley, in welchem Punkte A oder G der Axe AD der Winkel, den die Flächen bilden, gemessen wird.

5) Durchneiden sich zwey vertikale Flächen DABC und DAEF, so muß ihr Winkel HGI durch einen horizontalen Kreis HIKLMNH gemessen werden.

6) Zwey Flächen DAEF und DABC stehen auf einander senkrecht, wenn der zwischenliegende Winkel HGI ein rechter ist. Eben so werden auch die Flächen HIKLMNH und DAEF, deren Durchschnitt in GI liegt, auf einander senkrecht stehen, wenn sowohl GA als GK auf GI senkrecht gezogen wird, und der zwischen den genannten Flächen liegende Winkel KGA ein rechter ist.

7) Alle vertikale Flächen stehen auf einer horizontalen Fläche senkrecht, weil der nach den jetzigen Regeln dazwischen gezogene Winkel ein rechter ist.

8) Der Kreis HIKLMN mag liegen, wie er will, so denkt man sich allemal die darauf errichteten Flächen DAEF und DABC senkrecht; stehen nun zwey Flächen ABCD und AEFD auf einer vertikalen Fläche HIKLMN senkrecht, so muß ihr Winkel HGI durch einen vertikalen Kreis gemessen werden.

9) Wenn ein Winkel HGI in einer Ebene HIKLMN gemessen werden soll, so denkt man sich allzeit zu dem zu messenden Winkel senkrechte Flächen DABC und

Fig. 26. DAEF, welche jene Ebene in den Linien GH und GI durchschneiden.

10) Zwey Punkte B und F, welche aus G gesehen werden, werden nach ihrer Lage bestimmt, wenn man zuvor eine Ebene HIKLMN nach einer willkührlichen Richtung zieht, aus B eine Senkrechte BH und aus F eine Senkrechte FI auf der genannte Ebene fällt, zu dem Dreyecke GHB die Ebene QBAD und zum Dreyecke GFI die Ebene FEAD gezogen denkt, den Winkel HGI dieser Ebenen und auch die beyden Winkel BGH und FGI in diesen Ebenen mißt.

Gewöhnlich werden aus G zu den beyden Punkten B und F vertikale Flächen DABC und DAEF errichtet und dann hat man den Winkel HGI dieser Flächen durch einen horizontalen Kreis HIKLMN und die Winkel HGB und IGF durch einen vertikalen Kreis zu messen.

Fig. 27. III. Es sey Fig. 27. AB der Durchmesser eines Halbkreises AKFDQB; C der Mittelpunkt und CD ein auf dem Mittelpunkte C des Durchmessers AB errichteter senkrechter Radius; bewegt sich nun der Halbkreis ADB um seinen Durchmesser AB, wo AB zwar seine Stelle nicht verändert, aber der Halbkreis nach und nach die Lage AEB; AGB; AHB ꝛc. annimmt; so wird der Halbkreis durch seine Bewegung eine Kugel AKDBGN und der Radius CD eine Kreisfläche DEFGHI beschreiben.

Der Durchmesser AB, um welchen sich die halbe oder ganze Kreisfläche AKDBGA bewegt, heißt Axe und die Endpunkte A und B derselben die Pole; die Kreise AKDBG; AEBH selbst aber, welche sich bewegen oder welche sich in der Axe und in den Polen durchschneiden, heißen Spalter, weil sie sich selbst und die ganze Kugel durchspalten und diese in zwey gleiche Theile theilen. Der Kreis DEFGHI, welcher durch den Radius CD beschrieben wird, heißt Gleicher, weil er jeden Spalten ADB; AEB; AGB; AHB in zwey gleiche Theile AD und DB; AE und EB; AG und GB; AH und HB theilt, oder weil er von den beyden Polen A und B gleichweit absteht,

indem der Bogen AD = 90° und BD = 90; Fig. 27.
AE und auch BE = 90; AG = BG und AH =
BH = 90° ist. Jeder Punkt K im Spalter AKDB beschreibt während seiner Bewegung um die Axe einen Kreis KMNO, welcher parallel zum Gleicher DEFGHI läuft, weshalb auch ein solcher Kreis KMNO Parallelkreis heißt. Der Radius dieses Kreises ist die Senkrechte KL, welche aus K auf die Axe AB gefällt wird.

Der Winkel DCE, welchen die beyden Spalter oder Kreisflächen ADB und AEB am Durchschnitte AB machen, wird durch den Gleicher DEFG gemessen, der die Axe AB senkrecht durchschneidet. Da auch der Parallelkreis KSMNO die Axe AB senkrecht durchschneidet, so wird auch der Winkel KLS = dem ∠ DCE seyn und man wird daher auch den Winkel zweyer Spalter durch einen Parallelkreis messen können. Dieser Winkel DCE, welcher mit dem Bogen DE des Gleichers gleichviel Grade hat, heißt Abstand oder Unterschied der Spalter. Man sieht ein, daß, weil ein unendlich kleiner Kreis, der um den Punkt A herum beschrieben wird, ebenfalls auch 360 Grade hat, der Winkel KAS in A eben so viele Grade enthält, als der Winkel KLS oder Winkel DCE. Es ist daher der Polar- oder Scheitelwinkel KAS = dem Winkel DCE des Gleichers.

Zu jedem Punkt P, oder R kann aus dem Mittelpunkte C eine Ebene (Spalter) APQB oder ASRB gezogen werden, welche durch die Pole A und B geht, weil drey Punkte C; A und P oder B; A und P die Lage einer Ebene bestimmen und die Punkte A, C und B schon in einer geraden Linie liegen. Zieht man zu einem Punkte P der Kugel einen Spalter APDQB, welcher demnach durch die beyden Pole A und B und durch den Punkt P geht und den Gleicher DEFGHI in D durchschneidet; so wird der Bogen DP des Spalters, welcher zwischen dem Gleicher und dem vorgelegten Punkte P zu liegen kommt, Abweichung des Punktes P vom Gleicher genannt. Eben so ist auch DQ die Abweichung des Punktes Q, nur

Fig. 27. mit dem Unterschiede, daß die erste Abweichung DP nach dem Pole A und die zweyte DQ nach dem Pole B hingeht. Da der Bogen DP eben so viele Grade als der Winkel DCP und der Bogen DQ eben so viele Grade als der Winkel DCQ hat, so werden auch die Winkel DCP und DCQ die Abweichungen der beyden Punkte P und Q anzeigen. Setzen wir die Abweichungen DP und DK, welche vom Gleicher nach dem Pol A hingehen, positiv, so wird man die Abweichungen DQ, welche nach dem entgegenstehenden Pol B hingehen, negativ zu setzen haben.

Nunmehr können wir folgenden wohl zu merkenden Satz aufstellen.

Zwey Punkte S und P auf einer Kugel werden gegen einander bestimmt, wenn man

1) Die Pole A und B der Kugel festlegt;

2) sowohl durch den einen als durch den andern Punkt S und P die Spalter ASREB und AKPDQB zu den Polen A und B zieht.

3) den Winkel DCE zwischen den Spaltern oder den Abstand DE derselben mißt und auch noch

4) die Abweichung ERS und die Abweichung DP dieser beyden Punkte S und P vom Gleicher DE mißt.

Eben so wird auch die Lage des Punktes Q gegen R bestimmt, wenn man den Abstand DE ihrer Spalter und die Abweichungen ER und DQ vom Gleicher mißt, wo jedoch DQ negativ ist, wenn ER positiv gesetzt wird.

IV. Unser Erdball, dessen Oberfläche wir berechnen, hat auch beyläufig die Form einer Kugel, [die Berge und Thäler sind nur als kleine Unebenheiten anzusehen, weil der Erdkörper so erstaunlich groß ist], und diese Erdkugel dreht sich von einem Tage zum andern einmal um ihre Axe AB und es sind daher die Punkte A und B die Pole derselben. Denken wir uns den Ort den wir bewohnen in K, und ziehen wir zu demselben aus den Polen A oder B den Spalter AKPDQB, so ist der Bogen AK = 39°

26 und wir pflegen den Pol A, welcher uns am nächsten liegt, Nordpol und den gegenüberstehenden oder entfernten Pol B Südpol zu nennen. Zieht man zu mehren Punkten K und R der Erde, sogenannte Spalter AKPDQB und ASREB, so erlangen diese den Namen Meridiane oder Mittagskreise und der Gleicher DEFGHI heißt Aequator. Der Bogen DE des Aequators zwischen zwey Meridiane, wird jetzt Unterschied der geographischen Länge, die Abweichung DK eines Punktes K vom Aequator wird geographische Breite (Polhöhe) und der Abstand AK des Punktes K vom Pole A Polardistanz genannt. Auch hier wird die Lage eines Punktes K auf der Oberfläche der Erde gegen einen andern R derselben dadurch bestimmt, wenn man durch diese Punkte zuerst die Meridiane ASREB und AKPDQB zieht, sodann den Bogen DE des Aequators bestimmt (der zwischen den beyden Meridianen zu liegen kömmt) und endlich auch die Höhe ER und DPK über den Aequator DEFG der beyden Punkte R und K, nämlich ihre Polhöhe angiebt. Liegt z. B. Paris in R und Dreyßigacker in P, so ist der Unterschied der Länge DE = 8° 4″ und die Breite ER von Paris = 48° 50′ 23 und die Breite DP von Dreyßigacker = 50° 33′ 88.

Da sich die Erde alle 24 Stunden um ihre Axe dreht und binnen dieser Zeit die Punkte D und K die Kreise DEFGHI und KLMNO beschreiben, und alle diese Kreise in 360 Grade eingetheilt werden, so läuft die Erde binnen einer Stunde $\frac{360}{24}$ = 15 Grade, binnen einer Minute $\frac{25}{60}$ Grad = 15 Gradminuten und binnen einer Zeitsekunde 15 Gradsekunden durch. Dreht sich daher die Erde um 15 Grade so ist eine Stunde verflossen, und es kömmt auf 1° nur $\frac{60}{15}$ = 4 Zeitminuten, und auf 1 Gradminute nur 4 Zeitsekunden.

V. Die Erdaxe ist schief gegen den Himmel gerichtet und während sich die Erde von Abend gegen Morgen bewegt, so kömmt uns dieß vor, als bewegten sich die Sterne von Morgen gegen Abend und

Fig. 27. zwar um eine Axe, welche mit der Erdaxe übereinstimmt. Die beyden Punkte des Himmels, welche in der Verlängerung der Erdaxe liegen, heißen Weltpole und die Linie von einem Weltpol zum andern die Weltaxe. Sind A und B diese Weltpole und demnach AB die Weltaxe, so stellt die Hohlkugel Fig. 27. das ganze Himmelsgewölbe vor und wir glauben uns im Mittelpunkte C des Weltalls zu befinden und alle Sterne am Himmel an der Oberfläche einer Hohlkugel zu erblicken. Der Aequator DEFGHI des Himmels liegt ebenfalls in der Richtung des Erdäquators und da alle Menschen mit den Füßen nach dem Mittelpunkte der Erde und mit dem Kopfe nach den Himmel hin gerichtet sind, so werden auch die Menschen, welche über den Aequator der Erde wohnen, den Aequator des Himmels über dem Kopfe oder im Scheitel haben. Würden wir eine von den beyden Erdpolen bereisen, so würden wir daselbst den Polarstern über unserm Kopfe finden. Da der Aequator von dem Pole 90° absteht, so werden wir auf dem Aequator der Erde die Polarsterne und auf dem Erdpole den Aequator des Himmels im Horizonte erblicken. Je größer demnach die geographische Breite eines Ortes auf der Erde ist, desto weiter steht der Aequator des Himmels vom Zenithe seiner Bewohner ab und desto höher steht der Weltpol.

Das ganze Himmelsgewölbe mit allen Sternen bewegt sich demnach (wenigstens nach unsrer Meinung) um die Axe AB und zwar von der Linken zur Rechten oder von Morgen gegen Abend, und zwar beschreibt ein Stern D, der im Aequator liegt, einen größten Kreis DEFGHI und ein Stern K, der nahe an einem Pole A liegt, einen sehr engen Kreis KSMNO.

Auch zu jedem Sterne P und R kann man Meridiane AKPDQB und ASREB ziehen, und den Ort eines Sterns durch den andern bestimmen, wenn man den Abstand DE dieser Meridiane, (welcher Unterschied der geraden Aufsteigung heißt) und die Abweichung DP und ER durch Grade ausdrückt. Da der Aequator den ganzen Himmel in zwey Theile, in die nördliche und

südliche Halbkugel theilt, so ist die Abweichung DP Fig. 27.
des Sterns P nördlich und die Abweichung DQ
des Sterns Q südlich.

Die Sonne steht bekanntlich im Frühjahre zur Zeit der Nachtgleiche am 21. März (wo Tag und Nacht gleich sind) im Aequator, tritt alsdann höher und nimmt gegen den 22. Junt den höchsten Stand an, (wo die Tage am längsten sind), kömmt nach und nach aber wieder tiefer und gegen den 23. September wieder im Aequator (wo wieder Tag und Nacht gleich) und gegen den 22. December am tiefsten zu stehen (wo die Tage am kürzesten sind) worauf sie sich alsdann wieder nach und nach erhebt und im Frühjahre beynahe an die erste Stelle des Aequators tritt.

Die Sonne beschreibt nämlich während dieser jährlichen Bewegung am Sternenhimmel einen Kreis, welcher Ekliptik (Sonnenbahn) heißt und den Aequator auf dieselbe Art in A und B durchschneidet, als wie ein Meridian AKDQBNA den andern ASREBFHA durchschneidet. Der Winkel KLS oder L DCB oder der Bogen DE zwischen dem Aequator und der Ekliptik ist ungefähr = 23° 27′, 7 und es kömmt daher die Sonne bey ihrem höchsten und tiefsten Stande eben so viele Grade über und unter dem Aequator zu stehen. Ist wie vorher, der Kreis DEFGHI der Aequator und F derjenige Punkt (Frühlingspunkt) desselben, wo die Sonne ihn im Frühjahr durchschneidet, und ist S ein Stern am Himmel, wozu man den Meridian ASEB gezogen hat, so wird der Bogen FE des Aequators vom Frühlingspunkte F an bis zum genannten Meridian die gerade Aufsteigung dieses Sterns genannt. Eben so ist auch die gerade Aufsteigung (des Sternes P oder Q) = dem Bogen FED und es haben daher Sterne K und Q, welche in einerley Meridian AKPDQB liegen, eine gleich große gerade Aufsteigung. Der Unterschied der geraden Aufsteigung zweyer Sterne S und Q ist = ED = FED — FE.

Daß Sonne, Mond und Sterne täglich auf und niedergehen, und alle einen Kreis um die Weltaxe beschreiben, und daß dieses von der täglichen Umdrehung der Erde herrühre, ist schon oben gesagt worden. Alle Sterne, die wenigen Planeten ausgenommen, sind übrigens ohne alle Bewegung, indem sie ihren Ort gegen einander gar nicht oder nur unmerklich verändern. Da jedoch die Erde sich nicht nur täglich einmal um sich selbst dreht, sondern auch in diesem Weltraume fortfliegt und jedes Jahr in einem großen Kreise um die Sonne herumläuft, so kömmt uns dies vor, als wenn die Sonne in einer gewissen Bahn von einem Sterne zum andern am Himmel fortlaufe und einen ganzen Kreis, nämlich die oben genannte Ekliptik, um den ganzen Himmel herumbeschreibe. Der Bogen der Ekliptik vom Frühlingspunkte an bis zu einem andern Punkte derselben, oder bis zum Orte der Sonne, heißt Länge (der Sonne). Da sich der Mond um die Erde und die Erde und alle übrigen Planeten um die Sonne sich bewegen, so ist es natürlich, daß der Mond und die Planeten ihren Stand am Himmel nach und nach verändern.

Auch zur Ekliptik, welche ein Kreis am Himmel ist, kann man sich eine Axe denken, welche auf den Mittelpunkt dieses Kreises senkrecht steht, durch den ganzen Weltraum und nach gewissen Sternen hingeht, und man pflegt die beyden äußersten Punkte dieser Axe Nord- oder Südpol der Ekliptik zu nennen. So wie man die Städte, Dörfer und einzelne Höfe dieser Oberfläche der Erde in besondere Reiche und Landschaften eintheilt, so theilt man auch die Sterne in besondere Regionen und Landschaften ein, und man pflegt mehre Sterne zusammen, welche neben einander stehen und eine besondere Figur ausmachen, ein Sternbild zu nennen. Im nachfolgenden sind die Regionen und die merkwürdigsten Sternbilder angezeigt.

1) Die Sternbilder oder Sterngruppen in und in der Nähe der Ekliptik, oder die Sterne im sogenannten Thierkreise sind, wenn man im Früh-

lingspunkte zu zählen anfängt, und den Thierkreis von der Rechten zur Linken in zwölf Theile eintheilt:

Der Widder, Stier (mit Aldebaran), die Zwillinge, der Krebs, Löwe (mit dem Regulus), die Jungfrau (mit der Spica), Wage, der Skorpion (mit dem Antares), Schütze, Steinbock, Wassermann, die Fische.

2) Die merkwürdigsten Sternbilder ausser dem Thierkreise am nördlichen Himmel sind:

Der kleine Bär (in dessen Schwanz der Polarstern), die Cassiopeja (zunächst in der Milchstraße), der Cepheus, der nördliche Drache (in dessen vordern Krümmungen der Pol der Ekliptik sich befindet), die Andromeda, die Triangel, der Perseus mit dem Medusenhaupte, der Fuhrmann mit der Capella, kleine Löwe, der große Bär, Bootes mit dem Arktur, die Jagdhunde, das Haupthaar der Berenice, die nördliche Krone, Leyer mit der Wega, der Herkules, Ophiuchus und die Schlange, der Adler und Antinous, Poniatowskische Stier, Pfeil, der Fuchs mit der Gans, Delphin, Schwan, Pegasus, das kleine Pferd.

3) Die merkwürdigsten Sternbilder am südlichen Himmel sind:

Der Wallfisch, Orion (mit dem Jakobsstabe, dem Beteigeuze und Rigel), der Hase, die Taube, der Eridanfluß, der große Hund mit dem Sirius, der kleine Hund mit dem Prokyon, das Schiff, die große Wasserschlange nebst dem Becher und der Rabe, der südliche Fisch mit dem Fomahand, der Centauer, wovon aber nur wenig sichtbar ist.

Gar nicht sind sichtbar: der Phönix, das südliche Kreuz, der südliche Triangel, der Pfau, der Indianer und Kranich, die große und kleine Wolke u. s. w.

Woher es komme, daß wir viele Sternbilder in der Nähe des Südpols nicht zu sehen bekommen, begreift man sogleich, wenn man bedenkt, daß der Süd-

pol des Himmels eben so tief (nämlich $50\frac{1}{2}$ Grade) unter unserm Horizonte steht, als der Nordpol über demselben erhaben ist, und es können daher auch alle Sterne, welche weniger als $50\frac{1}{2}$ Grade vom Südpol entfernt stehen, niemals bey uns aufgehen. Eben so gehen aber auch wieder die Sterne, welche nicht über $50\frac{1}{2}$ Grade vom Nordpole entfernt stehen, bey uns niemals unter.

Zieht man durch die beyden Weltpole einen Meridian am Himmel, der durch unser Zenith geht, so ist dieß unser Meridian, und er ist von Mitternacht gegen Mittag (von Norden gegen Süden) hingerichtet, und wenn Sterne aufgehen, und bey ihrer Bewegung um die Weltaxe immer näher an unsern Meridian rücken, so kommen sie auch immer höher und im Meridian selbst am höchsten zu stehen, worauf sie nachher wieder tiefer zu stehen kommen und endlich gar wieder untergehen. Geht ein Stern zu einer gewissen Zeit durch unsern Meridian, so sagt man: er kulminirt.

Fig. 27. VI. Man halte die 27. Figur so vor sich hin, daß die Axe AB vertikal steht, denke sich A im Zenithe und B im Nadire, und stelle sich unter die Kugel, welche durch die 27. Figur ausgedrückt wird, ebenfalls wieder das ganze Himmelsgewölbe vor, welches wir aus dem Mittelpunkte C beobachten; so werden jetzt die durch A und B gezogenen Kreise (Spalter) APDQBGNA und ASREBHA nicht mehr Meridiane, sondern Vertikalkreise (Vertikalflächen) und der dazu gehörige Gleicher DEFGHI nicht Aequator sondern Horizont (horizontale Fläche) genannt), weil DC oder GC senkrecht auf AC steht und wenn AC vertikal ist, sodann jeder Radius CD; CE; CG ꝛc. und die Fläche DEFGHI horizontal seyn muß. Ziehen wir hier auf unsrer Erde, an einem ziemlich hohen Orte, wo die Aussicht frey ist, eine horizontale Fläche, so liegt über dieser Fläche der obere halbe Himmel und unter derselben der untere halbe Himmel, welcher letzte aber, weil die Erde dazwischen steht, nicht gesehen werden kann.

Ist

Ist C der Beobachtungspunkt und DEFGHI eine dazu gezogene horizontale Fläche, und ist ferner K ein Gegenstand oder ein Stern, der über dem Horizonte liegt, zu welchem man den Vertikalkreis DPKA gezogen denkt; so wird der Winkel DCP zwischen dem Horizonte D und dem Gegenstande P die Höhe, und der Winkel ACP zwischen der Zenithe K und dem Gegenstande P die Zenithdistanz dieses Gegenstandes genannt. Eben so wird auch der Bogen DP des Vertikalkreises zwischen einem Sterne P und dem Horizonte D die Höhe, und der Bogen AP die Zenithdistanz dieses Sterns genannt, und ist der erste Bogen = α^0, so ist der zweyte AP = 90 − α. Fig. 27.

Der Winkel im Zenithe A, welchen zwei vertikale Kreise ADB und AEB einschließen, ist auch hier so groß, als der Winkel DCE, welcher im Horizonte DEFG durch die zwey vertikale Flächen abgeschnitten wird.

Ziehen wir durch Zenith und Nadir einen solchen Vertikalkreis, der durch die Weltpole geht, so ist dieser Vertikalkreis zugleich auch Meridian (Mittagskreis) und weil alle Vertikalkreise senkrecht auf den Horizont stehen, so steht auch dieser Meridian oder diese Mittagsfläche senkrecht darauf. Beyde, die Mittags- und die Horizontal-Fläche durchschneiden sich in einer Linie, welche man Mittagslinie nennt. Diese Linie zielt genau von Mittag gegen Mitternacht, und ist (Fig. 4.) ED eine gezogene Mittagslinie und AB eine sie rechtwinklig durchkreuzende Linie, so wird AB genau von Abend gegen Morgen oder von Westen gegen Osten hinzielen. Stellt man sich in C, mit dem Gesichte nach dem Mittage oder Süden hinsehend, so hat man im Rücken D Norden, nach der Linken B Osten und nach der Rechten A Westen. Liegt das genannte Kreuz ABED in einer horizontalen Fläche, und stehen auf dieser Fläche zwey vertikale Flächen, welche sich rechtwinklig durchschneiden, so wird, wenn die eine nach Mittag oder Mitternacht hingerichtet Fig. 4.

ist, die andere vertikale Fläche nach Morgen oder Abend hingerichtet seyn.

§. 20.

Beschreibung der gebräuchlichsten Winkel-Instrumente.

1) Alle geometrische Winkel-Instrumente müssen durch Hilfe des §. 15. beschriebenen Apparats, wo-
Fig. 23. von Fig. 15. ein vertikaler Durchschnitt ist, horizontal gestellt und durch einen Zapfen DC auf dem Apparate befestiget werden können, und wenn die oberste horizontale Platte AB die Form eines viereckigen Tisches hat, so wird das Ganze Meßtisch genannt. Es kann jedoch auch dieser Tisch rund seyn.

2) Zu diesem Tische gehört das §. 18. II. und
Fig. 19. IV. beschriebene Visirlinial mit Dioptern Fig. 19. statt der Dioptern bedient man sich aber lieber des
Fig. 28. sogenannten Visirinstrumentes, wovon Fig. 28. ein vertikaler Durchschnitt der Länge nach ist. AB stellt hier das untere Linial vor, welches auf eine horizontale Fläche (auf den Meßtisch) gelegt wird; CDEF ist ein vertikales (dünnes, ziemlich breites) Stäbchen, das unten eine horizontale Richtung hat, damit dieß Stäbchen auf dem untern Lineal feststehen und angeschraubt werden könne; In G ist ein horizontaler Zapfen, der auf der Fläche CEFD senkrecht steht, und der Mittelpunkt dieses Zapfens ist zugleich der Mittelpunkt eines in Grade eingetheilten halben Kreisringes HNIQK; alles aus Metall. Der Zapfen hat eine Hülse, an welcher ein Fernrohr LM befestiget ist, und an diesem Zapfen kann das Fernrohr auf und ab, in einem vertikalen Kreise herumbewegt werden, so daß das Fernrohr LM nicht nur die Lage HK sondern auch jede andere Lage NP im vertikalen Kreisse HNIQKP annehmen kann. Aus der Mitte G des Zapfens oder des Fernrohrs ist ein Zeiger GI errichtet, der senkrecht auf IIK steht und auf gewisse Grade in I

des Gradkreises NIQ hinweißt. Der halbe Gradkreis Fig. 28.
HNIQK ist nämlich in I nochmals halbirt, und von diesem Punkte I angefangen, hat man die gewöhnlichen Grade von I nach Q und K, und von I nach N und L hin aufgetragen. Steht das Fernrohr LM horizontal oder parallel zu AB, so weist der Zeiger GI auf o (nämlich Null) Grad in I; nimmt aber das Fernrohr die Lage NP an, so weißt der auf NP senkrechtstehende Zeiger GQ nach den Graden in Q hin und es ist der Winkel IGQ = ∠ KGP. Es wird daher der Höhenwinkel KGP, oder der Vertiefungswinkel HGN durch die Grade des Bogens IQ angedeutet. Will man diese Erhöhungs- oder Vertiefungswinkel sehr genau messen, so kann man mit dem Zeiger einen Nonius (§. 18. V.) verbinden.

3) das Sehrohr oder Perspektiv LN hat vorn in L eine kleine Oeffnung (durch welche man sieht oder vor welche man das Auge hält) und hinten in M eine größere Oeffnung, welche nach dem zu betrachtenden Gegenstande hingerichtet wird. Jene heißt okulare, und diese objektive Oeffnung, und in jener sind zwey kleine (Okular-) Gläser in Form einer Linse, und in dieser ein großes (Objektiv-) Glas, das zwar auch die Form einer Linse hat, aber beynahe ganz eben ist.

Die Brenngläser, welche Aehnlichkeit mit den Gläsern im Perspektive haben, besitzen, wann man sie gegen die Sonne hält, bekanntlich die Eigenschaft die (parallel einfallenden) Sonnenstrahlen zu brechen und in einen Punkt zusammen zu treiben. Diesen Punkt nennt man Brennpunkt. Auf dieselbe Art werden Fig. 29.
nun auch Sehstrahlen TO und VU Fig. 29, welche von einem entfernten Gegenstande aufs Objektivglas M des Fernrohrs (parallel) fallen, daselbst gebrochen, so daß die Strahlen TO, und VU nach OS und US weiter fortgehen, im Brennpunkte S zusammen kommen und daselbst sich durchschneiden, sodann aber von den Objektivgläsern in L wieder aufgenommen und durch sie wieder parallel gemacht werden, dergestalt, daß der obere Strahl TO, der nach OL fortgeht, dem Auge R unten in O, und der unter Strahl VU des

Fig. 28. des Gegenstandes dem Auge oben in U mitgetheilt wird, weshalb durch ein solches Fernrohr alle Gegenstände verkehrt erscheinen. Ist T und V die linke und rechte Seite eines Gegenstandes, so wird sich T in o und V in u präsentiren, und wir werden demnach das linke T rechts in o und das rechte V links in u erblicken.

Der Punkt S ist nicht nur der Brennpunkt des Objektivs M, sondern zugleich auch der Brennpunkt des Okulars L, und so oftmal SL in SM liegt, so vielmal werden auch die Gegenstände durchs Fernrohr vergrößert.

Obgleich diese Perspektive die Gegenstände verkehrt zeigen, so gewöhnt man sich doch bald an sie, so daß man glaubt, alle Gegenstände recht zu sehen.

Da die Oeffnung und das Objektivglas in M ziemlich groß ist und man doch feste Punkte im Glase haben muß, über welche man vevisirt, so ist im Glase selbst ein feines Kreuz eingeschnitten oder im Brennpunkte der Gläser ein sogenanntes Falenkreuz (von einer Kreuzspinne gesponnen) vorgezogen, welches man auf den abzuvisirenden Gegenstand richtet.

Man wird vielleicht fragen, warum man ein Perspektiv gewählt hat, daß die Gegenstände verkehrt
Fig. 29. zeigt, allein dieß ist bloß deswegen geschehen, damit das Fernrohr LM möglichst kurz seyn kann; soll es die Gegenstände aufrecht zeigen, so muß es wenigstens ums zweyfache LS länger gemacht werden und noch 2 bis 4 Okulargläser erhalten, welche den untern Strahl o wieder obenhin und den obern Strahl u wieder untenhin bringen.

Die sogenannten Opernglucker, welche ganz kurze Perspektive und nicht so lang als MS sind, zeigen zwar die Gegenstände auch aufrecht, sie vergrößern aber nur wenig und haben ein hohlgeschliffenes Okularglas, das ein Stück von S nach M hin absteht und die Strahlen O und US des Objektivs M, noch ehe sie den Brennpunkt S erreichen, auffängt und sie parallel macht, wo nun der Strahl O auch oben bleibt.

Die nähere Beschreibung der Perspektive findet man in jeder Optik und Physik.

4) Ist der in Nr. 1 beschriebene Meßtisch rund, und hat er im Mittelpunkte der obern horizontal Fläche einen hervorstehenden vertikalen Zapfen, an welchem sich mittelst einer Hülse die in Nr. 2 beschriebene Visirregel auf dem horizontalen Tische herumdreht, so wird das Ganze Scheibe genannt. Meistens ist dieser runde Tisch oder diese Scheibe von einen messingnen Rahm eingefaßt. Der Gebrauch des Meßtisches, und der Scheibe ist schon aus §. 18. IV. klar.

5) Ist der äußere messingene Ring, der Scheibe GHIKLMN Fig. 24. in Grade eingetheilt und ist im Fig. 24. Mittelpunkte O ein vertikaler Zapfen, an welchem sich die Visirregel CD herum nach jeder Richtung EF bewegt, und ist ferner mit dieser Visirregel AB Fig. 28. Fig. 28. ein Perspektiv LM verbunden, das sich in einem vertikalen Kreis oder Gradbogen HNIQK bewegt, so wird ein solches Instrument, mittelst dessen man die Winkel AOB Fig. 24. in einer horizontalen Fläche und zugleich auch die Winkel NGO Fig. 28. in einer vertikalen messen kann, Theodolite genannt. An den Enden C und D der Visirregel Fig. 24. muß ein Nonius §. 18. V. angebracht seyn. Fig. 24.

6) Das Astrolabium, welches nur aus einem in Grade eingetheilten Halbkreis LMNGH Fig. 24. Fig. 24. besteht und gewöhnlich nur eine Visirregel CD mit und 28. bloßen Dioptern enthält, ist außer Gebrauch gekommen. Wie hiermit ein Winkel BOA durch den Bogen HGN gemessen wird, ist von selbst klar.

Anmerkung. Will man mit allen diesen Instrumenten einen Winkel ganz sicher messen, so muß an der untern Fläche des Tisches oder der Gradscheibe eine Visirregel mit Dioptern, oder ein Sehrohr, welches sich in horizontaler und vertikaler Fläche dreht, angebracht seyn, das man nach dem Horizontalstellen des Tisches oder der Scheibe auf einen gewissen Gegenstand richtet; worauf man sodann mit der gewöhnlichen Visirregel über dem Tische nach den umherliegenden Gegenständen A und B visirt,

Die erste Art besteht aus einer horizontalen
Fig. 31. in Grade eingetheilten Kreisscheibe ABCDEF. Fig. 31, worauf Dioptern in D und A oder woran ein Fernrohr zum Visiren befestiget ist und wo im Mittelpunkte M der Scheibe auf einer Spitze eine Magnetnadel IN freyschweben kann, welche alsdann auf gewisse Grade in F oder C hinweißt. Da die Nadel IN ihre Lage oder ihr Ziel nach einer gewissen Himmelsgegend hin nicht ändert, so wird, wenn A nach B oder D nach E hin bewegt wird, der Punkt E des Gradringes nach F hin sich bewegen und demnach die Nadel auf die Grade in E hinzeigen, und es kommt uns dieß vor, als bewege sich die Nadel in den Graden von F nach E hin fort. Offenbar ist der Bogen AB = FE. Geht man in A die Gradeintheilung an und von der Rechten nach der Linken F, E, D, C, &c. weiter fort, und zeigt die Magnetnadel, indem man durch die Dioptern DA nach P visirt, auf die Grade in F, und setzt ferner die Nadel, indem man den Gradring von der Linken nach der Rechten herumdreht, die Dioptern DA in die Lage EB bringt und nach Q visirt, auf die Grade in E; so hat man weiter nichts zu thun, als die Grade in F von den in E zu subtrahiren, wenn man die Grade des Bogens FE oder des Bogens AB und mithin die Grade des Winkels PMQ angeben will. Man sieht hieraus, daß die Größe eines Winkels PMQ nach denselben Grundsätzen beurtheilt wird, welche schon §. 18. III. angeführt worden sind; nur mit dem Unterschiede, daß die Grade des Bogens AB im Bogen FE abgelesen werden, und daß, wenn die Visire von der Linken A zur Rechten B herumbewegt werden, sodann es scheint, als bewege sich die Nadel von der Rechten zur Linken, nämlich von F nach den Graden E hin. Ist daher der Gradring der Bussole von der Rechten zur Linken eingetheilt, so muß man die Grade des Bogens AB von einem Gegenstand A zum andern B von der Linken zur Rechten abzählen, und umgekehrt. Man nennt daher auch diese Art von Bussole eine verkehrtläufige.

Eine andere Art von Bussole ist die rechtläufige, welche ganz die Gestalt eines Theodoliten

(Fig. 5.) hat, und demnach aus einer in Grade eingetheilten horizontalen Scheibe besteht, im Mittelpunkte einen Zapfen hat, um welchen sich die Visirregel mit Diptern oder mit einem Perspektive auf der horizontalen Scheibe herumbewegen läßt, das Perspektiv selbst aber in einem vertikalen Kreise auf und niederwärts beweglich ist; statt daß aber der Theodolite an der untern Fläche der Scheibe eine Sicherheitsröhre hat, so hat man daselbst ein viereckiges sogenanntes Bussolenkästchen ABDC Fig. 32. eingeschoben, das in der Fig. 32.
Mitte G einen spitzigen Stift hat, worauf eine Magnetnadel EF schwebt; und dann wird die Gradscheibe der Bussole so gedreht und gerichtet, daß die Magnetnadel in dem Kästchen, [welches auf der untern Fläche der Scheibe befestiget ist und, um den Theil HCDI vorsteht und sichtbar ist,] mit ihrer Spitze auf einen vorgezogenen feinen Strich in F des Randes CD. einspielt, wo demnach die Seite AC oder BD des Kästchens mit der wahren Richtung EF der Magnetnadel parallel laufen muß.

§. 21. Ist nämlich ABCDE Fig. 33. die Gradscheibe Fig. 33.
und IFGH das darunter eingeschobene Magnetnadelkästchen, welches um den Theil BF hervorragt, so muß man gleich anfangs die Scheibe mit dem Apparate nach Gutdünken so aufstellen, daß IF beynahe nach dem magnetischen Norden hinzielt; findet man aber nachher, wenn die Scheibe ganz horizontal gerichtet worden ist, daß die Nadelspitze noch etwas nach G oder F hin steht, so muß man die Scheibe noch ein wenig rechts oder links herumdrehen, nämlich derselben eine Richtung geben, daß die Nadel genau auf den in I. vorgezogenen Strich einspielt. Dieß Drehen und Verrücken der Scheibe bis die Nadel auf ihren Strich einspielt, heißt man Orientiren, welches dann sehr leicht und genau geschehen kann, wenn die Scheibe unten ein Rad mit Zähnen hat, welche man durch eine angebrachte Schraube um wenig und viel vorrücken kann. Oft ist auch schon eine bloße Chordenschraube hinlänglich, deren Einrichtung nachher beschrieben werden soll.

Fig. 33. Wenn nun ein Winkel MON Fig. 33. durch die beschriebene Bussole gemessen werden soll, so muß man zuvor die Gradscheibe ABCDE mit dem Apparate über dem Scheitel O des Winkels so aufstellen, daß der Mittelpunkt der Scheibe genau vertikal über dem Scheitel des Winkels zu stehen kommt, sodann stellt man die Scheibe horizontal und dreht sie in ihrer horizontalen Fläche so, daß die Nadel KL auf ihren Strich L des Kästchenrandes einspielt, visirt jetzt aus O nach M und nach N, bemerkt sich die Grade in C und D und zieht diese Grade von einander ab, so wird die Differenz die Grade des Bogens CD oder des Winkels MON angeben.

Anmerkung. Wie man auch dann den Winkel MON richtig messen könne, wenn der Mittelpunkt O der Scheibe nicht genau genug über den Scheitel des Winkels zu stehen kömmt, wird zu seiner Zeit gelehrt werden.

8) Wir wollen nun auch zeigen, wie man eine sanfte Umdrehung der Gradscheibe durch eine Chordenschraube bewirken und der Scheibe eine gewisse Lage (nach der Magnetnadel richtig) höchst genau ertheilen kann.

Um dies zu bewirken, muß die obere (horizontale) Scheibe ABCDE Fig. 33. noch auf einer andern (horizontalen) Fläche oder Scheibe liegen, welche letzte am Apparate fest gehalten wird und um deren Zapfen im Mittelpunkte O die obere Scheibe in horizontaler Fläche herum bewegt werden kann. Die obere Scheibe ist mit einem Arme PQ ersehen, der in P einen horizontalen, die Dicke der Scheibe umfassenden Einschnitt hat, welcher Arm von einem Orte des Scheibenumfanges zum andern geschoben, jedoch durch eine vertikale Schraube, welche in der Nähe von P angebracht ist, an einem jeden Orte des Umfangs befestiget und wieder frey gelassen werden kann. Die untergelegte Scheibe hat aber einen festen Arm RS, der sich nicht verrückt, und beyde Arme haben in T und U drehbare vertikale Zapfen, durch welche eine Schraube VW geht, welche Schraube zwar in U keine Gänge hat,

aber weiter nach T hin mit ihren Gängen in die hohlen Schraubengänge des Zapfens T eingreift. Dreht man die Schraube VW rechts oder links herum, so wird der Arm PQ nach dem festen Arme RS beygezogen oder davon weggetrieben und es bewegt sich daher die obere Scheibe ABCDE entweder rechts oder links herum, und man kann daher, nachdem man die Schraube in P geöffnet und die obere Scheibe beynahe richtig nach der Magnetnadel gestellt hat, diese Schraube P wieder befestigen und durch Hilfe der Chordenschraube VW der obern Scheibe eine solche Richtung genau ertheilen, daß die Magnetnadel KL auf den vorgeschriebenen Strich L des Randes FG genau einspielt. Auch hier bedient man sich einer vertikal darüber gehaltenen Loupe, um genau unterscheiden zu können, ob wirklich die Nadelspitze in L einspielt. Fig. 33.

9) Noch haben wir eine besondere Einrichtung des Meßtisches oder eines jeden andern Winkelinstruments zu erwähnen, wodurch man in Stand gesetzt wird, jederzeit den Mittelpunkt oder auch einen jeden andern auf dem Tische vorgezeichneten Punkt vertikal über einen gegebenen Punkt der Erde bringen zu können. Die oberste Platte des Tisches hat nämlich an der untern Fläche eine darauf befestigte Platte ABCD Fig. 34., welche der Länge nach in der Mitte einen Einschnitt EF hat, und diese Platte ist auf eine zweyte GHIK quer gelegt, welche ebenfalls einen Längeneinschnitt LM hat. Durch den Punkt O, der auf beyde Einschnitte paßt, geht eine Schraube, deren Kopf über der Platte ABCD und deren Flügelmutter mit einem Scheibchen unter der Platte GHIK liegt, mittelst welcher man die obere Platte auf die untere befestigen kann. Die untere Platte wird auf den §. 15 beschriebenen Apparat gelegt und auf denselben festgehalten. Oeffnet man die Schraube in O, so kann man die obere Platte ABCD mit dem Tische, während die Schraube O in der Rinne LM läuft, von L nach M und von M nach L horizontal fortbewegen, und wenn endlich O an einer gewissen Stelle der Rinne Fig. 34.

LM steht, so kann man ferner die obere Platte ABCD mit dem Tische nach N und O hin horizontal fortbewegen, indem alsdann der Zapfen O in der Rinne EF fortläuft. Natürlich kann man durch diese beyderley Bewegungen einen auf dem Tische vorgezeichneten Punkt genau vertikal über einen gegebenen Punkt der Erde bringen, wenn man schon vorher den Apparat selbst so ziemlich richtig vertikal über den genannten Erdpunkt gestellt hat.

§. 21.

Berichtigung der Winkelinstrumente.

1) Aufgabe. Die obere Fläche des Meßtisches recht eben zu machen.

Fig. 5. Auflösung. Der Tisch ABDC Fig. 5. selbst ist von einem hölzern Rahm eingefaßt, von einem starken hölzern Kreuze EF, GH durchzogen und die Zwischenräume sind mit kleinen dicken Bälkchen und Tafeln ausgefüllt; übrigens alles durchs Hobeln geebnet und nach dem Richtscheite gehörig zusammengesetzt. Um nun zu untersuchen, ob die obere Fläche des Tisches genau eben ist, lasse man zuvor ein recht gerades Linial abrichten und führe daſſelbe, in AB angelegt, querfort nach CD, und so ferner in AC angelegt, querfort nach BD, und bemerke die zu hoch stehenden Stellen, welche man sogleich mit einer feinen, recht geraden Holzschabe abschabt. Grübchen oder Risse in den Fugen werden mit Eyweiß, Leim, Gypsmehl, Teig ꝛc. ausgefüllt und durchs Streichen und Schaben eben gemacht. Da der Meßtisch oder das Reißbret noch mit einem Bogen Papier, worauf man schreibt und Figuren zeichnet, überzogen wird, so entsteht die Frage, wie man einen solchen Bogen recht eben auflegen könne? Hierzu wähle man solches Zeichnenpapier, das von selbst schon ziemlich eben ist, am Rande wenig oder gar nicht wellenförmig gebogen ist, [ein schmaler, wellenförmiger Rand kann weggeschnitten werden], wähle Papier, das, gegen das Licht

oder Fenster gehalten, an allen Orten gleichstark durchscheint, und keine oder nur wenige dicke Fasern und Knötchen im Innern des Papiers enthält [welche man durch ein Federmesser heraushebt], lege einen solchen Papierbogen (die glatte Seite desselben unten hin) aufs Reißbret und breite ihn gehörig aus, feuchte oder nasse ihn mit einem reinen (gleichfeuchten oder nassen) Tuche oder Waschschwamme überall gleichstark an, und lege ihn umgewandt (so daß die glatte Fläche des Papiers jetzt oben ist) auf den Meßtisch, wo er befestigt werden soll, und verhüte beim Auflegen, daß keine Luft unter dem Papier sich verfange, Wellen entstehen, oder ein Theil mehr als der andere ausgedehnt werde. Wenn nun ABDC, Fig. 5., der aufgelegte Bogen ist, so wird auf diesen Bogen nahe am Rande AB ein Linial aufgepreßt, der Papierrand aufwärts gebogen, Schreiner- oder Mundleim oder Kleister darzwischen gestrichen und dieser Rand, indem man das Linial wegnimmt und ein trocknes Papier darauflegt, gehörig niedergedrückt, geebnet und angeleimt, wo man anfangs von innen nach außen, zuletzt aber droben von A nach B hin streicht oder reibt. Auf dieselbe Art befestiget man auch den Rand CD und nachher auch die übrigen beiden Ränder AC und BD, bey welcher Arbeit man aber immer Achtung geben muß, ob nicht etwa eine Stelle des Papiers zu bald trocken wird, welche man wieder mit einem Schwamme zu bestreichen hat, bis alle vier Ränder befestiget sind. Fig. 5.

Zeichnet man, nachdem ein solcher aufgespannter Bogen ganz trocken geworden ist, Figuren darauf, und schneidet man ihn nachher vom Brete nahe am aufgeklebten Rande ab, so zieht sich alsdann der Bogen etwas enger zusammen und die Zeichnung wird kleiner, welches bei geometrischen Arbeiten nicht seyn darf. Um dieß zu verhindern, tränkt man die Bögen beym Feuchtmachen und Ausspannen mit geschlagenem Eyweißschaume, läßt sie gehörig trocken werden, schneidet sie nachher ab, und wenn sie einige Tage ruhig gelegen haben, spannt man sie, ohne sie naß zu ma-

chen, wieder auf und zeichnet jetzt erst darauf. Will man genau untersuchen, ob und wie viel sich ein Bogen ausdehnt oder zusammenzieht, so trägt man während des Zeichnens eine Linie von einer gewissen Länge nach der Länge und Breite des Bogens auf, und wenn nachher der Bogen einige Zeit abgeschnitten ist, so mißt man die aufgetragene Linie wieder nach. Hält die aufgetragene Linie anfangs a, nachher aber nur b Theile, so steht die gebliebene Fläche B gegen die anfangs aufgetragene A im Verhältnisse, b^2 zu a^2, nämlich es ist $A = B \times \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Denn es sey die Fläche des Papiers anfangs a Theile — und nachher b Theile lang und und breit, so ist, (weil, nach §. 79 des ersten Bandes, die Fläche A oder B gefunden wird, wenn man Länge und Breite mit einander multiplicirt) $A = a \times a$ und $B = b \times b$, daher auch $1 = \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$, oder $A : a^2 = B : b^2$, oder $A : B = a^2 : b^2$, woher $A = B \times \frac{a^2}{b^2}$.

2. Aufgabe. Zu untersuchen, ob das Fernrohr und der Gradbogen des Visirinstrumentes genau in einer vertikalen Fläche sich bewege, wenn die untere Regel desselben horizontal steht.

Auflösung. In der Nähe eines hohen Gebäudes (Thurms) richte man den Meßtisch oder die Scheide, worauf das Visirinstrument steht oder gestellt wird, genau horizontal und setze auf den Erdboden ein dunkles Gefäß, mit Wasser gefüllt, dergestalt vor sich hin, daß man vom Instrumente aus im ruhigen Wasserspiegel die Thurmspitze oder sonst einen hohen Gegenstand erblickt; jetzt visire man mit dem Perspektive des Instruments in die Höhe nach der Thurmspitze und, indem man die Regel unverrückt stehen läßt, auch in die Tiefe nach dem Bilde der Thurmspitze im Wasserspiegel, und wenn man alsdann findet, daß die Thurmspitze sowohl beym Aufwärts- als Niederwärts-Visiren im Fadenkreuze des Perspektivs stehen bleibt, so bedarf das Instrument gar keiner

Berichtigung; sollte aber beym Niederwärtsvisiren das Bild vom Fadenkreuze weichen, so muß man links oder rechts, zwischen der Regel und dem Fuße des Visirinstruments, eine dünne Metallplatte legen und diese so weit vor- oder zurückschieben, bis das Instrument berichtiget ist. Man kann jedoch auch die linke oder rechte Seite des Fußes etwas wegfeilen lassen. Wo und wie viel untergelegt oder weggenommen werden muß, findet man sogleich, wenn man ein spitziges Messer, oder einen Meißel von der rechten oder linken Seite her unter die Regel schiebt, die bemerkte Abweichung halbirt, und dadurch die Thurmspitze endlich ganz ins Fadenkreuz bringt, man mag in die Höhe, oder in Wasserspiegel visiren.

3. Aufgabe. Zu untersuchen, ob der Zeiger des vertikalen Gradbogens auf 0 deutet, wenn das Fernrohr des Visirinstrumentes horizontal steht.

Auflösung. Man stelle eine ebene Latte oder Platte, welche scharfe Kanten hat, genau horizontal und bemerke, indem man über die scharfen Kanten derselben wegvisirt, auf welchen entfernten Gegenstand die Ebene der Latte hinzielt; stelle das Visirinstrument auf die horizontal gerichtete Latte und richte das Fernrohr auf denselben entfernten Gegenstand, rücke jedoch das Zeichen an diesem um etwa einen Fuß höher, als um wie viel die Axe des Fernrohrs über der Latte steht. Zeigt nun der Zeiger des Gradbogens in dieser Lage des Fernrohrs auf 0, so bedarf das Visirinstrument weiter keiner Berichtigung, so dieß aber nicht der Fall ist, so muß der vordere oder hintere Fuß des Visirinstrumentes eine solche gemessene Unterlage erhalten, daß das Instrument wirklich die begehrte Probe hält. Natürlich ist das Instrument schon vom Verfertiger so zugerichtet worden, daß es schon im Voraus beynahe richtig geht, und man braucht daher nur wenig unterzulegen oder wegzufeilen. Will man keine Unterlage machen, so muß man einmal für allemal die Grade bemerken, welche man bey einem jedesmaligen Visiren zu addiren oder zu subtrahiren hat. Muß man beym bergan Visiren addiren, so muß

man beym bergab Visiren subtrahiren, und umgekehrt. —

Genauere Berichtigungsmethoden werden erst dann klar werden, wenn wir die Lehre vom Nivelliren gründlich abgehandelt haben.

4) Aufgabe. Zu untersuchen, ob Regel und Fernrohr des Visirinstrumentes nach einerley Gegenstand hinzielen.

Auflösung. Man stelle das Visirinstrument auf eine horizontale Platte, bringe zwey vertikale Fäden genau ins Ziel der Regel und lasse einen entfernten Stab in dieß Ziel aussetzen. Jetzt bemerke man auf der horizontalen Platte die Lage der Regel und visire alsdann mit dem Fernrohre auf den ausgesetzten Stab, so wird man sogleich gewahr werden, ob die Regel vorrückt und wie weit sie herum gedrehk werden muß, wenn man den Stab im Fadenkreuze des Fernrohrs erblicken will. Die Grade dieser Abweichung kann man zwar in dem Falle untersuchen und merken wenn die Mittagslinie auf einen gefertigten Riß gezogen werden soll, *) um aber einen richtigen Winkel zu beobachten und einen Riß selbst zu fertigen, hat man nicht nöthig, sich um die jetzt besagte Abweichung zu
Fig. 35. bekümmern. Denn es sey AO Fig. 35. die Lage des Perspektivs und BO die Lage der Regel und mithin der Winkel AOB die Abweichung, so wird, wenn das Fernrohr AO die Lage CO annimmt, die Regel BO die Lage DO annehmem, und weil der ∠ AOB = dem ∠ COD ist, so wird auch der Winkel AOC = dem ∠ BOD seyn. Fernrohr und Regel, welche einen festen Winkel AOB = COD in der horizontalen Fläche einschließen, beschreiben demnach gleiche Bogen AC und BD oder gleiche Winkel AOC und BOD.

5) Auf-

*) Das Ziehen der Mittagslinie und das Beobachten der Abweichung der Magnetnadel kann jetzt noch nicht gezeigt werden. Wir kommen darauf zurück.

5. Aufgabe. Zu untersuchen, ob der Zapfen, woran sich die Regel im horizontalen Gradringe des Theodoliten dreht, und ob die Spitze, worauf die Magnetnadel der Bussole schwebt, genau im Mittelpunkte des Gradringes sich befindet.

Auflösung. Auch hier wird vorausgesetzt, daß der Mechanikus, der das Instrument gefertiget hat, den genannten Zapfen oder die Spitze schon ziemlich genau in den Mittelpunkt gebracht habe. Ist dieß vollkommen, genau der Fall, so wird der Nonius an einem Ende der Regel auf dem Punkte so viele Grade, Minuten und Sekunden anzeigen, als der Nonius am andern Ende, wenn nämlich zu diesen letzten Graden die Zahl 180° addirt oder davon subtrahirt wird. Eben so wird auch eine gut abgerichtete Magnetnadel mit ihren beyden spitzigen Enden gleichviele Minuten anzeigen. Man mag das Instrument oder die Regel in horizontaler Fläche herumdrehen, wie man will, so muß der Nonius oder die Nadel an allen Orten des Gradkreises die genannte Probe halten, wo nicht, so ist auch der Zapfen nicht im Mittelpunkte (nicht concentrisch) und man wird von den beyden Enden der Regel oder der Nadel verschiedene Resultate angezeigt finden. Um jedoch ein ziemlich richtiges Resultat zu erhalten, sucht man die halbe Differenz derselben und addirt diese zum kleinern Resultate oder subtrahirt sie vom größern.

Anmerkung. Eine Hauptsache ist, daß die Grade selbst genau gleichgroß aufgetragen sind, welches man durch den Nonius selbst oder auch einen feinen Zirkel (womit man etwa 7 Grade faßt) sogleich entdecken kann. Grobe Fehler erkennt man schon mit dem bloßen Auge. Ist die Gradeintheilung nicht genau, so taugt das ganze Instrument nichts.

Viertes Kapitel.

Vergleichung der Winkel in einfachen Figuren.

§. 22.

Erklärung der geradlinigen Figuren.

Fig. 36. I. Zwey gerade Linien in einer Ebene neben einander gelegt, laufen entweder zu einander parallel und durchschneiden sich daher durch keine Verlängerung, oder sie liegen schief gegen einander, in welchem Falle sie sich (wenn sie nach der Gegend hin, wo sie enger zusammen treten, hinlänglich verlängert werden) durchschneiden und einen Winkel bilden, der nach vorigem Kapitel gemessen werden kann. Da parallellinien so angesehen werden können, als wenn sie in einer unendlichen Entfernung endlich doch zusammen kommen, der Winkel aber in dieser unendlichen Entfernung unendlich klein ist, so können wir auch sagen, der Winkel, welchen zwey parallel zu einander liegende Linien machen, ist = o.

II. Wenn schon bereits zwey Linien einen Winkel in einer Ebene machen und hierzu noch eine dritte Linie gezogen wird, welche zu keiner der ersten parallel läuft, so entsteht ein Dreyeck. Ein Dreyeck ABC Fig. 36. ist demnach eine solche Fläche, welche von drey geraden Seiten begrenzt wird und demnach auch drey Ecken enthält, und man erkennt daher an einem jeden Dreyecke sechs Stücke, nämlich drey Seiten und drey Winkel.

Die Dreyecke werden wieder eingetheilt

A) in Ansehung der Ecken oder Winkel:

in rechtwinklige, in stumpf- und spitzwinklige, und

B) in Ansehung der Seiten:

in gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige.

1) Ein rechtwinkliges Dreyeck ABC. Fig. 36. ist ein solches, worin ein rechter Winkel ABC zu finden ist. Die beyden Seiten BA und BC, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Catheten, und die dritte Seite AC, welche dem rechten Winkel gegenüber steht heißt Hypothenuse. Fig. 36.

2) Ein stumpfwinkliges Dreyeck ACD Fig. 3. ist ein solches, worin ein stumpfer Winkel DCA gefunden wird und Fig. 3.

3) ein spitzwinkliges △ ACB Fig. 3. ein solches, worin weder ein rechter noch ein stumpfer Winkel zu finden ist.

Beyde Dreyecke, das spitz- und stumpfwinklige, heißen auch schiefwinklige.

4) Ein gleichseitiges oder regelmäßiges Dreyeck ACB Fig. 3. ist ein solches, worin alle drey Seiten AC; CB und BA einander gleich, oder worin alle drey Winkel in A, B und C einander gleich sind. Ein gleichseitiges Dreyeck ist allemal auch schiefwinklig, aber ein schiefwinkliges selten gleichseitig.

5) Ein gleichschenkliges Dreyeck ABC Fig. 37. ist ein solches, worin nur zwey Seiten CA und CB einander gleich sind und Fig. 37.

6) ein ungleichseitiges — ein solches ABC Fig. 36., worin alle drey Seiten AB; BC; CA eine ungleiche Länge haben. Fig. 36.

III. Ein geradliniges Viereck wird von vier Seiten eingeschlossen und enthält demnach auch vier Winkel.

1) Sind in einem Vierecke ABDC Fig. 5. alle vier Seiten CA; AB; BD und DC einander gleich und darin alle vier Winkel A; B; D und C recht, so ist das Viereck regelmäßig und heißt Quadrat. Fig. 5.

2) Sind in einem Vierecke ABEF Fig. 38. je zwey gegenüber stehende Seiten AB und FE; AF und BE gleich oder parallel und daher auch je zwey gegenüberstehende Winkel in A und E, und in F und B, nämlich ∠ AFE und ∠ ABE einander gleich, so Fig. 38.

heißt das Viereck Parallelogramm. Man theilt die Parallelogramme in Rechtecke und Rauten ein.

Fig. 38. a) Ein Rechteck ABCD Fig. 38. ist ein solches Parallelogramm, worin die vier Winkel recht sind. Und ein Quadrat ist ein solches Rechteck, dessen Länge und Breite gleich ist.

b) Eine Raute ABEF enthält zwar auch je zwey gegenüber stehende parallele Seiten, die Winkel sind aber schief. Man unterscheidet hier noch die gleichseitige oder eigentliche Raute und die längliche. In der gleichseitigen Raute sind alle vier Seiten einander gleich.

Fig. 39. 3) Sind in einem Vierecke ABCD Fig. 39. nur zwey gegenüber stehende Seiten AB und DC zu einander parallel, die andern beyden Seiten BC und AD aber nicht, so heißt ein solches Viereck Trapez.

Fig. 40. und 41. 4) Ein Trapezoid ABCD (Siehe Fig. 40. und 41.) ist ein solches Viereck, worin man keine parallele Seiten bedingt oder bemerkt. Zieht man eine Linie AC von einer Ecke A in die gegenüber stehende C, oder von B nach D, so heißt diese Linie Diagonale.

IV. Ein Vieleck enthält fünf und mehre Seiten und Winkel und heißt regelmäßig, wenn alle Seiten und Winkel einander gleich sind, oder wenn man eine solche Linie mitten durchziehen kann, welche die ganze Figur in zwey solche Theile theilt, die in allen Stücken einander gleich sind. Uebrigens unterscheidet man hier auch Fünf-, Sechs- und Mehr-Ecke, je nachdem die Figur fünf, sechs und mehr Seiten oder Ecken enthält. Regelmäßige Vielecke können durch Hilfe des Kreises hingelegt werden, wie in der Folge gelehrt werden wird.

§. 23.

Vom Nebenwinkel, Scheitel- und Ergänzungswinkel.

Fig. 3. 1) Wenn Fig. 3. der Bogen LM $= \alpha$ (z. B. $= 42^\circ$) hat, so wird der Ueberrest MIKL des Kreises $360 - \alpha = 360 - 42 = 318$ Grade haben.

Denn wenn man den Bogen LM = α vom ganzen Kreise LMIKL = 360° abzieht, bleibt der Bogen MIKL = 360 — α übrig. Fig. 3.

Eben so ist auch der Bogen LMIK = LMIKL — KL = 360° — KL.

2) Eine gerade Linie DCB macht einen Winkel von 180 Graden, wenn man sich dieselbe aus zwey Schenkeln DC und CB zusammengesetzt vorstellt, wo freylich beyde Schenkel in der Richtung DB liegen.

Dieß folgt aus §. 17. Nr. 7.

3) Die Summe der beyden Winkel DCA und ACB, welche eine gerade Linie DCB ausmachen, ist = ∠ DCB = 180°. Eben so ist auch die Summe ∠ ACB + ∠ BCE = ∠ ACE = 180°.

Die beyden Winkel ECD und DCA, welche eine gerade Linie oder 180° ausmachen, heißen **Nebenwinkel** (anguli contigui). Ist einer von diesen Nebenwinkeln bekannt, so weiß man auch, wie groß der andere Nebenwinkel ist.

Denn wenn ∠ ECD + ∠ DCA = 180°, so ist auch ∠ DCA = 180° — ∠ ECD und ∠ ECD = 180° — ∠ DCA, weil ein Glied, das von einer Seite der Gleichung auf die andere gebracht wird, ein verkehrtes Zeichen annimmt.

Es sey z. B. ∠ ECD = 60°, so ist ∠ DCA = 180 — 60 = 120°. Es sey ferner

∠ ECA = 180° 0′ 0″

∠ ECD = 62° 13′ 38″, so ist

∠ DCA = 117° 46′ 22″.

4) Winkel, welche kreuzweise gegenüber stehen, und welche man **Scheitelwinkel** (anguli verticales) heißt, sind einander gleich. Nämlich es ist ∠ DCE = ∠ ACB und ∠ ACD = ∠ BCE.

Dieß folgt schon aus §. 16. Nr. 4. Denn wenn aus C alle Radien CL; CM; CI und CK einander gleich gemacht werden und der Durchmesser IL sich um den Punkt C in einer Ebene herumdreht und CL die Lage CM angenommen hat, so wird, weil IL und KM gerade Linien sind, CI in CK zu liegen kommen, der Punkt L den

Fig. 3. Bogen LM und der Punkt I einen eben so gro-
ßen Bogen IK beschrieben haben, woher auch $\angle$
LCM $=$ $\angle$ ICK.

Man kann dieß aber auch auf folgende Art beweisen.

Es ist $\angle$ ICK $+$ $\angle$ KCL $=$ 180° und auch
$\angle$ KCL $+$ $\angle$ LCM $=$ 180°.

Subtrahirt man nun hier eine Gleichung von der andern, so hebt sich $\angle$ KCL und man erhält
$\angle$ ICK $-$ $\angle$ LCM $=$ 0, woher
$\angle$ ICK $=$ $\angle$ LCM.

Ist nun $\angle$ DCE $=$ $\angle$ ACB, so sind nach Nr. 3. auch ihre Nebenwinkel DCA und BCE einander gleich.

Fig. 4. 5) Zwey Winkel BCP und PCD Fig. 4., welche zusammen einen rechten Winkel BCD auswachen, heißen Ergänzungswinkel (anguli complementes). Nämlich ein Winkel ist die Ergänzung (das Complement) des andern zu 90 Graden.

Ist der eine Winkel PCB $=$ α (z. B. $=$ 43°) bekannt, so ist auch der zugehörige Ergänzungswinkel DCP $=$ 90 $-$ α, hier $=$ 90 $-$ 43 $=$ 47° bekannt. Eben so ist auch $\angle$ PCB $=$ 90 $-$ $\angle$ DCP.

§. 24.

Vom Sinus und Cosinus der Winkel.

Fig. 42. Zuvor wird erinnert, daß Fig. 42, die Bögen AB; ABC; ABCD ꝛc. durch griechische und die zugehörigen geraden Linien CP; CN ꝛc. durch lateinische Buchstaben ausgedrückt werden, der Radius AP; CP; EP ꝛc. in der Regel durch r bezeichnet wird, und da viele Leser die griechischen Buchstaben nicht recht kennen mögen, so wird es nicht unrathsam seyn, das griechische Alphabet mit der Aussprache der Buchstaben hieher zu setzen.

α alpha	ι jota	ϱ ro	Fig. 42.
β beta	κ kappa	σ sigma	
γ gamma	λ lamda	τ tau	
δ delta	μ mi	υ ypsilon	
ε epsilon	ν ni	φ phi	
ζ zeta	ξ xi	χ chi	
η eta	o omikron	ψ psi	
ϑ theta	π pi	ω omega.	

Hier soll weder von den Griechen noch von den Lateinern eine eigene mathematische Kunst entlehnt werden, sondern es soll diese Beziehung bloß dazu dienen, auf eine leichte Art Bögen und Winkel von geraden Linien zu unterscheiden.

Jetzt schreiten wir nun zur Erklärung der Sinus, Tangenten und Sekanten und ihre Gesetze.

I. Wenn aus dem Anfangspunkte A eines Kreisbogens ABC ein Radius AP oder Durchmesser AH und aus dem Endpunkte C des Bogens eine Senkrechte CN auf den Radius oder Durchmesser gezogen wird, so nennt man diese Senkrechte CN Sinus des Bogens ABC. Zieht man aus dem Scheitel P eines Winkels APC mit einem beliebigen Radius (Gleichmesser) PA = PC einen Bogen ABC von einem Schenkel zum andern und fällt alsdann aus dem Endpunkte C des Bogens eine Senkrechte CN auf den andern Schenkel PA, so erhält man ebenfalls einen Sinus CN zum Winkel APC oder zum Bogen ABC.

Eben so ist auch BM ein Sinus des Bogens AB; DO ein Sinus des Bogens ABCD; EP ein Sinus des Bogens ACE; FQ ein Sinus von ABCDEF; GR ein Sinus von ACEG, und man sieht vor Augen, daß die Sinus von o bis 90 Graden (nämlich im Viertelkreise) steigen, aber von 90 bis 180 Graden (nämlich im zweyten Viertelkreise EFGH) fallen.

Ist der Bogen AB = o, so ist auch der zugehörige Sinus BM = o; hat aber der Bogen ABCDE neunzig Grade, so ist der Sinus EP = dem Gleichmesser r; die vorhergehenden und folgenden Sinus sind aber kleiner als der Gleichmesser PE, und da

Fig. 42. die folgenden immer kleiner, nämlich = FQ; = GR ꝛc. werden, so wird endlich der Sinus von 180°, oder der Sinus vom Halbkreise ABCDEFGH gar = 0 seyn.

Setzt man den Bogen ABC oder den Winkel APC = α und den zugehörigen Sinus CN = χ, so pflegt man den Sinus dieses Bogens oder Winkels kurz durch die Form anzudeuten: sin (Bogen ABC) oder sin ∠ APC oder bloß sin α = CN = χ. Wenn daher die Gleichung sin ∠ APC = CN oder sin α = χ angeführt ist, so will dieß weiter nichts sagen, als daß der Sinus des Winkels APC oder Bogens (ABC) = CN und daß der Sinus vom α = χ sey.

Nach dieser Bezeichnung ist nun der Sinus des Bogens ABCD nämlich sin (ABCD) = DO; sin 0° = 0; sin (ABCDE) = EP, nämlich sin 90° = r und sin (Halbkreis ACEGH) oder sin 180° = 0.

Man sieht ein, daß es willkührlich ist, wohin man den Anfangspunkt eines Bogens setzt, und willkührlich ist, ob man den Kreis links oder rechts herumführt. Es ist daher auch vom Bogen HG der Sinus = GR; vom Bogen HGFED der Sinus = DO; vom Bogen ED der Sinus = DU, von EF = FU und vom Bogen HI der Sinus = RI. Hat man aber einmal einen Bogen rechts herum gezogen, so ist ein links herum gezogener, Bogen negativ.

Werden die Bögen ABCDEFGHI; K; L größer als ein Halbkreis, so stehen die zugehörigen Sinus IR; KP; LN hinaufwärts, statt daß die vorigen Sinus BM; CN; DO; FQ ꝛc. herunterwärts nach AH hin zustanden; es haben daher die Sinus der Bögen, welche über 180° gehen, eine verkehrte Richtung gegen die vorigen und sind deshalb negativ (vermöge des ersten Bandes §. 13.). Vom Halbkreise ACEGH ist, wie gesagt, der Sinus = 0; vom ¾ Kreise ACEGHIK oder von 3. 90 = 270° ist zwar der Sinus KP auch = r, er muß aber negativ, nämlich sin 270° = − r gesetzt werden, und von einem Vollkreise ACEGHIKLA ist der Sinus wieder = 0.

Nunmehr können wir folgende Wahrheiten anführen Fig. 42.

1) Die Sinuse von 0 bis 90 Graden sind dergestalt von einander verschieden, daß zu jedem besondern Bogen auch ein ganz eigener Sinus gehört.

2) Im Bogen ABCDE von 0 bis 90° gibt es Sinuse von allerley Größe BM; CN, DO; EP, dergestalt, daß man darin die Größe eines jeden andern Sinus FQ; GR; IR; KP; LN, findet, der zu irgend einem andern Bogen gezogen wird.

3) Die kleinsten Sinuse sind die von 0°; von 180 und von 360 Graden, indem sin 0 = 0; sin 180° = 0 und sin 360° = 0, wo der Sinus von 360° und Sinus von 0° als einerley angesehen wird, weil der letzte Eintheilungspunkt 360 des Vollkreises wieder in Anfangspunkt 0 fällt; dagegen ist sin 90° am größten und = + r und sin 270° ebenfalls am größten aber = − r.

4) Wenn der Bogen ABCDEF = α gesetzt wird, so ist der Bogen HGF = 180 − α. Da nun der Sinus (von diesen beyden Bögen) = FG ist, so wird auch sin α = sin (180 − α) seyn. Eben so ist auch sin (180 − β) = sin β, und es haben daher zwey zu einander gehörige Nebenwinkel APC und HPC einen gleichen Sinus CN, und es gehören daher zu einem und demselben Sinus zwey Bogen ABC und HGFEDC.

5) Sind die Halbmesser PA Fig. 42. und OG Figur. 43. zweyer Kreise gleich und sind die Bögen ABC Fig. 42. und GHW Fig. 43. in beyden Kreisen gleich, so sind auch die zugehörigen Sinus CN Fig. 42. und WX Fig. 43. einander gleich. Und sind die Sinus CN Fig. 42. und WX Fig. 43. zweyer Kreise von gleichem Halbmesser gleich, so sind die zugehörigen zwei Bögen ABC und HGFEDC des einen Sinus in Fig. 42. gleich den zwey Bögen GFW und ABCDEW des andern Sinus in Fig. 43. Fig. 42. und 43.

Diese beyden Sätze sind in der Folge wohl zu merken.

Fig. 42. 6) Es sey Fig. 42. der Bogen ABCDEFHI $= \alpha$, so ist der Bogen HI $= \alpha - 180$. Nun ist der Sinus des ersten Bogens $=$ IR und eben so groß als der Sinus des letzten Bogens; da aber die Sinus von 180 bis 360° wegen ihrer verkehrten Richtung negativ sind, so wird auch $\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180)$ oder $\sin(\alpha - 180) = -\sin \alpha$ seyn.

Eben so ist der Sinus LN des Bogens ABCD EFGHIKL von $\beta°$ eben so groß, als der Sinus LN des Bogens AL von $360° - \beta$, und da dieser Sinus ebenfalls negativ angenommen werden muß, so wird auch $\sin \beta = -\sin(360 - \beta)$ oder $\sin(360 - \beta) = -\sin \beta$ seyn.

Es gehören daher zu einem negativen Sinus IR oder LN ebenfalls auch zwey positive Bögen ABCD EFGHI und ABCDEFGHIKL, oder auch zwey negative Bögen AL und ALKI; je nachdem man im Bogen rechts oder links herumgeht.

II. Wenn, wir vorher, zu dem Anfangspunkte A Fig. 42. eines Bogens ABC $= \alpha$ ein Halb- oder Gleichmesser AP gezogen und aus dem Endpunkte G des Bogens ein Sinus CN $= \sin \alpha$ senkrecht auf dem Gleichmesser AP gefällt und dadurch der Halbmesser PA in zwey Theile PN und AN getheilt wird, so heißt man den ersten Theil PN den Cosinus und den andern Theil AN den Sinusversus des Bogens ABC. Es ist daher der Cosinus PN eines Bogens α der senkrechte Abstand seines Sinus CN vom Mittelpunkte P des Kreises, und so wie wir CN kurz durch $\sin \alpha$ bezeichnet haben, so bezeichnen wir nun auch den Cosinus NP kurz durch $\cos \alpha$, wenn nämlich ABC $= \alpha$ ist.

Beschreiben wir aus dem Scheitel P eines Winkels APC $= \alpha°$ mit dem Gleichmesser PC $=$ PA $= r$ einen Kreisbogen ABC von einem Schenkel zum andern, oder machen wir bloß PC $= r$ und ziehen alsdann die Senkrechte CN auf AP, so wird NP der Cosinus des Winkels APC seyn.

Wird mit PA ein Viertelkreis ABCDE und zu E der Geichmesser PE gezogen, oder wird im Scheitel P auf AP eine Senkrechte PE errichtet, so ist

CDE der Ergänzungsbogen von ABC, oder CPE der Fig. 42.
Ergänzungswinkel zu APC, nämlich ∠ CPE = 90° − ∠ APC und ∠ APC = 90° − ∠ CPE. Setzt man nun, wie vorher, den Bogen ABC oder Winkel APC = α und fällt man aus dem Punkte C eine Senkrechte CT auf den Gleichmesser PE des Ergänzungswinkels, so ist zwar CT ein Sinus des Winkels CPE oder Bogens EDC, es ist aber auch CT zugleich auch der Cosinus des Winkels APC, weil CN ∥ zu EP und demnach CT = NP ist. Da CT = NP, so ist auch PN eben so gut wie TC der Sinus vom Bogen EDC. Da auch PT = NC ist, so wird auch NC eben so gut wie PT der Cosinus des Bogens EDC seyn.

Wenn der Cosinus NP des Bogens ABC der Abstand NP des Sinus CN vom Mittel- oder Scheitelpunkte P ist, so wird auch der Cosinus des Bogens AB der Abstand MP des Punktes M von P seyn, wo MB ein zum Bogen AB gezogener Sinus ist. Wäre Bogen AB = o, so würde der zugehörige Cosinus = AP seyn weshalb cos o° = r. Eben so ist der Cosinus (des Bogens ABCD) = OP; der Cosinus (des Bogens ABCDE) = o, weil sein Sinus EP in den Punkt P selbst fällt und daher sein Abstand = o ist; ferner ist der Cosinus des Bogens ABCDEF = PQ und des Bogens ABCDEFG = PR und des Halbkreises ABCDEFGH = PH. Da aber die jetzigen Cosinus PQ; PR; PH von der Linken zur Rechten, die ersten Cosinus PA; PM; PN; PO aber von der Rechten zur Linken abgemessen wurden, so werden die Cosinus PQ, PR ꝛc. negativ gesetzt werden müssen.

Nunmehr können wir folgende Wahrheiten einsehen:

1) Der Cosinus PA ist am größten und = r wenn der zugehörige Bogen = o ist; die Cosinus PM, PN; PO werden immer kleiner, je größer die zugehörigen Bögen AB; ABC und ABCD werden, und wen der Bogen ABCDE = 90° wird, so verschwindet ganz der Cosinus, daher cos 90° = o.

Fig. 42. 2) Die folgenden Cosinus PQ; PR; PH sind zwar anfangs klein und werden immer größer, haben aber eine verkehrte Richtung gegen die vorigen und sind deshalb negativ. Der Cosinus PH des Halbkreises ABCDEFGH ist dem Radius PA = r selbst gleich, nur hat PH eine verkehrte Richtung, weshalb cos 180° = — r.

3) Zum Bogen HGF gehört der Cosinus PQ und zum Bogen ABCDEF gehört der Cosinus — PQ, daher Cosinus des Bogens ABCDEF = — Cosinus des Bogens HGF. Wird der Bogen ABCDEF = α, gesetzt, so ist der Bogen HGF = 180 — α, daher cos α = — cos (180 — α) oder + (cos 180 — α) = — cos α. Es haben daher zwey Nebenwinkel APF und HPF zwar einen gleichlangen Cosinus, es muß aber der Cosinus des stumpfen Winkels negativ gesetzt werden.

Aus diesem folgt zugleich, daß, wenn der Cosinus PQ positiv ist, hierzu der Bogen HGF = β gehört; ist aber der Cosinus PQ negativ, so gehört hierzu der Bogen BCDEF = 180 — β.

4) Wenn die Cosinus vom Halbkreise den größten negativen Werth erlangt haben, so nehmen nachher die Cosinus PR der folgenden Bögen ABCDEFGHI wieder ab und werden bey einem $\frac{3}{4}$ Kreise ABCDEF GHIK wieder = 0, daher cos 270° = 0. Dagegen werden die Cosinus PN von Bögen ABCDEFGH IKL, welche größer als 270° sind, wieder positiv und von 360° = r.

Nun gehört

5) zum Bogen HI der Cosinus PR und zum Bogen ABCDEFGHI = α der Cosinus = — PR; da aber HI = α — 180, so ist auch cos α = — cos (α — 180).

Endlich sey ABCDEFGHIKL = β, so ist AL = (360 — β). Da nnn diese Bögen einen gleichen positiven Cosinus PN haben, so ist auch cos β = cos (360 — β).

6) Folgende beyde Sätze sind wohl zu merken.

a) Sind die Gleichmesser PA und PC, ferner PH und PG in zwey Winkeln APC und HPG einander gleich und sind auch diese Winkel oder die zwischenfallenden Bögen AC und HG einander gleich, so sind nicht nur die beyden Winkeln zukommenden Sinus CN; FP und GR, sondern auch die gehörigen Cosinus PN und PR einander gleich. Und sind umgekehrt. Fig. 42.

b) Die Gleichmesser und Cosinus PN und PR zu zwey Winkeln ABC und HPG einander gleich, so sind auch diese Winkel und die zugehörigen Bögen AC und HG einander gleich.

III. Folgende Gleichungen zwischen Sinus und Cosinus und zwischen Sinusversus und Cosinusversus müssen wir noch aufstellen.

1) Da der Cosinus PN des Bogens ABC $= \alpha$ zugleich ein Sinus FC des Bogens EDC $= 90 - \alpha$ ist, so wird man auch $\cos \alpha = \sin (90 - \alpha)$ setzen können.

2) Eben so ist auch CN $=$ PT und mithin der Sinus CN des Bogens ABC $= \alpha$ eben so groß, als der Cosinus PT des Bogens EDC $= 90 - \alpha$, woher $\sin \alpha = \cos (90 - \alpha)$. So z. B. ist der Sinus FQ von 120° eben so groß als der Cosinus UP vom Bogen EF $= 120 - 90 = 30^\circ$.

3) Da FQ $=$ UP und FQ ein Sinus des Bogens ABCDEF $= \alpha$ und UP zugleich auch ein Cosius des Bogens EF $= \alpha - 90$, so wird auch $\sin \alpha = \cos (\alpha - 90)$ seyn.

4) Da PQ $=$ UF und, wenn ABCDEF $= \alpha$ gesetzt wird, $\cos \alpha = -$ PQ und EF $= (\alpha - 90)$ und $\sin (\alpha - 90) =$ UF ist, so wird auch $\cos \alpha = -\sin (\alpha - 90)$ seyn.

5) Wenn Bogen ABC $= \alpha$ ist, so wird PN $= \cos \alpha$ und der Sinusversus AN $=$ PA $-$ PN nämlich $\text{sinvers } \alpha = r - \cos \alpha$ seyn.

6) Heißt man das Stück TE, was der Cosinus CT des Bogens ABC abschneidet, Cosinusversus, setzt man nämlich ABC $= \alpha$ und TE $= \text{cosvers } \alpha$, so ist weil TE $=$ PE $-$ CT ist, auch $\text{cosvers } \alpha = r - \sin \alpha$.

§. 25.

Von Tangenten und Sekanten der Winkel.

Fig. 43. Eine gerade Linie PQ Fig. 43. welche eine krumme Linie oder einen bloßen Kreisbogen MAB nur in einem Punkte A berührt, aber daselbst nicht durchschneidet, heißt Tangente. Der Berührungspunkt A ist der Anfangspunkt der Tangente und sie hat einen positiven und negativen Arm AP und AQ, und jenachdem ein Bogen AB; ABC ꝛc. klein oder groß ist, unter oder über 90 Grade hat; jenachdem werden auch kurze oder lange, positive oder negative Stücke AN; AP ꝛc. von der Tangente gerechnet. Ist nämlich ein Bogen AB $=\alpha$ vorgelegt, so verlängert man zuvor den Geichmesser OB, (der in Endpunkt B des Bogens geht) bis zu einem Punkte N der Tangente, nennt diese gezogene Linie ON Sekante und dann ist AN die Tangente des Bogens AB. Kurz bezeichnet man, wenn der Bogen AB $=\alpha$ gesetzt wird, die zugehörige Sekante ON durch sec α und die Tangente AN durch tang α.

Nunmehr sieht man folgende Wahrheiten ein:

1) Ist der Bogen AB $=0$; so ist die Sekante $=$ OA und die Tangente $=$ Null; daher sec $0^\circ = r$ und tang $0^\circ = 0$.

2) Werden die Bögen ABC und ABCD schon ziemlich groß und nähern sie sich an 90° so nehmen die Tangenten AP; ꝛc. und Sekanten OP, ꝛc. mit Macht zu, und wenn der Bogen ABCD gar $= 90^\circ$ wird, so kann der verlängerte Radius OD die verlängerte Tangente AP gar nicht schneiden, weil die beyden Winkel DOA und $\angle$ OAP recht sind und daher OD und AP zu einander parallel laufen. Es ist daher tang $90^\circ = \infty$ und sec $90^\circ = \infty$ (unendlich groß).

3) Sind die Bögen ABCDE und ABCDEF größer als 90°, so kann die Tangente PQ nur durchs Rückwärtsziehen der Sekanten EOQ; FOR in Q und R geschnitten werden, daher tang (des Bogens ABC

DE) = — AQ und tang (des Bogens ABCDEF) = Fig. 43.
— AR; dagegen ist die Sekante des ersten Bogens, (weil ihr Anfangspunkt im Mittelpunkte des Kreises liegt) = — OQ und die Sekante des zweyten Bogens = — OR und die Tangente von 180° ist = 0 und sec 180° = — r. Für Tangente und Sekante von 90° kann daher auch — ∞ statt + ∞ gesetzt werden.

4) Ist der Bogen ABCDE = α, so ist der Bogen EFG oder ∠ EOG = 180 — α und daher auch der zugehörige Scheitelwinkel AOL oder Bogen AML = 180 — α. Nun gehört zum Bogen AML die Tangente AQ und zum Bogen ABCDE dieselbe Tangente, welche aber negativ gesetzt werden muß, daher tang (ABCDE) = — tang (AML) nämlich tang α = — tang (180 — α). Eben so ist auch sec α = — sec (180 — α).

5) Die Tangenten für größere Bögen als 180°, nämlich für die Punkte H und I fallen wieder durch das Rückwärtsziehen der Sekanten ON und OP (welche nach den Punkten H und I ziehen) auf die Skale AP, daher die Sekanten ON und OP von 180° bis 270° zwar negativ, die Tangenten AN und AP aber positiv sind. Man findet leicht, daß, wenn der Bogen ABCDEFGH = α gesetzt wird, sodann GH = (α — 180) = AB und demnach sec α = — sec (α — 180) und tang α = + tang (α — 180) ist.

6) Dagegen sind die Sekanten für die Punkte L und M wieder positiv, weil durch sie wirklich die Sekanten OQ und OR gezogen und dadurch die Tangente PQ (freylich nur ihr negativer Arm AQ) geschnitten werden kann. Es sind daher die Sekanten von 270° bis 360° positiv, die Tangenten aber negativ, und man findet, daß wenn Bogen ABCDEFGHIKL = α gesetzt wird, sodann der Bogen AML = 360 — α und sec α = + sec (360 — α) und tang α = — tang (360 — α) ist.

7) Folgende Hauptsätze sind wohl zu merken:

a) Sind zwey Winkel AOB und DOF einander gleich, so sind auch die zugehörigen

Fig. 43. Sekanten ON und OF und auch die zugehörigen Tangenten AN und DT einander gleich, wenn nämlich die zwischenfallenden Bögen AB und DE einen gleichen Radium haben.

b) Sind umgekehrt die Tangenten AN und DT oder die Sekanten ON und OT zweyer Winkel NOA und TOD einander gleich, so sind auch die Winkel BOA und EOD oder Bögen AB und DE einander gleich, wenn nämlich diese Bögen einerley Gleichmesser haben.

β) Dreht sich der Bogen ABC mit der Tangente AP um die Axe OA, so wird der Bogen ABC in Bogen AML und die Tangente AP in AQ zu liegen kommen, daher auch, weil PQ eine gerade Linie ist, OA auf PQ senkrecht stehen muß. Hiernach hat der Winkel OAP oder OAQ zwischen dem Gleichmesser OA und der Tangente AP oder AQ neunzig Grade.

II. Ergänzt man den Bogen AB $=$ α auf 90 Grade, oder zieht man DO senkrecht auf OA, macht OD $=$ OA und beschreibt mit dem Gleichmesser DO den Bogen DCB $=$ 90° $-$ AB $=$ 90 $-$ α, und zieht man zu diesem Ergänzungsbogen DCB eine Tangente DV ($\perp$ OD) und Sekante OBV; so ist zwar DV und OV richtig eine Tangente und Sekante des Bogens DCB; vom Bogen AB $=$ α aber ist DV eine sogenannte Cotangente und OV eine Cosekante. Eben so ist auch die Cotangente (vom Bogen ABC) $=$ DS und die Cosekante $=$ OS.

1) Ist der Bogen AB $=$ 0, so kann die Cotangente DV die Sekante OV nicht schneiden, weil alsdann OV oder OB in OA zu liegen kömmt und OA $\#$ zu DV läuft. Es ist daher Cosekante und Cotangente von 0° $=$ ∞, oder kürzer bezeichnet: cosec 0° $=$ ∞ und cot 0° $=$ ∞.

Dagegen sind die Cotangente DV; DS ꝛc. der folgenden Bögen AB; ABC ꝛc. immer kleiner und Cotangente (des Viertelkreises ABCD) $=$ 0, nämlich cot 90° $=$ 0. Auch die Cosekanten OV und OS dieser Bögen AB und ABC werden immer kleiner und vom Viertelkreise ist die Cosekante $=$ OD $=$ r.

2) Zu

2) Zu Bögen, welche größer als 90° sind, nämlich zu den Punkten E; F ꝛc. gehören die negativen Cotangenten DT; DU ꝛc. und zu den Punkten H und I gehören die positiven Cotangenten DV und DS und die negativen Cosekanten OV und OS; und endlich zu den Punkten L und M gehören die negativen Cotangenten DT und TU und die negativen Cosekanten OT und OU, und es sind nunmehr folgende Formeln klar. Fig. 43.

Wenn ABCDE $=$ α, so ist GFE $=$ $180 - \alpha$; DF $=$ Cotangent des Bogens GFE und $-$ DF $=$ Cotangente des Bogens ABCDE, daher cot α $=$ $-$ cot $(180 - \alpha)$. Eben so finden wir (wenn ABCDEFGH $=$ α und demnach GH $=$ AB $=$ $\alpha - 180$ gesetzt wird) cot α $=$ $+$ cot $(\alpha - 180)$ und (wenn ABCDEFGHIKLM $=$ α und demnach AM $=$ $360 - \alpha$ gesetzt wird) cot α $=$ cot $(360 - \alpha)$.

Eben so ist cosec α $=$ $+$ cosec $(180 - \alpha)$; cosec α $=$ $-$ cosec $(\alpha - 180)$ und cosec α $=$ $-$ cosec $(360 - \alpha)$.

III. Die Cotangenten und Tangenten; Sekanten und Cosekanten können ebenfalls wechselsweise eins durchs andere ausgedrückt werden, wie III die Cosinus und Sinus. Als cot (Bogen ABC) $=$ DS und auch tang (Bogen DC) $=$ DS, daher cot α $=$ tang $(90 - \alpha)$ und tang α $=$ cot $(90 - \alpha)$.

Ferner cot (ABCDE) $=$ $-$ tang (DE) daher cot α $=$ $-$ tang $(\alpha - 90)$ und weil tang (ABCDE) $=$ $-$ AQ und cot (DE) $=$ cot (KL) $=$ $+$ AQ, so ist tang α $=$ $-$ cot $(\alpha - 90)$.

Auf dieselbe Art findet man:

sec α $=$ cosec $(90 - \alpha)$; cosec α $=$ sec $(90 - \alpha)$; sec α $=$ $-$ cosec $(\alpha - 90)$; cosec α $=$ $-$ sec $(\alpha - 90)$.

IV. Auch können wir durch den Mittelpunkt O und den Anfangspunkt A eines Gradkreises ABCDLI HGFE Fig. 44. eine feste Sekantenlinie KOAM ziehen und, wenn der Bogen ABC vorgelegt ist, zum Gleichmesser OC eine Tangente CM $(\perp$ OC) führen, welche die Sekante OM in M schneidet. Hiernach gehört zum Bogen AB die Tangente BN und Se- Fig. 44.

Fig. 44. kante ON und zum Bogen AEF, die Tangente FM und Sekante OM; und ist der Bogen ABC = dem Bogen AEF, so ist auch die diesen beyden Bogen zugehörige Sekante = OM.

Daß die Sekanten OK der Bögen ABCDL, welche größer als 90° sind, eine verkehrte Richtung gegen OM haben und deßhalb negativ sind, liegt vor Augen.

Fig. 42. V. In Fig. 42. ist AB der Bogen, der zum Sinus BM = PS und zum Cosinus PM = SB gehört; ABC der Bogen des Sinus CN oder Cosinus PN; ABCD der Bogen des Sinus DO oder Cosinus PO. Hier kömmt es nun darauf an, ob man zu einem vorgelegten Bogen ABC = φ den zugehörigen Sinus CN = x und Cosinus PN = y, oder ob man zu einem vorgelegten Sinus CN = x und Cosinus PN = y den zugehörigen Bogen ABC = φ angeben soll. Ist der Bogen ABC = φ vorgelegt, so wird der zugehörige Sinus CN = x = sin φ, und der zugehörige Cosinus PN = y = cos φ, gesetzt. Ist aber dagegen der Sinus CN = x oder der Cosinus PN = y vorgelegt, so wird, (weil der Bogen auf lateinisch arcus heißt) der zugehörige Bogen ABD = φ = arc (sin x) = arc (cos y) gesetzt, welche Formel weiter nichts bedeuten soll, als
Fig. 43. daß ABC oder φ = dem Bogen (arcus) des zugehörigen Sinus x oder des Cosinus y ist.

Setzt man in Fig. 43. den Bogen ABC = φ, und den zugehörigen Tangenten AP = x und Cotangenten DS = y, so wird x = tang φ und y = cot φ dagegen aber φ = arc (tang x) und φ = arc (cot y) gesetzt, nämlich es ist φ oder ABC = dem Bogen des Tangenten AP, und φ = dem Bogen des Cotangenten DS.

§. 26.

Von der Sehne (Chorde) der Winkel.

Wenn man in einem Kreise ABCDEFGH Fig. 45. eine gerade Linie AB vom Anfangspunkte A zum

Endpunkte B eines Bogens AB zieht, so wird diese Fig. 41.
gerade Linie AB Sehne oder Chorde des Bogens AB genannt. Eben so ist auch AC eine Sehne des Bogens ABC; AD eine Sehne des Bogens ABCD und AE eine Sehne vom Halbkreise ABCDE.

Da zum Winkel AOB der Bogen AB und zum Winkel AOC der Bogen ABC gehört, so wird auch AB eine Sehne des Winkels AOB und AC eine Sehne des Winkels AOC seyn, u. s. f.

Von den Sehnen gelten nun folgende Wahrheiten.

1) Zu jedem besondern Bogen AB; ABC; ABCD, der nicht über 180 Grade hat, gehört auch eine besondere oder eigene Sehne. Ist nämlich ein Bogen kürzer als ein anderer, so ist auch die zugehörige Sehne kürzer als die andere. Aber zu gleichen Bögen ABC und AHG gehören auch gleiche Sehnen AC und AG, und zu gleichen Sehnen AC und AG gehören gleiche Bögen ABC und AHG.

2) ist der Bogen AB = 0, so ist auch die zugehörige Sehne = 0; werden Bögen ABC und ABCD größer als AB, so werden auch die zugehörigen Sehnen AC und AD größer als AB; die größte Sehne AE gehört zum Halbkreise ABCDE oder zu 180° und ist dem Durchmesser gleich.

3) Werden die Bögen ABCDEF; ABCDEFG; ABCDEFGH größer als der Halbkreis, so werden die zugehörigen Sehnen AF; AG; AH immer kürzer und zwar um desto kürzer, je größer die Stücke EF; EG; EFGH sind, welche zum Halbkreise ABCDE kommen. Zu einem Bogen von 360° oder zum Vollkreise ABCDEFGHA gehört die Sehne = 0.

4) Zu jeder Sehne AG gehören zugleich zwey Bögen AHG und ABCDEFG. Hält der Bogen AHG = α Grade, so ist der andere Bogen ABCDEFG = 360 — α und es ist daher die Sehne von α Graden = der Sehne von (360 — α) Graden, welche Gleichung kurz auf folgende Art ausgedrückt wird:

chord α = chord (360 — α).

Fig. 45. 5) Was von Bögen gilt, gilt auch von Winkeln. Wenn daher in einem Kreise zwey Winkel AOB und AOH einander gleich sind, so sind auch die zugehörigen Bögen und Sehnen AB und AH einander gleich. Und sind von zwey Winkeln AOC und AOG die Sehnen AC und AG einander gleich, so sind auch die zugehörigen Winkel AOC und AOG und Bögen ABC und AHG einander gleich, vorausgesetzt, daß die Bögen einerley Gleichmesser haben.

Fig. 46. 6) Hieraus folgt, daß man (Fig. 46.) einen Winkel EMF einen andern DOA dadurch gleichmachen kann, daß man im gegebenen Winkel DOA aus dem Scheitel O einen Gleichmesser OB = OC mittelst eines Zirkels in die beyden Schenkel OD und OA trägt, mit derselben Oeffnung des Zirkels oder mit demselben Gleichmesser MG aus dem Scheitel M des hinzulegenden Winkels einen Kreisbogen GIH beschreibt, die Sehne BC des vorgelegten Winkels mit dem Zirkel faßt und diese nach GI überträgt, indem man den einen Fuß des Zirkels in Punkt G des Bogens GIH setzt und mit dem andern Fuße den Bogen in I abschneidet, wohin man alsdann den Schenkel MI des hinzulegenden Winkels EMF = ∠ DOA ziehen muß.

Fig. 47. Sollte Fig. 47. ein Winkel AED sehr groß oder gar stumpf seyn, so trägt man in den darin beschriebenen Bogen ABCD zuerst eine Sehne AC von der Größe des Gleichmessers AE ein und mißt alsdann nur noch die Sehne des übrigen Bogens CD nach.

7) Ein Winkel AEB Fig. 47. wird vervielfältiget, nämlich 2; 3 und 4 fach gemacht, wenn man mit einem beliebigen Gleichmesser EA einen Kreis ABCD aus dem Scheitel E beschreibt, die Sehne AB mit dem Zirkel faßt, diese in den Bogen nach BC; CD ꝛc. weiter fortträgt und die Schenkel CE oder DE zieht, wo nun ∠ AEC = 2 × ∠ AEB und ∠ AED = 3 × ∠ AEB ist.

8) Ein Bogen ABCD Fig. 47. wird in 3 oder n gleiche Theile getheilt, wenn man solche Sehne AB

= BC = CD mit dem Zirkel aufsucht, die gerade 3 oder n mal in dem vorgelegten Bogen ABCD fortgetragen werden kann; denn wenn die Sehnen AB; BC und CD einander gleich sind, so sind auch die zugehörigen Bögen und ∠ AEB; BEC und CED einander gleich, wenn E der Brenn- oder Mittelpunkt des Bogens ABCD ist. Fig. 47.

Anmerkung. Damit man beym Eintheilen des Bogens ABCD mit dem Zirkel die Figur nicht zu sehr zersticht, beschreibt man mit dem Gleichmesser EA einen zweyten Bogen ABCD auf ein anders Blatt und macht diesen Bogen = dem vorgelegten, theilt diesen in die verlangten 3 oder n Theile ein, und wenn diese Theile gefunden worden sind, trägt man sie in die zuerst vorgelegte Figur behutsam auf.

§. 27.

Vom Parallel- und Wechselwinkel.

I. Lehrsatz.

Wenn zwey parallele Linien AB und CD Fig. 48. von einer dritten Linie FG oder EH berührt oder durchschnitten worden, so sind Fig. 48.

1) die sogenannten Wechselwinkel FGB und GFC; FGA und GFD einander gleich, wo je zwey Wechselwinkel FGB und GFC zwar zwischen den Parallelen, der eine aber rechts und der andere links der Durchschnittslinie FG liegt.

2) Die sogenannten Parallelwinkel HGA und GFC; AGF und CFE; HGB und GFD; BGF und DFE einander gleich, wo allemal je zwey Parallelwinkel entweder über oder unter den beyden Parallellinien, links oder rechts an der Durchschnittslinie liegen und,

3) die beyden Winkel BGF und DFG sind zusammen = 180°, welche beyde Winkel Zwischenwinkel heißen sollen.

Fig. 48.

Beweis.

Wenn die zwey Linien AB und CD zu einander parallel laufen, so sind auch die darzwischen gezogenen senkrechten Linien GM und IF einander gleich. Man denke sich nun mit dem Gleichmesser FG zuerst aus dem Mittelpunkte F einen Bogen GL und sodann aus G einen Bogen FK zwischen den Parallelen beschrieben, so wird GM der Sinus des Bogens GL und FI der Sinus des Bogens FK seyn. Da nun die Gleichmesser FG und GF und die Sinus GM und FI beyder Bögen gleich sind, so sind auch die Bögen selbst und die zugehörigen Winkel GFL und FGK einander gleich, und sind diese Winkel einander gleich, so sind auch die dazu gehörigen Nebenwinkel GFD und FGA einander gleich, vermöge §. 23. Da nun nicht nur Scheitelwinkel, sondern auch Wechselwinkel gleich sind, so folgt auch: $\angle$ HGA $=$ $\angle$ BGF $=$ $\angle$ GFC $=$ $\angle$ DFE und $\angle$ HGB $=$ $\angle$ FGA $=$ $\angle$ GFD $=$ $\angle$ CFE. Endlich ist $\angle$ IGF $+$ $\angle$ FGA $=$ $\angle$ IGF $+$ $\angle$ GFD $=$ 180°.

II. Sind umgekehrt die Wechselwinkel FGB und GFC oder die gleichlaufenden Winkel EFD und FGB einander gleich, so laufen auch die Linien FD und GB oder die Linien CFD und AGB zu einander parallel.

Beweis.

Wenn $\angle$ FGK $=$ $\angle$ GFL, so sind auch die dazu gehörigen mit dem Gleichmesser FG oder GF beschriebenen Bögen FK und GL und auch die zugehörigen Sinus FI und GM einander gleich, und sind diese senkrechte Linien GM und FI einander gleich, so laufen auch AB und CD zu einander parallel.

III. Folgesätze.

1) Auf dem Papier werden Parallellinien FD und GD durch Hilfe eines hölzern oder metallnen (rechtwinkligen) Dreyecks FDE dadurch gezogen, daß man zuerst die eine Seite des Dreyeckes genau an die vorgezogene Linie CFD anlegt und an die andere Seite FE des Dreyeckes ein gerades Linial EFH anschließt, sodann das Dreyeck FDE, welches mit der

Seite FE am Liniál beſtändig fort anliegen muß, ſo- Fig. 48.
weit fort nach GFI ſchiebt, bis FD in GI und zwar an einen Punkt G oder I zu liegen kömmt, in welchem die begehrte Parallele GI zu FD an der Seite GI des Dreyeckes gezogen werden ſoll. Steht DE ſenkrecht auf FD, ſo kann auf demſelben Wege auch eine Senkrechte FI auf GB gezogen werden.

Wenn die beyden Parallelen AB und CD einen gewiſſen Abſtand FI = MG erhalten ſollen, ſo kann man auch FI mit dem Zirkel faſſen, damit aus F in I und aus M in G einen kleinen Bogen beſchreiben und über dieſe kleinen Bögen in G und I eine Berührungslinie AB ziehen, wo nun AB zu CD ebenfalls parallel läuft.

2) Auf dem Felde wird AGB zu CFD parallel gezogen, wenn man

entweder auf CD hinlänglich entfernte Senkrechte MG und FI errichtet, dieſe nach der Länge einander gleichmacht und über die Endpunkte G und I die gerade Linie AB zieht;

oder wenn man die Wechſelwinkel BGF und GFC, oder die Parallelwinkel BGF und DFE durch gute Inſtrumente einander gleichmacht;

oder wenn man den Winkel BGF = α und den Winkel GFD = 180 — α macht. Zieht man aus einem Punkte B Fig. 49. zwey Linien BD und BG einer Parallelen AC zur andern DH, ſo entſteht ein Dreyeck DBG, wovon folgender wichtige Lehrſatz gilt.

IV. Lehrſatz.

In einem Dreyecke DBG Fig. 49. haben die drey Winkel GDB, DBG und BGD zuſammen eben ſo viele Grade als ein Halbkreis nämlich 180 Grade. Fig. 49.

Beweis.

Man ſetze ∠ BDG = α; ∠ DBG = β und ∠ BGD = γ und ziehe in B zu DG die Parallele AC; ſo iſt auch, weil ∠ ABD mit BDG und ∠ GBC mit BGD wechſelt, ∠ ABD = α und ∠ GBC = γ. Nun iſt die Summe ∠ ABD + DBG + GBC,

Fig. 49. nämlich $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, daher auch $\angle$ GDB + DBG + BGD = 180°.

Oder:

Man ziehe aus G die Parallele GC zu DB und verlängere DG bis I, so ist $\angle$ BGC = $\angle$ GBD = β und $\angle$ CGI = $\angle$ BDG = α. Nun sind die drey Winkel CGI + CGB + BGD zusammen = 180, daher auch $\alpha + \beta + \gamma = 180$ = den Graden eines Halbkreises.

V. Folgesätze.

1) Wenn zwey Winkel BDG und DGB eines Dreyeckes BDG eben so groß sind, als zwey Winkel GCB und CBG eines andern Dreyeckes, so muß auch der dritte Winkel DBG und CGB des einen und des andern Dreyeckes gleich seyn. Denn es sey im Dreyecke BDG der $\angle$ in D = α, der in G = β und der in B = γ, so ist $\alpha + \beta + \gamma = 180$ und $\gamma = 180 - \alpha - \beta$. Ferner sey im Dreyecke CGB der $\angle$ in C ebenfalls = α und der in B = β und der dritte in G = δ, so ist auch $\alpha + \beta + \delta = 180$ und $\delta = 180 - \alpha - \beta$, und demnach = γ.

2) In einem rechtwinkligen Dreyecke BEG, wo demnach der $\angle$ BEG = 90° ist, sind die übrigen beyden Winkel GBE und BGE zusammen ebenfalls = 90° oder einem rechten gleich. Denn wenn alle drey Winkel eines Dreyeckes zusammen 180 oder 2. 90 Grade ausmachen und schon ein Winkel BEG neunzig Grade enthält, so können die übrigen beyden $\angle$ EBG und EGB zusammen ebenfalls nicht mehr als noch 90 Grade ausmachen.

Es ist daher ein schiefer Winkel EBG von dem andern EGB die Ergänzung auf 90 Grade. Wenn nämlich $\angle$ EGB = α und EBG = β gesetzt wird, so ist auch $\angle$ EGB = GBC = α und $\angle$ CBG + $\angle$ GBE = $\alpha + \beta = 90$, daher $\alpha = 90 - \beta$ und $\beta = 90 - \alpha$.

3) Der Nebenwinkel BGI vom Winkel BGD des Dreyeckes GBD hat eben so viele Grade als die beyden übrigen Winkel GBD und GDB zusammen.

Wenn nämlich der L IGB $= \varphi°$; BGD $= \alpha$; GDB $= \beta$ und DBG $= \gamma$ gesetzt wird, so ist $\varphi = \beta + \gamma$, weil Fig. 49.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 \text{ und}$$
$$\alpha + \varphi = 180$$

daher auch durch Subtraktion beyder Gleichungen $\beta + \gamma - \varphi = 0$ und $\varphi = \beta + \gamma$.

4) Stehen Fig. 50. auf der Linie AB zwey Schenkel AC und BE, welche zu einander parallel laufen und wo demnach L CAB + L ABE $= 180°$, so können sie nie ein Dreyeck bilden, weil der dritte Winkel unendlich fern und $= 0$ wäre. Stehen aber auf AB zwey Schenkel AC und BD, welche zusammen laufen (convergiren) und wo demnach die Summe L CAB + L DBA kleiner als 180 ist, so bilden sie durchs hinlängliche Verlängern ein Dreyeck. Laufen aber zwey Schenkel AC und BF aus einander (oder divergiren sie), so kann nur durchs Rückwärtsverlängern AG und BH ein negatives Dreyeck gebildet werden. Fig. 50.

VI. Wenn L BDF $=$ CGI Fig. 49. und DB $=$ GC, so läuft BC parallel zu DG. Fig. 49.

Beweis.

Man beschreibe aus D und G mit den Gleichmessern DB und GC die Bögen BF und CI, so ist BE ein Sinus des Ls BDE und CH ein Sinus des Winkels CGI. Da nun die Winkel einander gleich, so sind auch diese Sinus BE und CH einander gleich und es läuft demnach auch AC zu DI parallel.

VII. Lehrsatz.

Wenn Fig. 51. Parallellinien AD und FH durch Parallellinien FE und ID durchschnitten werden, so entsteht darzwischen ein Parallelogramm FBDG, worin zugleich auch je zwey gegenüber stehende Seiten FB und GD; BD und FG einander gleich sind. Fig. 51.

Beweis.

Läuft AD zu FH parallel, so sind auch die darzwischen gezogenen Senkrechten AF und CG einander gleich, und läuft ID zu FE parallel, so sind auch die

Fig. 51. Winkel DGH und BFG und die zugehörigen Ergänzungswinkel AFB und CGD einander gleich. Da nun FA = GC und ∠ AFB = ∠ CGD, so sind nicht nur die dazu gehörigen, mit dem Gleichmesser FA und GC beschriebenen, Bögen AL und CK, sondern auch die Linien FB und GD, welche Sekanten dieser Bögen sind, einander gleich.

Auf dieselbe Art, wie wir bewiesen haben, daß FB = GD ist, können wir auch beweisen, daß DB = GF ist, wenn wir zwischen FE und ID die gleichen Senkrechten DE und GM aus D und G ziehen, wo nun ∠ FGI = ∠ BDG und ∠ FGM = ∠ BDE und die, diesen Winkeln zugehörigen, Sekanten DB und GF einander gleich sind.

VIII. Anmerkung. Umgekehrt wird wieder folgen, daß wenn in einem Vierecke FBDG je zwey gegenüber stehende Seiten BF und GD; FG und BD einander gleich sind, sodann auch diese Seiten zu einander parallel laufen und auch die gegenüber stehenden Winkel BFG und BDG; FBD und DGF einander gleich sind; welches aber erst dann bündig bewiesen werden kann, wenn gezeigt worden ist, daß die (durch die gezogene Diagonale BG entstehenden) zwey Dreyecke auch gleich große Winkel haben müssen, weil auch die drey einzelnen Seiten des einen Dreyeckes so groß sind, als die des andern Dreyeckes.

Fig. 49. IX. Sind zwey Seiten BC und DG Fig. 49. parallel und gleich, so sind auch BD und CG parallel und gleich.

Denn wenn man aus B und G die Senkrechten BE und GL zwischen den Parallelen BC und DG zieht, so ist BL = GE und auch das übrige Stück LC = ED. Da nun in den rechtwinkligen Dreyecken BED und GLC die Gleichmesser BE und GL und die Tangenten ED und LC der Winkel EBD und LGC einander gleich sind, so werden auch diese Winkel selbst und die zugehörigen Sekanten BD und GC und Nebenwinkel BDE und CGH einander gleich seyn.

§. 28.

Vom Zwillings-Winkel und Zwillings-Sinus und Tangenten.

I. Wenn in Fig. 52. CE der Gleichmesser zum Bogen AEB $= \alpha$ Grade und die Zwillingsbögen EA und EB einander gleich, nämlich beyde $= \beta$ Grade sind, so ist bekanntlich Fig. 52.

1) der Winkel ACB $= \beta = 2\alpha$ und $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, nämlich $\angle$ ACE $=$ BCE $= \frac{1}{2} \angle$ ACB.

2) Die Zwillings-Sinus AD und BD beyder Bögen EA und EB sind einander gleich und der Cosinus beyder Bögen ist gemeinschaftlich $=$ CD, und weil AD und BD senkrecht auf dem Punkte D der Linie CE stehen, so ist ADB eine gerade Linie und zwar eine Sehne des Bogens AEB, nämlich AB $=$ chord $\beta =$ chord 2α und AB $= 2.$ AD $= 2.$ sin $\alpha = 2.$ sin $\frac{1}{2}\beta$ und AD $=$ sin $\alpha = \frac{1}{2}$ AB $= \frac{1}{2}$ chord 2α.

3) $\angle$ CDA $= \angle$ CDB $= 90° = \frac{1}{2}.180$; $\angle$ ACD $= \angle$ BCD $= \alpha = \frac{1}{2}\beta$; daher auch die beyden Ergänzungswinkel von α, nämlich $\angle$ CAD und CBD einander gleich und zwar $= 90 - \alpha = 90 - \frac{1}{2}\beta$.

4) Man setze $\angle$ CAD oder $\angle$ CBD $= \gamma$, so ist $\gamma = 90 - \frac{1}{2}\beta$ und $2\gamma = 180 - \beta$, woher $\beta = 180 - 2\gamma$. Der dritte Winkel ACB $= \beta$ in einem Dreyecke ist nämlich allemal $=$ dem Reste, den man erhält, wenn man die Summe $\gamma + \gamma = 2\gamma$ der übrigen beyden Winkel CAB und CBA von 180° abzieht.

II. Da CA $=$ CB und AB eine gerade Linie ist, so ist auch die Figur ACB ein gleichschenkliges Dreyeck. Von einem gleichschenkligen Dreyecke gelten nun folgende Wahrheiten.

1) Die dritte Seite AB ist allemal die Sehne von dem Winkel ACB $= \beta$, welchen die beyden gleichen Seiten CA und CB einschließen, wenn man nämlich mit diesen gleichen Seiten einen Bogen AEB beschreibt.

Fig. 52. 2) Sind in einem Dreyecke ACB zwey Seiten CA und CB einander gleich, so sind auch die zwey Winkel CAB und CBA, welche den gleichen Seiten CB und CA gegenüber stehen, einander gleich.

Denn wenn man mit den Gleichmessern AC und BC aus A und B die Bögen CF und CG zieht und aus C eine Senkrechte CD auf AB fällt so ist CD der Sinus vom Bogen CF und auch vom Bogen CG und da der Sinus beyder Bögen gleich ist, so werden auch die Bögen selbst und die zugehörigen Winkel in A und B einander gleich seyn, wo der Winkel in A der Seite CB und der Winkel in B der gleichen Seite CA gegenüber steht.

3) Fällt man aus C eine Senkrechte CD auf AB, so ist CD der Cosinus des Bogens EA und des Bogens EB, daher die Senkrechte CD sowohl den Bogen BEA als die Sehne AB halbirt.

4) Halbirt man umgekehrt den Winkel ACB oder den Bogen AEB; so steht die Halbirungslinie CE senkrecht auf AB, weil ∠ ACD = ∠ BCD; ∠ in A = ∠ in B nach Nr. 2. ist und der dritte Winkel in D des einen und des andern Dreyecks CDA und CDB ebenfalls auch gleich seyn muß, nach §. 27. V. Da nun die beyden Winkel CDA und CDB einander gleich seyn und beyde zusammen 180 Grade ausmachen, so wird auch jeder 90° haben müssen.

5) Errichtet man aus der Mitte D der Sehne AB eine Senkrechte EDC, so geht diese durch den Mittelpunkt C des Kreises oder Bogens AEB Fig. 52., weil die Figuren CDEA und CDEB rechts und links des Durchmessers oder Radius EC einander gleich sind.

Fig. 37. 6) Wenn in einem Dreyecke ABC Fig. 37. zwey Winkel BAC und ABC einander gleich sind, so werden auch die diesen Winkeln entgegen stehenden Seiten BC und AC einander gleich seyn.

Denn wenn nicht jeder Winkel in A und B gerade 90° hat und demnach auch nicht GAC zu HBC parallel läuft, so kommen beyde Schenkel gewiß in einem Punkte C zusammen, aus welchem

man eine Senkrechte CE auf AB gefällt und damit einen Bogen DEF beschrieben denken kann. Fig. 37.

Da nun ∠ EAC = ∠ EBC, so sind auch die Ergänzungswinkel ECA und ECB und die zugehörigen Bögen ED und EF und Sekanten CA und CB einander gleich.

7) Sind in einem Dreyecke die drey Seiten einander gleich, so sind auch die drey Winkel einander gleich, und umgekehrt.

Denn wenn gleichen Seiten allemal gleiche Winkel und wenn gleichen Winkeln allemal gleiche Seiten in einem Dreyecke entgegen stehen, so müssen auch, wenn alle drey Seiten eines Dreyeckes gleich lang sind, alle drey Winkel gleich viele Grade haben, und wenn alle drey Winkel gleich sind, so müssen auch alle drey Seiten des Dreyeckes gleichlang seyn.

Man sieht aus diesem, daß jeder Winkel eines gleichseitigen Dreyeckes 60 Grade = $\frac{1}{3}$. 180° haben müsse. Fig. 53.

III. Man ziehe Fig. 53. die gerade Linie BG und beschreibe zuerst aus B mit BE einen Bogen AEH und dann auch aus F mit FC einen Bogen ACH, so werden sich beyde Bögen in A und H durchschneiden, wo nun

1) AH eine gemeinschaftliche Sehne, DA und DH aber gemeinschaftliche Zwillingssinus sind, und wo sowohl die Sehne als diese Sinus senkrecht auf BG stehen.

2) Werden zu beyden Seiten der Linie BG Zwillingsdreyecke BFA und BFH entstehen, die einander in allen Stücken gleich sind, als BA = BH; FA = FH und die dritte Seite BF ist beyden Dreyecken gemein; Ferner ∠ ABD = ∠ HBD, und der Ergänzungswinkel BHD = BAD; auch ∠ AFD = ∠ HFD und ∠ FAD = ∠ FHD und endlich ∠ BAF = ∠ BHF.

Hieraus ergeben sich nun

IV. Folgende Sätze.

1) Sind in zwey Dreyecken BFA und BFH die einzelnen drey Seiten BF; BA und FA die einen Dreyeckes eben so groß als die einzelnen

Nr. 52. drey Seiten BF; BH und FH des andern, so sind auch die einzelnen drey Winkel des einen und des andern Dreyeckes, welche gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich. Nämlich es sind die beyden Winkel ABF und HBF, welche den gleichen Seiten FA und FH entgegen stehen, einander gleich, und so auch ∠ BFA = BFH, welche den Seiten BA = BH, und ∠ BAG = ∠ BHG, welche einer gleichen Seite BG gegenüber stehen.

Dieser Satz ist mit dem folgenden einerley. Wenn zu einem Dreyecke BFA oder BFH die Länge der einzelnen drey Seiten BF; BA und FA gegeben ist, so können aus diesen drey Seiten nur solche Dreyecke BFA oder BFH gebildet werden, worin auch die Winkel, welche gleichen Seiten entgegen stehen, einander gleich sind.

Denn wenn man zuerst eine Seite BF von der vorgeschriebenen Länge aufträgt, sodann die Länge BA der zweyten Seite mit dem Zirkel faßt und damit aus B einen Kreis AEH beschreibt und endlich auch die dritte FA mit dem Zirkel faßt und damit aus F ebenfalls einen Kreis ACH beschreibt, der jenen in den Punkten A und H durchschneidet, so werden nur zwey Dreyecke BFA und BFH von der begehrten Beschaffenheit der drey Seiten möglich seyn, die aber, wie vorhin gezeigt worden, in allen Stücken einander gleich sind.

2) Ist die eine Seite (eines Dreyeckes) = BG, die zweyte = BE und die dritte = GE und demnach die beyden letzten Seiten zusammen nur so groß oder gar kürzer als die erste Seite, so können sich diese Seiten beym Auftragen auf die vorige Art nicht schneiden und es ist also kein Dreyeck möglich.

3) Wenn in einem Punkte D eine Senkrechte DA oder HDA errichtet werden soll, so trägt man zuerst aus D mit einem Zirkel zwey willkührige jedoch gleichlange Linien DB und DG in BG auf, öffnet sodann den Zirkel um etwas mehr und beschreibt aus B mit einem Radius BA, der größer als BD ist, einen Kreis in AEH und beschreibt alsdann auch mit

demselben Radius BA = GA aus G einen Kreis Fig. 35.
ACH, der den ersten in A oder H durchschneidet, wo, wenn eine Linie von A nach D oder H geführt wird, AD senkrecht auf BG steht.

Denn es sind die beyden Dreyecke BDA und GDA und mithin auch die Winkel BDA und GDA einander gleich, nämlich beyde = ½. 180. = 90°.

4) Aus einem Punkte A wird eine Senkrechte ADH zu BG gezogen, wenn man eine Linie AG = AB, die größer als AD ist, mit dem Zirkel faßt, damit aus A die Linie BG in G und B schneidet, sodann den einen Fuß des Zirkels einmal in G und das anderemal in B setzt und mit dem andern Fuße Bögen von gleichen Radien GH und BH in H beschreibt, die sich daselbst durchschneiden, wo nun die von A nach H gezogene gerade Linie AH auf BG steht.

Anmerkung. AG kann auch kürzer als AB nämlich nur = AF gemacht werden, sodann hat man nur nöthig, daß man FH = AF und BH = AB mache.

5) Wenn zu zwey Punkten A und H ein Kreis AEH oder ACH geführt werden soll, der durch die beyden vorgelegten Punkte geht, so liegt zwar der Mittelpunkt B oder F eines solchen Kreises in der senkrechten Linie BG, welche die gezogene Grade oder Sehne AH in D halbirt und der Radius BA ist die Hypothenuse des Δes BDA; es ist aber willkührlich, wohin man den Mittelpunkt B in die Halbirungslinie BG setzt, und er kann daher auch nach C; D; E; F und G versetzt werden.

6) Ein Winkel ABH wird in zwey gleiche GBA und GBH getheilt, wenn man zuerst BA = BH macht, sodann den einen Fuß des Zirkels einmal in A und das anderemal in H setzt und aus jedem dieser Punkte mit dem andern Fuße Bögen von gleichen Radien AG und HG in G beschreibt, die sich daselbst durchschneiden, wo nun die aus B nach G gezogene Linie den Winkel ABH halbirt.

V. Es sey KOAM Fig. 44. eine Linie, worin Fig. 44.
der Mittelpunkt O eines Kreises liegt, und der Bogen

Fig. 44. ABC = AEF = α, so ist OM eine Sekante von den beyden Bögen zugleich und die Tangente CM des Boges ABC ist = der Tangente FM des Bogens AEF. Da nun der Bogen ABC = AEF = α gesetzt worden und die Dreyecke OCM und OFM rechtwinklig sind, so ist auch $\angle$ MOC = $\angle$ MOF = α und $\angle$ OMC = OMF = $90 - \alpha$. Setzen wir den Winkel CMF = β, so ist $\angle$ CMO = $\angle$ FMO = $\frac{1}{2}\beta = 90 - \alpha$ und $\beta = 180 - 2\alpha$ und $\alpha = 90 - \frac{1}{2}\beta$.

Hieraus ergeben sich nun folgende Sätze.

1) Sind MC und MF Tangenten eines Kreises GFEABCD, so liegt der Mittelpunkt O dieses Kreises in einer Linie MOK, welche den Winkel CMF halbirt.

2) Der Radius CO = FO dieses Kreises ist = der auf der Tangente MC errichteten Senkrechten CO, welche die Halbirungslinie MK in O schneidet.

3) Der Winkel CMF, welchen zwey Tangenten CM und FM machen, ist = $180^\circ - \angle$ COF.

§. 29.

Vom Sehnen- und Tangentenwinkel.

I. Lehrsatz.

Fig. 54. Der Winkel DAC Fig. 54., den zwey Sehnen AD und AC an einem Punkte A des Umkreises ABCDEF machen, hat halb so viele Grade, als der Bogen DC des Umkreises, der zwischen diesen Sehnen AD und AC zu liegen kommt. Eben so sind die Grade des Winkels DAE = den halben Graden des Bogens DE; die Grade des Winkels CAE = der Hälfte von den Graden des Bogens CDE; die Grade des Winkels FAC = $\frac{1}{2}$ Grade des Bogens FEDC, und wenn dieser Bogen FEDC ein Halbkreis von (von 180 Graden) ist, so ist der Winkel FAC = 90° und FOC ein Durchmesser; ferner $\angle$ FAE = $\frac{1}{2}$ Grade des Bogens FE und wenn man zum Punkte A eine Tangente GAH und Sehne AF zieht, so ist $\angle$ GAF = $\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ Grade des Bogens AF und eben so hat $\angle$ HAC halb so viele Grade als der Bogen ABC, und so fort. Fig. 54.

Beweis.

1) Man ziehe aus A eine Sehne AD durch den Mittelpunkt O und zu A eine Tangente GAH, welche demnach auf dem Durchmesser AD senkrecht steht; ferner ziehe man aus O zu den Punkten C; E und F des Umkreises die Radien OC; OE; OF ꝛc.; so werden die Winkel AOC; DOC; DOE; DOF; DOA eben so viele Grade, als die dazu gehörigen Bögen ABC; DC; DE; DEF; DEFA enthalten. Nun sey der Winkel DAG $= \varphi$ und der Bogen DC oder $\angle$ DOC $= \alpha$ Grade; so wird, da das Δ AOC zwey gleiche Seiten OA und OC enthält, auch der $\angle$ OCA $= \angle$ OAC $= \varphi$ (nach §. 28. II. 2) seyn. Da aber (nach §. 27. V. 3) der dem Dreyecke AOC anliegende Nebenwinkel DOC eben so viele Grade hat, als die übrigen beyden Winkel OAC und OCA zusammen, nämlich $\angle$ DOC $= \angle$ OAC $+ \angle$ OCA ist, so wird auch $\alpha = \varphi + \varphi$ oder $2\varphi = \alpha$ seyn, aus welcher Gleichung $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ folgt, weßhalb auch $\angle$ DAC $= \frac{1}{2}$ DOC $= \frac{1}{2}$ Grade des Bogens DC.

Auf dieselbe Art, wie wir bewiesen haben, daß $\angle$ DAC $= \frac{1}{2}\angle$ DOC ist, können wir auch beweisen, daß $\angle$ DAE $= \frac{1}{2}$ DOE $= \frac{1}{2}$ (DE) und $\angle$ DAF $= \frac{1}{2}\angle$ DOF $= \frac{1}{2}$ (DEF) ist, weil der Nebenwinkel DOE des Δes AOE so groß, als der $\angle$ in A und E zusammen und A $=$ E ist, und weil der Nebenwinkel FOD des Δes AOF so groß als $\angle$ in A und F zusammen und A $=$ F ist, woher auch ein solcher Winkel in A halb so groß als der Nebenwinkel des genannten Dreyeckes ist.

2) Man setze den Bogen DC $= \alpha°$ und DE $= \beta°$, so ist Bogen CDE $= \alpha + \beta°$; $\angle$ DAC $= \frac{1}{2}\alpha$; $\angle$ DAE $= \frac{1}{2}\beta$ und $\angle$ CAE $= \angle$ CAD $+ \angle$ DAE $= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ CDE $= \frac{1}{2}\angle$ COE $= \angle$ CAE.

Fig. 54. Es hat daher auch der ∠ CAE halb so viele Grade als der ∠ COE oder Bogen CDE.

Eben so ist auch, wenn Bogen DEF = γ gesetzt wird, Bogen CDEF = α + γ; ∠ CAF = ∠ CAD + ∠ DAF = ½ α + ½ γ = ½ (α + γ) = ½ (CDEF).

Ferner ist EF = DEF − DE = γ − β; ∠ EAF = ∠ DAF − ∠ DAE = ½ γ − ½ β = ½ (γ − β) = ½ (EF) = ½ ∠ EOF.

Hiernach ist auch der ∠ EAF = ½ ∠ EOF = ½ Grade des Bogens EF.

Ist FC ein Durchmesser, so ist der Bogen FEDC = 180°, und der ∠ FAC = ½ (180) = 90°. Eben so wird auch, wenn man die Sehnen EF und EC führte, der ∠ FEC = 90° seyn.

3) Da Winkel GAD = HAD = 90° und Bogen AFED = 180° = ∠ AOD, so hat auch ∠ GAD halb so viele Grade als Bogen AFED oder ∠ AOD. Nun sey, wie vorher Bogen DEF = γ°, so ist Bogen AF = (180 − γ); ∠ DAF = ½ γ und ∠ GAF = ∠ GAD − ∠ DAF = ½. 180 − ½ γ = ½ (180 − γ) = ½ (AF) = ½ ∠ AOF.

Es hat daher der Winkel GAF zwischen einer zum Punkte A gezogenen Tangente AG und Sehne AF halb so viele Grade als der zwischen liegende Bogen AF oder zugehörige Winkel AOF am Mittelpunkte.

Eben so ist auch

∠ [illegible] = ½ (AFE) = ½ ∠ AOE und

∠ HAC = ½ (ABC) = ½ ∠ AOC.

Fig. 55. II. Zieht man zum Bogen AFE Fig. 55. des Winkels ACE zweyer Sehnen AC und CE noch eine Sehne AE; so entsteht innerhalb des Kreises ABCDEF ein Δ ACE, das in allen Winkeln zusammen 180 Grade hat (wie §. 27. IV.). Denn es gehört zum ∠ AEC der Bogen ABC, zum ∠ CAE der Bogen CDE und zum ∠ ACE der Bogen EFA und zu allen drey Winkeln zusammen der ganze Kreis ABCDEF, und da die Winkel des Dreyeckes Sehnenwinkel sind, so werden sie zusammen auch nur halb so viel Grade als der ganze Kreis nämlich nur 180 Grade enthalten.

Man sieht aus Fig. 54. leicht ein, daß wenn in einem Dreyecke FCA aus der Mitte O der längern Seite FO ein Strahl OA in den gegenüber stehenden Winkel A gezogen wird, und dieser Strahl OA = OF = OC = ½ FC ist, sodann auch das Δ FAC rechtwinklig seyn müsse, weil man aus O über die drey Punkte F, A und C einen Kreis beschreiben kann, der FC zum Durchmesser hat und wo demnach ∠ CAF ein rechter seyn muß. Fig. 54.

Diese Bemerkung setzt uns auch in Stand, die Aufgabe zu lösen: auf einen Endpunkte A einer vorgezogenen Linie CA Fig. 54. eine Senkrechte AF zu errichten; wenn man den Mittelpunkt O zu einem Kreise an eine willkührliche Stelle neben der Linie AC setzt und mit der Entfernung AO einen Kreis CBAF ꝛc. beschreibt, der die vorgelegte Linie AC in C schneidet, sodann in C und O ein Linial anlegt und mit der verlängerten geraden Linie COF den Kreis in F durchschneidet, wo nun jetzt die aus A nach F gezogene Linie senkrecht auf AC steht.

III. Wenn innerhalb eines Kreises ABCDEF ein Dreyeck ACE Fig. 55. gezeichnet werden kann, das mit seinen Ecken in der Peripherie steht, so muß man auch wieder umgekehrt zu einem vorgelegten Dreyecke ACE einen Kreis zeichnen können, der durch alle drey Ecken des Dreyeckes geht. Der Mittelpunkt O zu einem solchen Kreise ABCDE wird gefunden, wenn man zwey Seiten AC und AE des Dreyeckes durch gezogene Senkrechten BK und FH halbirt und dann Achtung gibt, wo sich diese beyden Senkrechten durchschneiden, wo alsdann dieser Durchschnittspunkt O der gesuchte Mittelpunkt des Kreises ist. Der Radius ist = OA = OC = OE. Fig. 55.

Beweis.

Wenn zu einer Sehne AC ein Kreisbogen ABC geführt werden soll, der durch die Endpunkte A und C der Sehne geht, so kann der Mittelpunkt O überall in der Halbirungs-Senkrechten BK angenommen werden, (nach §. 28. IV. 5). Der Radius ist allemal

Fig. 55. = OA oder OC. Eben so ist es auch willkührlich, wohin man den Punkt O in die Halbirungssenkrechte FH setzt, wenn bloß zu zwey Punkten A und E oder zur Sehne AE ein Kreisbogen AFE geführt werden soll. Verlangt man aber, daß ein Kreis nicht nur in die Punkte A und C, sondern auch in die Punkte A und E, nämlich durch die drey Punkte A: C und E gehe, so kann man nur einen solchen Punkt O zum Mittelpunkt eines Kreises annehmen, der beyden Senkrechten BK und FH gemeinschaftlich ist, und dieser gemeinschaftliche Punkt ist der Durchschnitt O.

Würde man aus der Mitte L der Sehne EC ebenfalls auch eine Senkrechte DLO errichten, so würde dieselbe ebenfalls auch durch den Mittelpunkt O gehen, weil der gefundene Kreis ABCDEF schon so beschaffen ist, daß er durch die drey Ecken des Dreyeckes geht.

Anmerkung. Anfänger mögen sich ein stumpfwinklichtes Δ verzeichnen und hierzu den Mittelpunkt eines Kreises von der begehrten Beschaffenheit finden.

Fig. 56. IV. Im vorigen haben wir einen Kreis ums Dreyeck beschrieben, wenn aber Fig. 56. ein Kreis DEFGHI in ein Dreyeck ABC so gelegt werden soll, daß er die drey Seiten desselben nur in den Punkten F: H und D berührt, so liegt der Mittelpunkt O im Durchschnitte derjenigen Linien AO und BO oder auch CO, welche die Winkel BAC und ABC oder auch BCA halbiren. Der Radius OF = OH = OD ist die Senkrechte, welche aus O auf eine der drey Seiten gefällt wird.

Beweis.

Nach §. 28. V. kann zu zwey Tangenten AFB und ADC leicht ein Kreis DEFG ꝛc. geführt werden, der von den Tangenten berührt wird, wenn man den L BAC, welchen die Tangenten machen, durch eine in Scheitel A gezogene Linie AO halbirt und den Mittelpunkt O an eine beliebige Stelle dieser Linie AO setzt, wo alsdann der Radius OF oder OD eine aus O auf AB oder AC gefällte Senkrechte ist. Eben so kann man auch den Punkt O an eine belie-

lige Stelle der Linie BO, die den L ABC halbirt, setzen, wenn ein Kreis EFGHI geführt werden soll, der die beyden Schenkel BA und BC berührt. Soll aber ein solcher Mittelpunkt O gefunden werden, dessen Kreis DEFGHI nicht nur die Schenkel AC und AB, sondern auch die Schenkel BA und BC und mithin alle drey Seiten des Dreyeckes ABC berührt, so muß man offenbar einen solchen Punkt O wählen, der beyden Halbirungslinien AO und BO gemein ist, welcher kein anderer als der Durchschnittspunkt beyder Durchschnittslinien seyn kann. Die dritte Halbirungslinie CO muß durch denselben Punkt O gehen, weil schon ein Kreis gefunden worden ist, der alle drey Seiten des Dreyeckes berührt, und es ist auch bekannt, daß die Größe eines dritten Winkels sich schon von selbst aus der Größe der übrigen beyden Winkel eines Dreyeckes ergibt. Fig. 56.

V. Lehrsatz.

Laufen in einem Kreise zwey Sehnen MN und AC Fig. 55. parallel, so sind auch die zwischen liegenden Bögen AM und CN einander gleich. Und sind die Bögen AM und CN zwischen zwey Sehnen MN und AC einander einander gleich, so laufen diese auch parallel.

Dieß erhellt schon daraus, daß wenn man die Verbindungssehne AN zieht, sodann der Wechselwinkel ANM = NAC ist und mithin auch die Bögen AM und CN einander gleich seyn müssen. Sind umgekehrt diese Bögen einander gleich, so sind auch L NAC und ANM einander gleich und demnach MN und AC zu einander parallel.

Hieraus ergeben sich nun nachstehende drey Sätze.

1) Durchkreuzen sich zwey Sehnen DB und AC innerhalb eines Kreises Fig. 54., so hat der Winkel DIC oder BIA halb so viele Grade als die Summe der zwischen fallenden Bögen DC und AB. Fig. 54.

Denn wenn man aus A die Parallele AE zu BD zieht, so ist der Bogen ED = AB und der Winkel CAE = L CID. Nun hat der Winkel CAE halb so viele Grade als der Bogen CDE = CD + AB,

es hat daher auch der Winkel DIC halb so viele Grade als die beyden Bögen CD und AB zusammen.

2) Durchschneiden sich zwey Sehnen MN und
Fig. 55. EC Fig. 55. erst durch Verlängerung und zwar in einem Punkte P außerhalb des Kreises, so enthält der Winkel MPE halb so viele Grade, als die Differenz EFAM — NC der darzwischen fallenden Bögen.

Denn wenn man zu MN die Parallele AC zieht, so ist der Bogen AM = NC und der Winkel ACE = ∠ MPE. Nun hat der Winkel ECA halb so viel Grade als Bogen EFA = EFAM — MA = EFAM — NC, es hat daher auch, weil ∠ in P = ∠ in C, der Winkel EPM halb so viele Grade als die Differenz EFAM — NC der zwischen fallenden Bögen.

3) Gehen die Sehnen in Tangenten FB und HB
Fig. 56. Fig. 56. über, so muß ∠ FBH oder ∠ ABC halb so viele Grade als die Differenz der Bögen HIDEF — FGH enthalten. Es ist aber der Bogen HIDEF = 360 — FGH daher HIDEF — FGH = 360 — 2. FGH, wovon die Hälfte = 180 — FGH. Hiernach sind die Grade des Winkels FBA = 180° — FGH, welches Resultat wir schon auf einem andern Wege gefunden haben, indem dort OHB und OFB als rechtwinklige Dreyecke angesehen wurden, wo ∠ HOG = HG; ∠ HBO = 90 — HG und ∠ OBF = 90 — GF ist, woraus folgt, daß ∠ HBF = HBO + OBF = 90 — HG + 90 — GF = 180 — (HG + GF) = 180° — HGF ist.

VI. Endlich dürfen wir auch nicht folgenden Lehrsatz übersehen.

Wenn der Sehnenwinkel MNC am Umkreise
Fig. 55. Fig. 55. halb so viele Grade als der zwischen liegende Bogen MAFEDC hat, so wird auch der Nebenwinkel PNC halb so viel Grade als der übrige Theil MBNC des Kreises haben.

Denn wenn der ∠ MNC = α°, so ist der Nebenwinkel DNC = 180 — α; der Bogen MAFEDC = 2 α und der Bogen MBNC = 360 — 2 α =

2. (180 — α) und der halbe Bogen MBNC = 180 — α = ∠ PNC. Fig. 51.

Eben so ist auch der Winkel NCE in Graden = der Hälfte des Bogens NCDE.

Fünftes Kapitel.

Vergleichung der Seiten in einfachen Figuren.

---

§. 30.

Von der Congruenz der Dreyecke.

Zwey Dreyecke sind congruent, wenn sie in allen Stücken mit einander übereinstimmen, wo demnach beyde Dreyecke einerley Seiten und Winkel, einerley Abmessung in der Länge und Breite und gleiche Fläche haben.

Hieher gehören nun folgende Sätze.

I. Wenn in einem rechtwinkligen Dreyecke außer dem rechten Winkel, entweder noch eine Seite und ein Winkel oder noch zwey Seiten eben so groß sind und dieselbe Lage haben, wie in einem andern Dreyecke, so sind auch diese beyden Dreyecke in allen (übrigen) Stücken gleich.

Beweis.

1) Es sey (Fig. 42.) in zwey rechtwinkligen Dreyecken PRI und PNL nicht nur ∠ R in R = ∠ N in N = 90°, sondern auch ∠ RPI = ∠ NPL = α, so Fig. 42.

Fig. 42. ist der dritte Winkel PIR = ∠ PLN = 90° — α. Wenn nun auch noch die Hypothenuse PI = PL ist, so kann man damit aus P keine andere als gleiche Bögen HI und AL zu den gleichen Winkeln HPI und APL führen. Da nun zu gleichen Radien und gleichen Bögen auch gleiche Sinus und Cosinus gehören, so ist auch RI = NL und PR = PN.

2) Ist in einem und dem andern Dreyecke PRI und PNL die eine Cathete PR = PN, der rechte Winkel PRI = PNL und die Hypothenuse PI = PL, so ist auch ∠ IPR = ∠ LPN, weil zu gleichen Radien PL und PI und gleichen Cosinus PN und PR auch gleiche Bögen AL und HI und gleiche Winkel gehören, und sind diese Winkel gleich, so sind auch nach Nr. 14. die übrigen Stücke der beyden Dreyecke gleich.

Fig. 43. 3) Ist Fig. 43. in zwey rechtwinkligen Dreyecken OAN und ODT die eine Cathete OA (welche hier als Gleichmesser angesehen wird) = OD und außer dem rechten Winkel in A und D auch noch der (der Cathete anliegende) zweyte Winkel NOA = FOD, so sind auch die zugehörigen Tangenten AN und DT und Sekanten ON und OT einander gleich und der ∠ ONA = OTD ist die Ergänzung vom vorgelegten Winkel NOA.

4) Sind zwey Catheten OA und AN in einem rechtwinkligen Dreyecke OAN eben so groß als zwey Catheten OD und DT in einem andern, so sieht man OA und OD als Gleichmesser und AN und DT als Tangenten der ∠ AON und DOT an und schließt von der Gleichheit dieser Tangenten auf die Gleichheit der Winkel.

II. Wenn die einzelnen drey Seiten BF, BA und
Fig. 53. FA irgend eines Dreyeckes BFA Fig. 53. eben so groß sind, als die einzelnen drey Seiten BF; BH und FH eines zweyten Dreyeckes BFH; so sind auch die einzelnen drey Winkel in A, B und F des einen Dreyeckes BFA (welche Winkel nach der Ordnung den Seiten BF; AF und AB entgegen stehen) eben so groß, als die einzelnen drey Winkel in H, B und

F des andern Dreyeckes BFH (welche Winkel, wie Fig. 53. die vorigen eben so großen Seiten BF, FH und BH entgegen stehen).

Die Richtigkeit dieses Satzes ist zwar schon §. 28. hinlänglich gezeigt worden, wir wollen jedoch folgendes kurz anführen.

Man denke sich beyde Dreyecke BFA und BFH mit der einen gleichen Seite BF genau an einander gelegt, aus B mit BA = BH einen Kreisbogen AEH, und aus F mit FA = FH einen Bogen ACH beschrieben, welche sich in den Punkten A und H schneiden; so wird AH eine Sehne und die beyden Dreyecke ABH und AFH werden gleichschenklig seyn, worin ∠ BAH = ∠ BHA und ∠ FAH = ∠ FHA, und demnach auch ∠ BAF = ∠ BHF ist. Halbirt man die Bögen in E oder G und die Sehne AH in D, so steht BDF rechtwinklig auf AH und es ist jetzt in den rechtwinkligen Dreyecken BDA und BDH der ∠ ABD = ∠ HBD und in den rechtwinkligen Dreyecken FDA und FDH der ∠ BFA = ∠ BFH.

III. Wenn zwey Seiten BG und GD mit dem zwischen liegenden Winkel BGD des einen Dreyeckes BGD Fig. 49. eben so groß sind, als zwey Seiten Fig. 49. GB und BC mit dem eingeschlossenen ∠ GBC des andern Dreyeckes GBC; so ist auch die dritte Seite BD des einen = der dritten Seite CG des andern Dreyeckes, und es sind auch die ∠ DBG und CGB; ∠ BDG und ∠ GCB einander gleich, welche in einem und dem andern Dreyecke gleichen Seiten gegenüber stehen.

Denn man denke sich ein Dreyeck BGD ans andere GBC so gelegt, daß die gleiche Seite BH beyder Dreyecke genau über oder an einander zu liegen kömmt und die gleichen Winkel BGD und GBC beyder Dreyecke mit einander wechseln, so wird auch nach §. 27. IK, weil BC parallel und gleich DG ist, DB parallel und gleich GC seyn, welches auch ∠ BGC = ∠ GBD und der dritte Winkel GCB = BDG.

IV. Wenn Fig. 57. die Winkel ABC (= ABE), Fig. 57. eine anliegende Seite BA und eine dem Winkel B

welche parallel zur Seite AB gezogen wird, ein Dreyeck CFG zuwege bringt, das dieselben Winkel, wie das △ CAB hat. Dergleichen Dreyecke, worin zwey Winkel und demnach auch drey Winkel einerley sind, heißen bloß ähnliche Dreyecke, diese sind aber selten einander gleich. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist: ∽, und das Zeichen der Congruenz ≅.

Fig. 59. und 60.

V. Wenn Fig. 59. und 60. zwey Dreyecke ADE und FIK oder ABE und FGK in Ansehung der Seiten und Winkel congruent sind, und man irgend eine gleiche Seite AD und FI, oder AB und FG zur Grundlinie in beyden Dreyecken annimmt und aus dem gegenüber stehenden Scheitel E und K eine senkrechte Höhe EC und KH auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung fällt, so wird auch die Höhe EC und KH, ingleichen auch die abgeschnittenen Stücke AC und FH; DC und IH oder CB und HG und die Winkel AEC und FKH; DEC und IKH; BEC und GKH beyder Dreyecke einander gleich seyn.

Denn wenn der ∠ in A = ∠ in F und AE = FK, so ist auch der Sinus EC = KH, der Cosinus AC = FH und der Ergänzungswinkel AEC = ∠ FKH. Eben so kann man auch aus ∠ D = ∠ I und DE = IK zeigen, daß △ DEC dem △ IKH in allen Stücken gleich ist. Dasselbe ist auch mit den rechtwinkligen Dreyecken CBE und HGK der Fall.

VI. Ist die senkrechte Höhe EC und sind die Theile CA und CD (oder CB) der Grundlinie oder die Theile CEA und CED des Winkels AED in einem Dreyecke grad so beschaffen, wie im andern Dreyecke FIK, so sind auch beyde Dreyecke ADE und FIK congruent.

Um dieß zu beweisen, nimmt man die Senkrechten EC und KH als Gleichmesser, CA und CD als Tangenten; EA und ED als Sekanten an und beruft sich auf den Satz: Wenn die Tangenten oder Sekanten zweyer Winkel gleich sind, so sind auch die Winkel selbst einander gleich, und umgekehrt.

VII. Auf die Congruenz der Dreyecke gründet sich die Auflösung folgender Aufgaben, welche wir jedoch, weiter unten gemächlicher auflösen lernen werden.

1. Aufgabe. Die Entfernung zweyer Orte A und B Fig. 61., wo man wegen eines zwischen liegenden Sumpfes nicht von einem zum andern in gerader Linie gehen kann, zu messen. Fig. 61.

Auflösung. Man setze einen Stab C zur Seite an eine willkührliche Stelle, aus welcher man jedoch sowohl nach A als nach B gehen kann, verlängere AC nach CD und BC nach CE hin, messe CA und CB und mache CD = CA und CE = CB, so wird DE = AB und mithin einerley seyn, ob DE oder AB gemessen wird.

2. Aufgabe. Die Breite AB eines Flusses oder die Entfernung eines Ortes B von A Fig. 62. zu messen, wo man von B oder D aus nicht nach A kommen kann. Fig. 62.

Auflösung. Man setze einen Stab C in die Verlängerung der geraden Linie AB und einen zweyten Stab D zur Seite, verlängere CD und BD nach E und F hin, mache DE = DC und DF = DB und setze auch in E und F vertikale Stäbe. Jetzt gehe man in der Verlängerung der geraden Linie EF nach G hin fort, bis man an eine solche Stelle G kömmt, welche nicht nur in der geraden Linie EF, sondern auch in der geraden Linie AD liegt, und setze daselbst einen Stab ein. Die Entfernung FG ist = BA, weil △ DBC congruent △ DFE; DF = DB; ∠ DFG = ∠ DBA und ∠ BDA = ∠ FDG und demnach auch △ ABD congruent △ GFD, und FG = BA.

3. Aufgabe. Es soll Fig. 63. die Entfernung AH zweyer Orte A und H, die jenseits eines Flusses liegen, oder auch die Breite des Flusses gemessen werden, ohne daß man über den Fluß setzt. Fig. 63.

Auflösung. Man setze zwey Stäbe B und C mit dem Orte A in eine gerade Linie ABC und messe aus C nach einem Punkte E hin, der diesseits des Flusses dem Orte H gegenüber liegt und wenn man

Fig. 60. glaubt in der Mitte D angelangt zu seyn, so merke man die Ruthen in CD und mache die Verlängerung DE = DC. Jetzt setze man einen Stab I in einen Ort, wo sich die Verlängerungen von BD und HE durchschneiden, mache DH = DI und DF = DB oder IF = HB, setze sodann auch einen Stab L in den Durchschnitt der Linien KC und HD und einen Stab G in den Durchschnitt der Linien EF und AD, so wird die Entfernung GL dieser Stäbe = der Entfernung AH der vorgelegten Orte seyn.

Denn in den congruenten Dreyecken DGE und DAC ist DG = DA und in den congruenten Dreyecken DLK und DHI ist DL = DH und da auch ∠ ADH = GDL, so ist auch Δ LDG mit dem Dreyecke HDA congruent und HA = LG.

Fig. 61. Anmerkung. Macht man, wie oben in Fig. 61. CE = CB und CD = CA, so läuft ED zu AB parallel, weil in den congruenten Dreyecken CBA und CED der ∠ in B = ∠ in E und auch ∠ in A = ∠ in D ist.

§. 31.

Von Gleichheit der Parallelogramme und Dreyecke in Hinsicht der Fläche.

Was eine Fläche ist, haben wir schon im zweyten Kapitel gesehen. Jetzt schreiten wir zur Messung der einfachen Flächen, wohin wir die Parallelogramme und Dreyecke rechnen, und führen hierüber folgendes an.

1. Das Mas oder der Masstab zu den Flächen
Fig. 5. ist ein Rechteck ABDC Fig. 5., das eben so lang als breit und mithin ein Quadrat ist.

Stellen wir uns vor, es wäre in einer Ebene eine gerade Linie CD, welche wir Abscisse nennen wollen, vorgezogen, und auf derselben senkrechte Linien CA; HG; DB ꝛc., welche wir Ordinaten nennen wollen, errichtet, welche sich in der zu CD quergelegten Grenzlinie AB endigen; so werden alle diese Ordinaten eine gleiche Länge haben. Es ist daher ein Rechteck eine solche Fläche, worin die Or-

dinaten eine unveränderte Länge haben; und ein Quadrat ist eine solche Fläche, worin die Ordinaten der ganzen Abscisse CD gleich sind. Fig. 63.

Da Länge und Breite eines Quadrats gleich groß sind, so pflegt man die Seite CD oder CA desselben die Basis zu nennen. Ist die Basis, nämlich eine Linie CD zu einem Quadrate gegeben, so kann man sich auch die Größe des ganzen Quadrats CDBA vorstellen und dasselbe vorzeichnen: wenn man in C und D Senkrechte CA und DB auf CD errichtet, CA und DB = CD macht und die Linie AB zieht; oder wenn man bloß in C eine Senkrechte CA errichtet, hierzu aus D eine Parallele DB zieht und diese Parallelen = CD macht; oder wenn man nur eine Senkrechte CA auf CD errichtet, diese = CD macht, sodann die mit dem Zirkel gefaßte Linie CD nicht nur aus A nach B überträgt und in B einen Bogen beschreibt, sondern auch aus D nach B überträgt und daselbst den Bogen in B schneidet, am Ende die Linien AB und DB zum Durchschnittspunkte B ziehet. Hierdurch wird das △ ADC = △ DAB gemacht und mithin ist auch ∠ ABD = ∠ DCA.

Ist die Basis eine Ruthe groß, so heißt die zugehörige Fläche CABD Quadratruthe. Wäre die Basis nur einen Fuß oder Zoll, oder gar nur eine Linie groß, so wäre auch die zugehörige Fläche CDBA nur ein Quadratfuß, Quadratzoll, oder Quadratlinie. Eben so hat man auch Quadrattoisen, Quadratmeilen und so fort. Statt Quadrat-Ruthen, Quadrat-Fußen ꝛc. pflegt man auch zu schreiben: □ Ruthen, Fuße ꝛc., oder bloß □R.; □F. oder R^2; F^2, welche letzte Bezeichnung aber erst in der Folge ganz deutlich werden wird.

II. Lehrsatz. Die Fläche eines Rechtecks wird gefunden, wenn man die Abscisse und Ordinate desselben mit einander multiplicirt. Nämlich es ist (Fig. 64.) Rechteck ABCD = AB × BC = DA × AB. Fig. 64.

Beweis. Die größe einer Fläche hängt von der Zahl der Quadratruthen oder Quadratklafter ab,

Fig. 64. welche in der zu messenden Fläche enthalten sind. Ist nun AEFG eine Quadratruthe und mithin AE und AG eine Ruthe lang, so können offenbar dieser Quadrate auf der Seite AB eben so viele stehen, als bloße Ruthen AE in AB enthalten sind oder als die Seite AB lang ist. Wir zählen daher auf der Linie AB, welche 7 Ruthen lang ist, auch 7 Quadratruthen, welche in einem Riemen ABLG an einander liegen. Es ist aber ein solcher Riemen nur 1 Ruthe breit und es können von AB bis DC eben so viele dieser Riemen neben einander liegen, als wie oftmal die Ruthe AG in AD oder BC enthalten ist; daher auch die Zahl (7) der Ruthen in AB mit der Zahl (5) der Ruthen oder Riemen in AD multiplicirt werden muß, um die Zahl (5. 7 = 35) aller Quadrate im Rechteck ABCD zu finden.

Ist daher die eine Seite AB = a R. und die andere AD = b R, und setzt man die Fläche des Rechteckes ABCD = f, so ist f = a R × b R = ab R^2 = a. b □R, sollte das Zeichen □R sich nicht setzen lassen, so kann dafür □R gesetzt werden.

An der Seite AD können 5 der Quadrate AGFE in einen Riemen ADME liegen: da nun das Rechteck von AD bis BC sieben dieser Riemen ADME enthält und jeder Riemen 5 □R groß ist, so wird auch das ganze Rechteck ADCB = 7. 5 □R groß seyn, daher ADCB = AD × AB = BA × AD.

Ist AE = 1 Ruthe und EF = 1 Ruthe, so ist die Fläche f des Quadrates AEFG = AE × EF = 1 R × 1 R = 1 R^2 = 1 □R.

Fig. 5. Wird in Fig. 5. CD und demnach auch DB = 12 Fuß gesetzt, so ist die Fläche CDBA = CD × DB nämlich f = 12 F × 12 F = 12. 12. F^2 = 12^2 F^2 = 144 □F. Man sieht aus diesem, daß, wenn die Ruthe 10; 12; oder 14; 16 Fuß lang ist, sodann die Quadratruthe auch 10^2 F^2; 12^2 F^2; oder 14^2 F^2; 16^2 F^2 enthält, wo 10^2 = 100; 12^2 = 144; 14^2 = 196; 16^2 = 256 ist. Das Quadrat

drat von 14 Fußen ist daher beynahe noch einmal so groß als das Quadrat von 10 Fußen.

Ist CD = 1 Ruthe und CH = $\frac{1}{2}$ Ruthe, so ist das Quadrat von CD nämlich CDBA = 1^2 R^2 = 1 □R und das Quadrat von CH nämlich CHRE = CH × HR = $\frac{1}{2}$ R × $\frac{1}{2}$ R = $\frac{1}{4}$ R^2 und man sieht vor Augen, daß CHRE wirklich der vierte Theil von CDBA ist.

Wäre in Fig. 64. die Seite AE = 1 F, so würde AEFG = 1 □F = 1 F^2 seyn. Es ist aber auch, wenn 1 Ruthe = 12 Fuß ist, AE = $\frac{1}{12}$ Ruthe, daher AEFG = AE × EF = $\frac{1}{12}$ R × $\frac{1}{12}$ R = $\frac{1}{144}$ R^2. Wirklich ist auch 1 □R = 144 □F und 1 □F = $\frac{1}{144}$ □R. Fig. 64.

III. Lehrsatz. Die Fläche eines Parallelogrammes ABEF Fig. 38. wird gefunden, wenn man eine Seite AB mit dem senkrechten Abstande BC = AD der gegenüber stehenden Parallelen FC multiplicirt. Nämlich es ist ABEF = AB × BC. Fig. 38.

Beweis. Schneidet man vom Parallelogramme AFEB durch eine auf FE aus B gezogene Senkrechte BC das Stück BCE ab und setzt es in ADF an, so erhält man ein Rechteck ABCD, das eben so groß als das Parallelogramm ABEF ist. Multiplicirt man nun AB mit BC, so erhält man eigentlich die Fläche des Rechteckes ABCD, welches aber die Fläche des vorgelegten Parallelogramms ABEF zugleich ist. Sollte Jemand an der Gleichheit des Parallelogramms und Rechtecks zweifeln, der bedenke, daß △ BCE = △ ADF. Wird nun die Fläche eines solchen Dreyeckes = g □R und die Fläche der Figur ABCF = f □R gesetzt, so ist ABCD = ABCF + FAD = f + g und auch ABEF = AFCB + BCE = f + g.

Es ist Fig. 51. ganz willkührlich, welche Seite man zur Abscisse (Grundlinie) zum Berechnen der Fläche eines Parallelogramms FGDB wählt. Wählt man FG oder BD zur Grundlinie, so ist GC (= FA) die Höhe und wählt man FB (= GD) zur Grundlinie, so ist GM oder DE die Höhe, nämlich es ist Viereck FGDB = FG × GC = FB × DE. Fig. 51.

IV. Lehrsatz. Die Fläche eines Dreyeckes DGB
Fig. 49. Fig. 49. wird gefunden, wenn man irgend eine Seite DG desselben als Grundlinie, den Abstand BE (= LG) der durch den Scheitel B geführten Parallelen AC als Höhe ansieht, die Grundlinie DG mit der Höhe BE multiplicirt und das Produkt halbirt, oder wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die ganze Höhe mit der halben Grundlinie multiplicirt. Nämlich es ist $\Delta DGB = \frac{DG \times BE}{2} = \frac{1}{2} DG \times BE = \frac{1}{2} BE \times DG$.

Beweis. Verzeichnet man zu dem vorgelegten Dreyecke DGB ein Parallelogramm DGCB von derselben Grundlinie DG und senkrechten Höhe EB, indem man GC ∥ und = DB oder BC ∥ und = DG macht, so wird man sogleich gewahr, daß das Parallelogramm DGBC aus zwey gleichen Dreyecken DGB und CBG besteht. Setzen wir nun die Fläche eines solchen Dreyeckes = f, so ist das Parallelogramm DGCB = 2 f = 2 Δ DGB, woraus folgt, daß ein solches Δ DGB die Hälfte des zugehörigen Parallelogramms DGCB ist. Multiplicirt man nun DG mit BE, so erhält man eigentlich die Fläche des Parallelogramms und dividirt man dieß Produkt DG × BE durch 2, so erhält man die Fläche des Dreyeckes $DGB = \frac{DG \times EB}{2}$.

Daß ein Δ DGB die Hälfte von einem Rechtecke DGLA sey, das gleiche Grundlinie DG und Höhe BE mit dem Rechtecke hat, kann auch auf folgende Art bewiesen werden. Man theile das Dreyeck DGB durch die Senkrechte BE in zwey Theile BED und BEG, so ist der eine Theil BED die Hälfte von dem einen Theil BEDA des Parallelogramms und der andere Theil BEG des Dreyeckes auch die Hälfte vom andern Theil BEGL des Parallelogramms, daher auch beyde Theile zusammen oder das ganze Dreyeck DGB die Hälfte vom Rechtecke DGLA. Eben so ist auch
Fig. 65. in Fig. 65. Δ CBI = ½ □ BCFH, weil Δ CAI = ½ □ CAIF und Δ BAI = ½ □ BAIH und die

Differenz der beyden letzten Gleichungen = Δ CBI = □ CBHF ist, wo Δ BGI = Δ ACI = Δ CBI und □ BCFH = □ ACFI — □ ABHI.

V. Zusatz. Die Höhe BE eines Dreyeckes DGB Fig. 49. ist eigentlich der senkrechte Abstand, der durch den Scheitel B zur Grundlinie DG gezogenen Parallelen, doch kann man auch sagen, daß die Höhe bloß eine zur Grundlinie DG aus dem gegenüber stehenden Winkel B gezogene Senkrechte BE sey. Fig. 49.

Nimmt man bey einem stumpfwinkligen Dreyecke ABF Fig. 59. eine von den zwey Seiten, welche den stumpfen Winkel machen, zur Grundlinie an, und wählt man z. B. die Seite AB zur Grundlinie, so kann nur auf die Verlängerung BD der Grundlinie eine senkrechte Höhe EC gefällt werden, wo nun Δ ABE = $\frac{AB \times EC}{2}$ ist. Fig. 59.

Wenn die Fläche eines Dreyeckes BCA Fig. 66. gesucht werden soll, so ist es, wie schon bemerkt, willkührlich, welche von den drey Seiten als Grundlinie angenommen wird, die Höhe ergiebt sich dann von selbst. Nimmt man nämlich AB zur Grundlinie an, so ist die Höhe die aus dem gegenüber stehenden Winkel C auf AB gefällte Senkrechte CH. Nimmt man BC zur Grundlinie an, so ist wegen des stumpfen Winkels in C, die Höhe diejenige Senkrechte AD, welche aus dem gegenüber stehenden Winkel A auf die Verlängerung CE der Grundlinie gefällt wird; und nimmt man AC zur Grundlinie des Dreyeckes ACB an, so ist die Höhe eine Senkrechte BG, welche auf AC oder ihre Verlängerung gefällt wird. Es ist daher das Δ BCA = $\frac{AB \times CH}{2}$ = $\frac{BC \times AD}{2}$ = $\frac{AC \times BG}{2}$. Fig. 66.

VI. Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander in der Fläche gleich. Eben so haben auch Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe eine gleiche Fläche.

Denn wenn die Grundlinie aller Parallelogramme und Dreyecke = a und ihre Höhe = b, so ist die

Fläche aller Parallelogramme $= a \times b$ und aller Dreyecke $= \frac{ab}{2}$, wie aus dem vorigen klar.

Fig. 65. So z. B. ist Fig. 65. in allen Parallelogrammen BCGI; BCFH und BCEG die Grundlinie $=$ BC und die Höhe $=$ BH, weil BC $\#$ zu IE, daher auch die Fläche aller $\square = BC \times BH$.

Eben so ist in allen Dreyecken BIC; BGC; BEC; ICG und GCE die Grundlinie $a = BC = IG = GE$ und die Höhe $b = AI = BH = ED$, daher auch die Fläche aller dieser Dreyecke $\frac{ab}{2} = \frac{BC \times CF.}{2}$

VII. Auch dann, wenn die Grundlinie und Höhe von zwey Parallelogrammen oder Dreyecken nicht gleich ist, kann doch die Fläche derselben gleichgroß seyn, wenn nur das Produkt aus der Grundlinie und Höhe bey beyden Parallelogrammen oder Dreyecken gleichgroß ist. So z. B. ist $4 \times 6 = 24$ und auch $3 \times 8 = 24$ und auch $\frac{4.6}{2} = \frac{3.8}{2}$.

VIII. Ist die Fläche $f \square R$ eines Parallelogramms CBIG Fig. 65. und die senkrechte Höhe $BH = h$ gegeben oder bekannt, so muß die Grundlinie BC und die zugehörige Parallele $IG = g = \frac{f}{h}$ seyn. Und ist die Fläche f und die Grundlinie g gegeben, so muß die Höhe $h = \frac{f}{g}$ seyn.

Denn es ist bey einem Parallelogramme $f = g.h$, aus welcher Gleichung von selbst folgt: $g = \frac{f}{h}$ und $h = \frac{f}{g}$.

Soll z. B. zwischen den Parallelen BD und IF ein Parallelogramm BIGC von 24 $\square R$ angelegt werden, so hat man nur nöthig, den senkrechten Abstand BH der Parallelen zu messen, mit demselben in die Fläche zu dividiren und die Grundlinie BC oder IG $=$ dem erhaltenen Quotienten zu machen. Ist nun BH $= 4$, so muß BC und IG $= \frac{24}{4} = 6$ werden.

Auf dieselbe Art kann man auch verfahren, wenn Fig. 65.
die Parallelen BI und CG vorgezogen wären und zur Linie CB eine Parallele GI dergestalt geführt werden soll, daß das Parallelogramm eine vorausbestimmte Fläche f von 24 □R enthält, wo man mit der senkrechten Entfernung CK der beyden Parallelen IB und GC in f dividirt und BI und CG = dem erhaltenen Quotienten $\frac{f}{CK}$ macht. Doch kann man auch mit BC = a in f dividiren und die Höhe BH = h = $\frac{f}{a}$ machen und zu BC eine solche Parallele IG ziehen, die durch den Endpunkt H der Senkrechten BH geht.

IX. Wird in einem Dreyecke die Grundlinie = a und die Höhe = c gesetzt, so ist die Fläche s = $\frac{ac}{2}$, aus welcher Gleichung folgt:

$$a = \frac{2s}{c} = \frac{s}{\frac{1}{2}c} \text{ und}$$

$$c = \frac{2s}{a} = \frac{s}{\frac{1}{2}a}.$$

Man findet daher die Grundlinie a zu einem Dreyecke von einer vorausbestimmten Fläche s □R, wenn man s durch die halbe Höhe, oder die zweyfache Fläche durch die ganze Höhe c dividirt. Ist die Grundlinie a gegeben, so findet man die Höhe c, wenn man die Fläche s durch die halbe Grundlinie oder die zweyfache Fläche durch die ganze Grundlinie a dividirt.

Ist z. B. ein Punkt D im Schenkel AD Fig. 67. Fig. 67.
gegeben, und soll aus demselben eine Linie DE zu einem zweyten Schenkel AE so geführt werden, daß das entstehende Dreyeck ADE = s □R wird, so fällt man aus D eine Senkrechte DF, dividirt mit ihrer Länge DF in 2 s und macht AE = $\frac{2s}{DE}$ oder = $\frac{s}{\frac{1}{2}DE}$. Eben so ist auch in Fig. 65. BC = $\frac{2 \times \triangle BCI}{IA} = \frac{\triangle BCI}{\frac{1}{2}IA}$.

Fig. 65. Ist zu einem Dreyecke BCI Fig. 65. die Fläche s, die Linie BC gegeben und der Winkel CBI vorgezogen, und soll aus dem Punkte C eine Linie CI nach einem Punkte I des Schenkels BI so geführt werden, daß das entstehende △ CBI wirklich = s □R wird; so kann der Punkt I auf zweyerley Art gefunden werden.

1) Wenn man aus C eine Senkrechte CK auf IB oder ihre Verlängerung fällt und BI = $\frac{\triangle CBI}{\frac{1}{2}CK}$ macht, oder

2) wenn man auf BC eine Senkrechte BH errichtet und diese = $\frac{\triangle BCI}{\frac{1}{2}BC}$ macht, und den Punkt durch eine über H zu CB geführte Parallele FHI schneidet.

Fig. 67. X. Ein Parallelogramm ABCD Fig. 67. wird in ein Dreyeck AED von gleicher Fläche verwandelt, wenn man irgend eine Seite AB verlängert und AE = 2 AB macht und die Linie DE zieht. Umgekehrt wird ein △ AED in ein Parallelogramm ABCD verwandelt, wenn man AE in B halbirt, aus B eine Parallele BC zu AD und aus D eine Parallele DC zu AB führt.

Diese beyden Sätze bedürfen keines Beweises.

XI. Lehrsatz. Parallelogramme und Dreyecke von gleicher Höhe stehen mit ihren Grundlinien — und Parallelogramme und Dreyecke von gleichen Grundlinien stehen mit ihren Höhen im Verhältnisse.

Denn es sey die Fläche eines Parallelogramms = f oder Dreyeckes = s, seine Grundlinie = a und Höhe = h, so ist f = ah und s = $\frac{ah}{2}$. Ferner sey die Fläche eines andern Parallelogramms = g oder Dreyeckes = u, dessen Grundlinie = b und Höhe aber ebenfalls = h, so ist g = bh und u = $\frac{bh}{2}$. Da nun

ah : bh = a : b eine wörtlich richtige Proportion und ah = f und bh = g ist, so wird auch f : g = a : b eine richtige Proportion seyn. Und da

$\frac{ah}{2} : \frac{bh}{2} = a : b$, so ist auch

$s : u = a : b$.

Es stehen daher die Flächen f und g, oder s und u, welche gleiche Höhen haben, mit ihren Grundlinien a und b im Verhältnisse.

Wird die Grundlinie in beyden Parallelogrammen und Dreyecken $= h$, ihre Höhe aber $= a$ und b gesetzt, so erhält man dieselben Resultate:

$ha : hb = a : b$ oder

$f : g = a : b$ und

$\frac{ha}{2} : \frac{hb}{2} = a : b$ oder

$s : u = a : b$.

Daher auch die Flächen der Parallelogramme und Dreyecke von gleichen Grundlinien mit ihren Höhen im Verhältnisse stehen.

In Fig. 65. haben die Rechtecke ABHI und BCFG eine gleiche Höhe BH, daher auch □ ABHI : □ BCFH = AB : BC. Fig. 65.

Eben so haben auch die Dreyecke ABI; ACL und BCG eine gleiche Höhe BH, daher auch △ ABI : △ ACI : △ BCG = AB : AC : BC.

§. 32.

Vom Verhältnisse der Linien in ähnlichen Dreyecken.

Aehnliche Dreyecke sind nach §. 30. solche, worin die einzelnen Winkel des einen Dreyeckes eben so groß sind, als die einzeln Winkel des andern. Es ist aber schon genug, wenn nur zwey Winkel in den beyden Dreyecken gleichgroß sind, der dritte Winkel muß sodann in beyden Dreyecken gleichgroß seyn.

Ist das Dreyeck APN Fig. 68. dem Dreyecke ARQ ähnlich, oder mit andern Worten, ist ein Winkel A in beyden Dreyecken gleichgroß und ein zweyter Winkel APN des einen Dreyeckes eben so groß als ein zweyter Winkel ARQ des andern, so wird auch ein dritter Winkel ANP und AQR des einen und des Fig. 68.

Fig. 68. andern Dreyeckes gleichgroß seyn, und man nennt die Seiten AN und AQ, welche in beyden Dreyecken gleichen Winkeln P und R gegenüber stehen, gleichnamig. Eben so sind auch die Seiten AP und AR und die Seiten PN und RQ in beyden Dreyecken APN und ARQ gleichnamig, weil die ersten Seiten den gleichen Winkeln in N und Q und die letzten dem gleichen Winkel in A entgegen stehen. Sind zwey Seiten AN und AQ gleichnamig, so stehen nicht nur gleiche Winkel ihnen gegenüber, sondern es sind auch die anliegenden Winkel A und N der einen Seite AN eben so groß, als die anliegenden Winkel A und Q der andern Seite AQ. Eben so sind auch die anliegenden Winkel P und N der Seite PN eben so groß als die anliegenden Winkel R und Q der gleichnamigen Seite RQ.

I. Hauptsatz.

In ähnlichen Dreyecken stehen die gleichnamigen Seiten mit einander in Proportion.

Ist nämlich $\triangle$ APN $\sim$ $\triangle$ ARQ, so finden folgende Proportionen Statt:

1) AN : NP = AQ : QR;
2) NA : AP = QA : AR;
3) AP : PN = AR : RQ.

Oder:

1) AN : AQ = NP : QR;
2) NA : QA = AP : AR;
3) AP : AR = PN : RQ,

wo die Glieder einer jeden Proportion vermöge §. 166. des ersten Bandes der Mathematik noch auf vielerley Art geordnet werden können.

Denkt man sich beyde Dreyecke APN und ARQ, wie in Fig. 68., so auf einander gelegt, daß der gleiche Winkel A beyder Dreyecke sich deckt und der Winkel P ein Parallelwinkel mit dem gleichen Winkel R wird, so läuft die Seite PN zu RQ parallel; und wenn man alsdann aus P noch eine Parallele PU zu AQ gezogen denkt, so wird PU = NQ und das $\triangle$ RPU

ebenfalls den Dreyecken PAN und RAQ ähnlich seyn, u. s. w. woher noch folgende Proportionen:

4) AP : PN = PR : RU;
5) PA : AN = RP : NQ (oder PU).
6) AN : NP = NQ : UR;
7) AR : AQ = PR : NQ;
8) RU : UP = RQ : QA;
9) RU : UP = PN : NA;
10) RU : RP = RQ : RA;

und so fort.

Beweis zum Hauptsatze.

Erster Beweis.

Man denke die Abmessungen AB; BC; DE ꝛc. alle = a und mithin einander gleich, und führe aus diesen Abmessungspunkten zu NP oder QR die Parallelen BF; CG; DH; EI ꝛc. und aus den Schneidepunkten F; G ꝛc. (der Linie AR) die Parallelen FK; GL; HM ꝛc. zu AB oder AQ, so sind, weil Parallellinien zwischen Parallelen einander gleich und auch die Parallelwinkel einander gleich sind, auch die Dreyecke ABF; FKG; GLH; HMI einander gleich, und zwar sind, wenn AB = a; AF = b und FB = c gesetzt wird, im Dreyecke ACG die Seiten AC = 2 a; AG = 2 b und EG = 2 c; im ähnlichen Dreyecke ADH die Seiten AD = 3 a; AH = 3 b und HD = 3 c, und so ist ferner im folgenden ähnlichen Dreyecke AEI jede Seite viermal so groß, als eine gleichnamige Seite des Dreyeckes ABF, und man sieht vor Augen, daß so oftmal AB in AN liegt, auch AF in AP und BF in NP liegen müsse. Setzen wir nun, daß AB in AN mmal fortgetragen werden könne oder daß AN = ma sey, so wird auch AF in AP und BF in NP mmal fortgetragen werden können, oder AP = mb und NP = mc im Dreyecke ANP seyn. Setzen wir ferner in einem andern ähnlichen Dreyecke AQR die Seite AQ = na, so ist die zweyte Seite AR = nb und die dritte QR = nc. Da nun

1) a : b = ma : mb = na : nb;
2) a : c = ma : mc = na : nc und;
3) b : c = mb : mc = nb : nc

Fig. 68. richtige Proportionen sind, so werden auch, wenn wieder statt ma; mb; na ꝛc. die zugehörigen Seiten AN; AP; AQ gesetzt werden, folgende Proportionen ebenfalls richtig seyn.

1) AN : AP = AQ : AR;
2) AN : NP = AQ : QR und
3) AP : PN = AR : RQ.

Nachdem nun dargethan worden ist, daß zwey Seiten eines Dreyeckes gegen einander sich verhalten, wie zwei gleichnamige Seiten eines ähnlichen Dreyeckes, so wird man alle oben angeführte Proportionen richtig finden.

Man konnte auch diesen Beweis auf folgende Art führen:

Da AB in AN eben so vielmal liegt, als AF in AP und BF in NP, so sind auch die Quotienten einander gleich:

$\frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AF} = \frac{NP}{BF}$ und die Proportionen richtig:

AN : AB = AP : AF;
AN : AB = NP : BF und
AP : AF = NP : BF oder durch Verwechslung der mittlern Glieder:
AN : AP = AB : AF
AN : NP = AB : BF und
AP : NP = AF : BF.

Eben so sind auch folgende Quotienten gleich:

$\frac{AQ}{AB} = \frac{AR}{AF} = \frac{RQ}{BF}$ woher auch

AQ : AR = AB : AF
AQ : RQ = AB : AF und
AR : RQ = AF : BF.

Da nun die rechte Seite dieser und der vorigen Proportionen gleich ist, so wird auch die linke Seite gleich seyn, weßhalb

AN : AP = AQ : AR;
AN : NP = AQ : PR;
AP : NP = AR : RQ.

Zweyter Beweis.

Fig. 69. Es sey das △ ABC Fig. 69. dem Dreyecke ADE ähnlich und mithin, wenn beyde gehörig auf einander

gelegt werden, BC zu DE parallel, so wird, wenn Fig. 69.
die Diagonalen BE und CD gezogen werden, das △ BEC = △ CDB seyn, weil diese Dreyecke eine gleiche Grundlinie BC haben und ihre Höhe zwischen den Parallelen BC und DE liegt. Es ist daher auch △ ADC = △ AEB, weil △ ADC = △ ABC + △ CBD = △ ABC + △ CBE = △ ABE ist. Nun haben die Dreyecke ABC und ADC eine gleiche Höhe CF, daher sie sich auch (nach §. 31. XI.) wie ihre Grundlinien AB zu AD verhalten, nämlich

△ ABC : △ ADC = AB : AD. Ferner haben auch die Dreyecke ACB und AEB, wenn AC und AE als Grundlinien angesehen werden, eine gleiche Höhe BG, daher auch

△ ACB : △ AEB = AC : AE.

Da nun die linke Seite dieser und der vorigen Proportion gleich ist, nämlich nicht nur △ ABC = △ ACB sondern auch △ ADC = △ AEB, so ist auch die rechte Seite derselben gleich, woher

AB : AD = AC : AE.

Legt man das Dreyeck ACB mit dem Winkel C in E und nachher auch den Winkel B in D, so kann man auf dieselbe Art auch beweisen, daß

CA : EA = CB : ED und

BA : DA = BC : DE ist.

Anmerkung. Man setze im Dreyecke AQR Fig. 68. Fig. 68.
eine Abscisse AQ = a und die zugehörige Ordinate QR = b; ferner sey irgend eine andere Abscisse AD oder AN = x und die zugehörige Ordinate DH oder NP = y, so wird, weil a : b = x : y ist, auch $y = \frac{b}{a} \cdot x$ seyn. Suchen wir nun den Werth des Bruches $\frac{b}{a} = m$, so ist $y = mx$; woraus klar, daß die Ordinaten y eines Dreyeckes blos von der Länge ihrer Abscissen abhängig sind und daß wenn x gleichförmig wächst oder abnimmt, auch y gleichförmig wächst oder abnimmt.

II. Bezeichnung der ähnlichen Dreyecke.

Um die Aehnlichkeit zweyer Dreyecke ANP und
Fig. 68. ITR Fig. 68. durch drey Buchstaben an ihren Ecken gehörig zu bezeichnen, ist es nicht einerley, in welcher Ordnung man in der Formel Δ ANP $\backsim$ Δ ITR die drey Buchstaben A; N und P des ersten Dreyeckes und die drey Buchstaben I; T und R des andern auf einander folgen läßt, sondern es muß der erste Buchstabe A und I beyder Dreyecke und so auch der zweyte N und T und der dritte Buchstabe P und R an einer gleichen Ecke beyder Dreyecke zu stehen kommen. Hat man nun die ähnlichen Dreyecke nach dieser vorgeschriebenen Ordnung der Buchstaben namhaft gemacht, so kann man schon aus der Form:

Δ ANP $\backsim$ Δ ITR selbst

jede richtige Proportion herleiten, wenn man in beyden Dreyecken dieser Form

1) vom ersten Buchstaben zum zweyten und vom zweyten zum dritten übergeht, als

AN : NP = IT : TR, oder:
AN : IT = NP : TR,

2) wenn man vom ersten zum dritten springt, und vom dritten zum zweyten zurückgeht, als

AP : PN = IR : RT oder:
AP : IR = PN : RT

3) wenn man vom zweyten zum ersten und vom ersten zum dritten springt, als

NA : AP = TI : IR, oder:
NA : TI = AP : IR.

Da bey diesem Uebergehen von einem Buchstaben zum andern und von diesem zum dritten jeder Buchstabe einmal in der Mitte zu stehen kömmt, so sind auch nur drey wesentliche Proportionen möglich.

Diese Bezeichnungsart ähnlicher Dreyecke ist vorzüglich in dem Falle zu merken, wenn zwey ähnliche Dreyecke an ganz verschiedenen Orten liegen sollten, welcher Fall in Zukunft oft eintreten wird.

III. Lehrsatz. In ähnlichen Dreyecken stehen Grundlinien und Höhen und alle gleichnamige Theile zu einander im Verhältnisse.

Wenn nämlich in Fig. 70. ABC und ADE ähn- Fig. 70.
liche Drepecke sind und die gleichnamigen Seiten AB und AD zu Grundlinien und die (aus den gegenüber stehenden Scheiteln C und E) darauf gefällten Senkrechten EF und EG zu Höhen angenommen werden, so gelten die Proportionen:

AB : CF = AD : EG, oder
AB : AD = CF : EG und
AB : AF = AD : AG;
AB : BF = AD : DG:
CF : FA = EG : AG und
CE : FB = EG : GD und
AF : FB = AG : GD.

Beweis. Es ist

1) AC : AE = AB : AD und
2) AC : AE = CF : EG, daher,

weil die linke Seite dieser Proportionen gleich ist, auch die rechte Seite derselben gleich seyn muß, nämlich.

3) AB : AD = CF : EG.

Ferner ist in Δ AFC ∽ Δ AGE,

4) AC : AE = AF : AG, daher (vermöge 1)
5) AB : AD = AF : AG.

In Δ CBF ∽ Δ EDG ist

6) CF : EG = BF : DG, daher (vermöge 3)
7) AB : AD = BF : DG und endlich auch
8) AF : AG = BF : DG (vermöge 5).

Nimmt man in Fig. 71. BC und EF zu Grund- Fig. 71.
linien der ähnlichen Drepecke BCA und EFA an, so ist AH und AI die zugehörige Höhe, und es muß jetzt

EF : BC = AI : AH, oder
EF : AI = BC : AH seyn.

Denn es ist

AE : AB = EF : BC und
AE : AB = AI : AH, daher auch
EF : BC = AI : AH.

IV. Anwendung der Lehre von ähnlichen Drepecken aufs Theilen einer Linie in gleiche Theile.

Eine gerade Linie AV Fig. 68. wird in 5 oder Fig. 68

Fig. 68. m gleiche Theile getheilt, wenn man aus dem Anfangspunkte A der vorgelegten Linie noch eine gerade Linie AP darneben unter einem beliebigen Winkel PAV zieht, in dieser Linie AP (im Punkte A angefangen) ein beliebiges Stück fünf- oder mmal fortträgt und dadurch AF = FG = GH ꝛc. macht; an den fünften oder mten Punkt in W dieser — und an den Endpunkt V der vorgelegten Linie ein Abschiebedreyeck (welches an einem angefügten geraden Lineale verschoben werden kann) anlegt und mittelst dieser Werkzeuge die Parallellinien IE, HD, GC ꝛc. zu WV zieht, durch welche die begehrten Theilungspunkte E; D; C; B der Linie AV geschnitten werden.

Hierdurch wird zugleich auch die Linie VW in 5 oder m gleiche Theile getheilt, und zwar ist BF = $\frac{1}{5}$ VW; CG = $\frac{2}{5}$; DH = $\frac{3}{5}$ und EI = $\frac{4}{5}$ VW, wo wenn VW selbst = 5 Fuß wäre, sodann BF = 1 Fuß; CG = 2; DH = 3 Fuß ꝛc. ist.

V. Anwendung der Lehre von Parallelogrammen und ähnlichen Dreyecken aufs genaue Messen und Auftragen einer Linie auf dem Papiere.

Fig. 72. Man ziehe die gerade Linie AL Fig. 72.; errichte auf derselben die senkrechten Linien AB und LM und trage in diese Senkrechten von A nach B und von L nach M zehn gleiche Theile von beliebiger Größe und ziehe in diese Theilpunkte zu AL zehn gleichweit abstehende Parallelen; fasse mit dem Zirkel einen Zoll AO und trage diesen Zoll sowohl in AL als BM so vielmal fort, als die Länge AL und BM es erlaubt, und ziehe die einen Zoll weit abstehenden Parallelen AB; OC; 10 .. 10; 20 .. 20; 30 .. 30; 40 .. 40 oder LM; jetzt theile man sowohl AO als BC in zehn gleiche Theile und ziehe aus den Punkten 0; 1; 2; 3; 4 ꝛc. der Linie OA nach den Punkten D; 2; 3; 4; 5 ꝛc. der Linie CB sogenannte Transversalen (Querlinien) OD; 1 .. 2; 2 .. 3; 3 .. 4; ꝛc. bis 9 B; so wird man folgende Wahrheiten nicht verkennen können.

1) Setzen wir die einzelnen Theile in OA und CB, nämlich CD = OC, = a = 1 Decimallinie, so ist (auf der Linie AL gemessen) OA = 10 a = 10 Decimallinien = 1 Zoll; O 10 = 10 a = 1 Zoll; O 20 = 20 a = 2 Zoll; O 30 = 30 a = 3 Zoll und O 40 oder OL = 40 a = 4 Zoll = CM. Ferner ist (auf der Linie LA) 10 .. 2 = 12 a; 20 .. 4 = 24 a; L 7 = 47 a = 47 Linien = 4, 7 Zolle. Fig. 92.

2) Die Linie CD = a = 1 Linie wird in dem Dreyecke COD durch die zu CD oder LA gezogenen Parallelen in 10 Theile getheilt, dergestalt, daß man in O angefangen, zwischen den Schenkeln OC und OD von einer Parallelen zur andern alle Theilchen als $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{10}$ ꝛc. von a, oder alle Theilchen einer Decimallinie, antrifft, wo demnach EF = $\frac{6}{10}$ a = $\frac{6}{10}$ Linie = 0, 6 a = 0, 6 Linie ist und wo EF auch in der Parallele liegt, die zum 6ten Eintheilungspunkt der Linie AB gehört.

3) Da die Transversalen parallel laufen, so findet man von F bis G eben so viele Theile als von O bis 7 und es ist daher FG = 7 a, und da EF = 0, 6 a und EG = FG + EF ist, so wird EG = 7 a + $\frac{6}{10}$ a = 7$\frac{6}{10}$ a = 7, 6 a = 7, 6 Linien seyn.

4) Es leuchtet in die Augen, daß HG = HE + EG = 10 a + 7, 6 a = 17, 6 a; IG = 27, 6 a und KG = 47, 6 a = 47, 6 Linien = 4, 76 Zolle ꝛc. ist.

Anmerkung. Das genaue Eintheilen eines solchen Maßstabes wie Fig. 72. kann nur durch Hilfe guter Schraub- und Schneidewerkzeuge geschehen, wie bekannt ist. Der Maßstab selbst heißt, insofern man dadurch eine Menge von kleinen Theilen abmessen kann, **verjüngter Maßstab**.

Nunmehr können wir folgende Regeln zum Messen einer Linie ertheilen.

1) Ist eine zu messende Linie EF kleiner als OIH, oder kleiner als a, so faßt man sie mit dem Zirkel und sieht zu, welche von den zwischen OC und

Fig. 72. OD gezogenen Parallelen gleichgroß ist. Da die mit 6 bezeichnete Parallele eben so groß als EF ist, so wird auch EF = 0, 6 a seyn.

2) Ist eine zu messende mit dem Zirkel gefaßte Linie EG größer als O 7 nämlich größer als 7 a, aber kleiner als 8 a, und hat man daher einen Fuß des Zirkels in O und den andern zwischen 7 und 8 eingesetzt, so führt man die beyden Füße des Zirkels parallel fort nach EG, bis man an eine solche Stelle kömmt, wo der eine Fuß E in der Linie OC und der andere Fuß G genau in die Transversale 7 G zu stehen kömmt, wo man findet, daß EG = 7, 6 a ist.

3) Ist eine zu messende, mit dem Zirkel gefaßte Linie IG größer als EI oder O 20 aber kleiner als O 30, so setzt man den einen Fuß in 20 und den andern zwischen OA, und wenn dieser Fuß insbesondere zwischen 7 und 8 zu stehen kömmt, so ist die zu messende Linie = 27 a + gewisse Zehntel a lang, welche Zehntel entdeckt werden, wenn man, wie vorher, die Zirkelfüße von 20 . . . 7 parallel fort nach IG = 27, 4 a führt.

4) Ist eine zu messende Linie ungleich größer als AL = 50 a, so trägt man darin AL ein- und mehrmal fort, mißt das übrige Stück auf die vorige Art und addirt dieß zu jenen 50 oder 100 a, u. s. f.

Umgekehrt können wir auch eine Linie von einer vorgeschriebenen Länge z. B. von 47, 6 a oder 4, 76 Zollen hinlegen, wenn wir den einen Fuß G des Zirkels in die 7te Transversale und zwar in die 6te Parallele nämlich in den Punkt G und den andern Fuß in den Punkt K setzen, der in derselben Parallelen aber zugleich auch in der mit 40 bezeichneten Senkrechten steht. Eben so können wir auch eine Linie von 27, 6 a Länge hinlegen, wenn wir sie = GI machen. Soll eine solche Messung mit Vorsicht geschehen, so müssen allzeit die Füße des Handzirkels auch dann genau in den vorgezeichneten Punkten G und I einstehen, wenn man dem Zirkel keinen Druck mehr aussetzt, sondern ihn ganz frey am Kopfe hält. Eben so muß man auch beym Fortragen einer, mit dem

dem Zirkel gefaßten, Linie zuerst den einen Fuß vertikal in den Anfangspunkt der Linie einsetzen, sodann den andern Fuß sanft (in die vorgezogene willkührlich lange Linie) eintreten lassen, worauf man den ersten Fuß aufhebt und mit dem andern vertikal gehaltenen Fuße den unverrückten Endpunkt der Linie durch einen sanften Stich kenntlich macht, welche Vorsichtsregeln man nicht oft genug empfehlen kann.

VI. Auf die Aehnlichkeit der Dreyecke gründet sich auch das Messen und Berechnen der Entfernung eines Punktes A von Q, Fig. 68. wenn man von Q nach A nicht ganz, sondern nur bis etwa E, oder gar nicht dahin messen kann. Fig. 68.

In diesem Falle errichtet man in Q und E parallele Schenkel QR und EI, (gewöhnlich macht man die Winkel AQR und AEI einander = 90°), läßt einen Stab W in die Linie RA und einen Stab M in die Linie EI einschlagen und setzt alsdann den Stab in den Durchschnitt der beiden Linien RWA und EMI; mißt die Linien RQ; QE und EI und berechnet QA aus der Formel $\frac{QE \times RQ}{RQ - EI}$

Denn, wenn man sich aus I nach T eine Parallele zu EQ gezogen denkt, so ist QT = EI; IT = EQ und RT = RQ — QT = RQ — EI. Da nun RT : TI = RQ : QA, so ist $QA = \frac{TI \times RQ}{RT} = \frac{QE \times RQ}{RQ - EI}$.

Eine andere leichtere Verfahrungsart ist folgende.

Wenn die Entfernung CB des Punktes B von C Fig. 73. gefunden werden soll, ohne daß man CB wirklich mißt; so legt man im Punkte C (mittelst eines Kreuzmaßes) eine Linie CA an, welche zur linken oder rechten Seite fortgeht, gegen CB nicht zu kurz ist und auf CB senkrecht steht; mißt diese Linie sogleich und nimmt darin einen Standpunkt A an, aus welchem man die beyden Punkte C und B sehen kann. Ueber diesem Punkte A stellt man den Meßtisch EFGD horizontal auf, und zwar so, daß eine zu AC Fig. 73.

Fig. 73. gezogene vertikale Ebene nahe an den Rand EF des Tisches zu liegen kömmt: wählt in dieser Ebene einen Punkt a auf dem Tische so, daß, wenn man aus demselben nach C und nach B visirt, die gezogenen Visirlinien ac und ab hinlänglich lang werden, wo man die Visirlinien mit kleinen Buchstaben bezeichnet hat, weil der Meßtisch selbst gegen die große Entfernung CB klein gezeichnet werden mußte und man für die Visirlinien nicht viel Raum hatte. Nachdem man diese Visirlinien wirklich gezogen hat, so wird der Punkt A des Erdbodens gesucht, der vertikal unter dem Punkt a des Tisches liegt, und wenn die Länge der Linie AC nach Ruthen und Fußen bekannt ist, so trägt man aus dem Scheitel a des Winkel BAC in ac eben so viele kleine Theile (verjüngte Massstabstheile) auf, als die Linie AC Ruthen lang ist, errichtet aus c die Senkrechte cb, schneidet damit den Schenkel ab in b und mißt cb nach verjüngten Massstabstheilen, wo nun CB eben so viele Ruthen lang ist, als cb dieser kleinen Theile enthält.

Denn es sey AC = p Ruthen oder = p R. und ac = p Theile oder = p T; ferner sey cb q T., so gilt, wegen Δ acb $\sim$ Δ ACB, die Proportion:

ac : cb = AC : CB oder
p T. : q T. = p R : x,

wo sich nun die Buchstaben T. und p heben und daher CB oder x = q R. = q. Ruthen ist, und woraus klar, daß wenn die Zahl p der Theile in ac mit der Zahl der Ruthen in AC gleichgroß ist, auch sodann die Zahl der Theile in cb und die Zahl der Ruthen in CB gleichgroß seyn müsse.

Man kann auch aus einem willkührlichen Punkte b, der nahe am Rande DG des Tisches liegt, eine Senkrechte bc auf ac fällen, ac und cb nach verjüngten Massstabstheilen messen und dann CB oder auch AB nach folgender Proportion berechnen:

ac : cb = AC : CB und
ac : ab = AC : AB,

wo wenn AC in Ruthen gegeben ist, auch das Resultat für CB und AB in Ruthen erhalten wird. Fig.

Es ist nicht nothwendig, daß der Winkel BCA recht sey, wenn nur zuvor der Meßtisch auch im Punkte C aufgestellt, aus C nach B und nach A visirt und daselbst dieser Winkel BAC = bac durch die gezogenen Visirlinien cb und ca gehörig aufgenommen wird. Hierauf trägt man den Meßtisch in den Standort A, stellt ihn daselbst so auf, daß ac über AC in einer vertikalen Ebene zu liegen kömmt, und nachdem man ihn horizontal gerichtet hat, legt man die Visirregel genau an ac und dreht den Tisch so, daß die schon vorgezogene Visirlinie ac wieder genau zurück nach C zielt, macht hierauf ca nach dem verjüngten Massstabe = CA und bestimmt dadurch den Punkt a; legt endlich die Visirregel in a an und visirt aus a nach B; so wird die jetzt gezogene Visirlinie ab die vorhergezogene cb im Punkte b schneiden, und cb eben soviele verjüngte Theile enthalten als in CB Ruthen enthalten sind.

VII. Auf dieselbe Art, wie wir Entfernungen gemessen haben, können wir auch Fig. 74. die Höhe Fig.
AB eines Baumes oder Thurmes messen. Statt eines Meßtisches bedient man sich aber hierzu weit zweckmäßiger eines sogenannten Höhenmessers, der eine verschiedene Einrichtung haben kann, wovon die erste Art aus einem vertikalen Stabe CD mit zwey Linialen EF und EG besteht, wovon sogenannte Richtlinial EF inwendig einen Längen-Einschnitt hat an einem Zapfen I des Stabes hin und her geschoben (nämlich EI länger und kürzer gemacht) und durch eine in Zapfen greifende Schraube I am Stabe befestiget werden kann; und das andere sogenannte Visirlinial EG an einem Zapfen E des ersten wie ein Zirkelfuß beweglich ist und wo demnach der Winkel FEG beliebig geöffnet werden kann. Vom Mittelpunkte des Zapfens aus hat man in ID lauter kleine gleiche Theile (ungefähr 100 bis 120) aufgetragen und besonders die Theilstriche 5; 10; 15; 20 ꝛc. kenntlich gemacht. Dieselben Theile hat man auch aus dem Mit-

Fig. 74. telpunkte der Schraube E sowohl in EF als in EG aufgetragen, da aber die Theile mitten durch EF wegen des Einschnitts nicht eingetragen werden können, so hat man sie parallel darneben gesetzt.

Der Gebrauch dieses Instrumentes ist folgender. Zuerst wird ein Standort C gewählt, aus welchem man die Spitze B des Baumes gut sehen kann und daselbst der Stab DC vertikal fest in die Erde gesteckt, weshalb der Stab unten eine scharfe oder lange Stahlspitze haben muß, sodann wird ein Punkt K am Baume bemerkt, der eben so hoch über dem Boden A steht, als die Schraube I über dem Boden C, und die Entfernung AC nach Fußen gemessen. Jetzt wird nun das Linial EF so verschoben, daß von E bis zur Mitte der Schraube I eben so viele Theile gefunden werden, CA Fuße enthält, worauf man das Linial EF am Stocke CD anschraubt, und EF nach dem am Baume gemachten Zeichen K hinrichtet. Endlich visirt oder dreht man EG nach der Spitze B des Baumes, so wird dieß Linial die Skale ID in H durchschneiden und man wird (indem man HL parallel CA denkt) in IH eben so viele kleine Theile finden, als LB Fuße enthält. Addirt man nun zu LB noch die wenigen Fuße in LA oder HC, so erhält man die ganze Höhe AB.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens liegt aus der Aehnlichkeit der Dreyecke EFH und HLB, wo LH = AC ist, vor Augen. Da das Visirlinial EG breit ist und daran nur die aus E mittendurch gezogene Linie gilt, so muß man die halbe Breite wegnehmen oder mittendurch einen Einschnitt machen lassen, wenn der wahre Durchschnitt der Linien ID und EG sichtbar werden soll.

Anmerkung. Gewöhnlich wird die Höhe eines Baumes nur bis an diejenige Stelle genommen, wo der Gipfel abgehauen und ins Brennholz oder Reißig geschlagen wird. Verlangt man nur die Länge eines Baumschaftes bis zur Krone, so visirt man mit EG auch nur nach dem obern Ende des Schaftes. Da beym Abhauen eines Baumes unten noch ein Baumstock auf der Erde stehen bleibt und durch die Haue

kerbe viel Holz verloren geht, so darf man zu BL nicht ganz HC, sondern 1; 2 bis 3 Fuße weniger addiren, jenachdem der Baum schwach oder stark ist und die Haukerbe klein oder groß gemacht wird.

Eine andere Art von Höhenmessern besteht bloß aus zwey rechtwinklig in einander gefügten Bälkchen DE und FG Fig. 75. wovon das eine schmälere FG in dem andern breitern ED verschoben, nämlich IF länger und kürzer gemacht werden kann und wo man von dem Punkte F aus, woran ein Senkbley FH vertikal hängt, kleine Theile in FG — und vom Durchschnittspunkte I des rechtwinkligen Kreuzes aus, dieselben kleine Theile auch in ID und IE aufgetragen hat. Fig. 75.

Der Gebrauch dieses Instrumentes ist nun folgender.

Zuerst wird die horizontale Entfernung AT eines Standortes T vom Baume AB nach Fußen gemessen und wenn dieß a Fuße sind, so schiebt man GF in DE so weit vor oder zurück, daß FI ebenfalls = a kleine Theile wird; sodann hält man mit freyer Hand das Instrument DGFT vor sich hin und dreht es in einer vertikalen Ebene so, daß man, aus dem Punkte C des Auges über DE weggesehen, die Spitze B des Baumes erblickt, bringt mit der andern Hand das Senkbley FH bald in Ruhe und wenn DE genau nach B zielt und das Senkbley FH ruhig in K ganz gerade am Bälkchen ED frey herunterhängt, so hält man in K den Faden FH des Senkbleyes fest, sieht nachher nach, wie viele kleine Theile in IK durch den Faden abgeschnitten worden sind, und wenn dieß 6 Theile sind, so wird auch, indem man sich vom Auge in C eine Horizontale CS zum Baume gezogen denkt, SB = b Fuße seyn und man hat zu dieser Höhe CB nur noch das untere Stück SA zu addiren. Dieß untere Stück SA kann aber auch dadurch gemessen werden, daß man DE in die Lage LM und dadurch zugleich FG in die Lage ON bringt nämlich LM nach A hinrichtet indem das Auge noch in C ist; sodann die Theile in QR zählt, welche durchs Senkbley OP

Fig. 75. abgeschnitten werden, wo nun QR eben so viele Theile enthält, als SA Fuße. Addirt man die Theile in IK und in QR zusammen, so erhält man natürlich die Fuße in AB.

Anmerkung. Würde man nach einem Punkte B' des Baumes visiren, so würde durchs Instrument DEFG die Höhe SB' erhalten. Ist nun auch die Höhe SB bekannt, so findet man die Höhe von B'B durch Subtraktion. Man sieht hieraus, wie man einen Baum B'B messen könne, der an einer Anhöhe steht und den man aus einem Standorte C betrachtet, welcher ungleich tiefer als das Stammende B' liegt.

2) Statt des beschriebenen Instrumentes kann man sich auch einer bloßen viereckigen Platte UVZA' in Form eines Quadrates bedienen, wo jede Seite etwa $\frac{1}{2}$ Fuß lang und in 100 bis 120 gleiche Theile getheilt ist, und wo man aus den Punkten 0; 5; 10; 15; 20; ꝛc. der Seite VU lauter Parallellinien zu VZ und aus den Punkten 0; 5; 10; 15 ꝛc. der Seite VZ lauter Parallellinien zu VU geführt und im Anfangs- oder V-punkte ein Senkbley VY aufgehängt hat. Wird nun die Seite UV des Quadrates in DE gebracht, wo man aus C nach B über UV statt über DE visirt, so wird das Senkbley die Lage VY annehmen und den Winkel WVX = den ∠ IFK machen, wo nun, wenn VW = FI = a Theile ist, auch WX = IK = b Theile enthalten muß, weil auch ∠ VWX = ∠ FIK ist und die Dreyecke VWX und FIK congruent sind.

Beweis zur Richtigkeit des Hauptverfahrens.

Da FA ∥ BS, so ist auch ∠ SBK = dem Wechselwinkel BKF oder ∠ SBC = ∠ IKF. Da nun in den beyden Dreyecken CSB und FIK auch ein zweyter Winkel CSB = ∠ FIK = 90°, so ist auch der dritte Winkel beyder Dreyecke gleich und es sind daher die Dreyecke FIK und CSB einander ähnlich, weshalb (vermöge II)

FI : IK = CS : SB nämlich

aT : bT = aF : bF.

VIII. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien BD und EG Fig. 71. durch drey aus einem festen Punkte A gezogene Linien AE; AF und AG durchschnitten werden, so stehen die gleichnamigen Stücke der Parallelen im Verhältnisse. Fig. 71.

Nämlich:

BD : EG = BC : EF;
BD : EG = DC : GF und
BC : EF = CD : FG.

Oder:

BD : BC = EG : EF;
BD : DC = EG : GF und
BC : CD = EF : FG.

Beweis. In den ähnlichen Dreyecken ABD und AEG ist:

AB : AE = BD : EG

und in △ ABC ∽ △ AEF ist

AB : AE = BC : EG,

aus welchen beyden Proportionen, deren linke Seite einerley ist, folgt:

BD : EG = BC : EF oder
BD : BC = EG : EF.

In △ ADB ∽ △ AGE ist:
AD : AG = BD : EG und
in △ ADC ∽ AGF ist:
AD : AG = DC : GF, daher auch aus diesen beyden Proportion oder Gleichungen folgt:
BD : EG = DC : GF
In △ ACB ∽ △ AFE ist
AC : AF = CB : FE und
in △ ACD ∽ △ AFG ist
AC : AF = CD : FG, daher auch
CB : FE = CD : FG.

Zusatz. Zieht man aus dem Punkte F, wo EG durch AF geschnitten wird, ein Parallele FK zu EA, so ist,

weil EG : EF = BD : BC;
EG : GF = BD : DC und
EF : FG = BC : CD und
in (△ EGA ∽ △ FGK)

Fig. 71. EG : EF = AG : AK;
EG : GF = AG : GK und
EF : FG = AK : KG und demnach diese drey Proportionen mit jenen gleichlautend sind:
BD : BC = AG : AK
BD : DC = AG : GK und
BC : CD = AK : KG.

IX. Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke ACB Fig. 77. Fig. 77. ein Winkel C durch eine gezogene Linie CD halbirt und dadurch die gegenüberstehende Seite AB in zwey Theile AD und DB getheilt wird, so verhalten sich diese Theile, wie die zunächst anliegenden Seiten AC und CB des Dreyeckes. Nämlich es ist
AD : DB = AC : CB.

Beweis. Man trage CB in die Verlängerung der Seite AC nämlich nach CE und ziehe EB, so wird im gleichschenkligen Dreyecke BCE der ∠ B = ∠ E und mithin der Nebenwinkel BCA = ∠ E + ∠ B = ∠ E + ∠ E = 2 ∠ E seyn. Da nun ∠ ACD = ½ ∠ ACB = ½ ∠ BCA = ½. 2 ∠ E = ∠ E, so ist auch CD und EB parallel und
AD : DB = AC : CE oder
AD : DB = AC : CB.

Zusatz. Es wird daher auch ein Winkel ACB dadurch in zwey gleiche Theile ACD und DCB getheilt, wenn man den einen Schenkel AC jenseits des Scheitels nach CE hin verlängert, CB nach CE trägt und zu EB aus C eine Parallele CD zieht; welches auch daraus klar vor Augen liegt, weil ∠ CEB = ∠ ACD und ∠ EBC = ∠ DCB ist.

X. Lehrsatz. Wenn zuerst auf einen Schenkel AC eines Winkels BAC Fig. 80. eine Sekrechte Fig. 80 CB und dann auch auf den andern Schenkel BA eine Senkrechte ED errichtet wird, so ist

1) der Nebenwinkel ADE = ∠ ABC, weil der Winkel in A beyden Dreyecken gemein, der zweyte Winkel in E und C beyder Dreyecke recht ist und daher auch der dritte Winkel ADE und ABC in beyden Dreyecken gleich seyn muß. Da nun die drey

einzelnen Winkel α; β und γ in beyden Dreyecken einerley ist, so ist auch Fig. 29.

2) das Dreyeck AED dem Dreyecke ACB ähnlich und es stehen daher die gleichnamigen Seiten beyder Dreyecke im Verhälte. Nämlich es ist in $\triangle$ AED $\sim$ $\triangle$ ACB

1) AE : ED = AC : CB
2) AD : DE = AB : BC und
3) EA : AD = CA : AB.

§. 33.

Von den Seiten eines rechtwinkligen Dreyeckes, besonders im Kreise.

I. Hauptsatz. In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke ABC Fig. 36. ist das Quadrat der Hypothenuse AC so groß als die Summe der Quadrate aus den beyden Catheten AB und BC. Nämlich es ist, wenn AC = c R; AB = a und BC b R gesetzt wird, Fig. 36.

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ oder}$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

und zwar, wenn man aus dem rechten Winkel B eine Senkrechte BD auf die Hypothenuse fällt und diese dadurch in zwey Theile AD und DC theilt:

1) $BD^2 = AD \times DC$ oder $BD = \sqrt{AD \times DC}$;
2) $AB^2 = AC \times AD$ oder $AB = \sqrt{AC \times AD}$;
3) $BC^2 = CA \times CD$ oder $BC + \sqrt{AC \times CD}$,

und es folgt

4) aus der Gleichung $AC^2 = AB^2 + BC^2$ der Werth für $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$; für $AB^2 = AC^2 - BC$ und $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$; für $BC^2 = AC^2 - AB^2$ und $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$.

Diese Sätze können auf vielerley Art bewiesen werden, wir führen aber nur folgende Beweisarten an.

Erste Beweisart.

Es sind die Dreyecke CBA; CDB und BDA einander ähnlich, und zwar

Fig. 36. Δ CDB $\sim$ Δ CBA, weil beyde Dreyecke den Winkel in C $=$ α gemeinschaftlich enthalten, und ein zweyter Winkel in D des ersten Dreyeckes recht und $=$ dem zweyten Winkel in B des andern Dreyeckes CBA ist.

Ferner Δ ADB $\sim$ Δ ABC, weil $\angle$ in A $=$ β beyden Dreyecken gemein und der $\angle$ in D des ersten Dreyeckes recht und $=$ dem $\angle$ in B des andern Dreyeckes ist und

endlich Δ ADB $\sim$ Δ BDC, weil $\angle$ DBA $+$ $\angle$ DBC $=$ $\angle$ DBA $+$ $\angle$ BAD $= 90°$ ist, in dieser Gleichung der $\angle$ DBA zu beyden Seiten sich hebt und daher auch $\angle$ DBC $=$ $\angle$ BAD ist, und diese beyden Dreyecke noch einen gleichen Winkel in D enthalten.

Nun gilt

1) im Δ ADB $\sim$ Δ BDC die Proportion:
AD : DB $=$ BD : DC, daher auch das Produkt DB $\times$ BD $=$ AD $\times$ DC oder
$BD^2 = AD \times DC$.

2) In Δ DAB $\sim$ Δ BAC ist
DA : AB $=$ BA : AC, daher auch
$BA^2 = AC \times AD$.

3) In Δ DCB $\sim$ Δ BCA ist
DC : CB $=$ BC : CA, daher auch
$BC^2 = AC \times DC$.

4) Addiren wir diese Gleichung
$BC^2 = AC \times DC$ zur vorigen
$BA^2 = AC \times AD$
so erhalten wir

$$BC^2 + BA^2 = AC \times DC + AC \times AD$$

und weil der Faktor AC beyden Gliedern rechts der Gleichung gemein, so ist

$$BC^2 + BA^2 = AC \times (DC + AD)$$

und weil DC $+$ DA $=$ AC, so ist

$$BC^2 + BA^2 = AC \times AC = AC^2.$$

Aus dieser Gleichung $BC^2 + BA^2 = AC^2$ folgt nun von selbst, daß auch $BA^2 = AC^2 - BC^2$ und $BC^2 = AC^2 - AB^2$ seyn müsse.

Zweyte Beweisart.

In Fig. 81., wo das rechtwinklige Δ BEH vor-

gezeichnet ist, soll bewiesen werden, daß das Quadrat BHIA der Hypothenuse eben so groß ist, als das Quadrat BEDC der einen Cathete + dem Quadrate EHGF der andern, und zwar soll der eine Theil ABLK des großen Quadrats, (der durch die aus dem rechten Winkel E auf BH gefällten und hinlänglich verlängerten Senkrechten ELK abgeschnitten wird,) = dem Quadrate BCDE und der andere Theil HIKL = dem Quadrate GHEF seyn. Wir wollen zuerst beweisen, daß das Rechteck ABLK = □ BCDE ist, sodann wird es auch leicht seyn, zu zeigen, daß Rechteck LKIH auch = □ EHGF ist. Fig. 81.

Da ∠ ABE = ∠ ABH + ∠ HBE = ∠ CBE + ∠ EBH = ∠ CBH und diese beyden Winkel ABE und HBC von gleichlangen Seiten eingeschlossen sind, so sind auch die beyden Dreyecke ABE und HBC congruent und wir können demnach die Fläche eines jeden = u setzen. Sehen wir nun BC als Grundlinie und BE als Höhe des Dreyeckes CBH und des Rechteckes CBED an, so haben beyde Flächen eine gemeinschaftliche Grundlinie und Höhe und es ist daher das Rechteck BCDE = 2 △ BCH = 2 u. Sehen wir AB und BL als Grundlinie und Höhe des Dreyeckes ABE und Rechteckes ABLK an so nehmen wir wahr, daß auch □ ABLK = 2 △ BAE = 2 u ist. Da nun sowohl □ ABLK als □ BCDE = 2 u ist, so muß auch □ ABLK = □ BEDC seyn.

Daß auch HIKL = EHGF ist, beruht auf ähnlichen Gründen. Nämlich es ist △ IHE = △ BKG = △ GHB; nämlich $\frac{1}{2}$ □ IHLK = $\frac{1}{2}$ □ GHEF, weßhalb auch □ IHLK = GHEF.

Anmerkung. Da die Wahrheit des oben aufgestellten Lehrsatzes schon von Pythagoras (einen alten Griechen, gegen 530 Jahre vor Christi Geburt) dargethan worden ist, so pflegt man auch diesen Lehrsatz den pythagoräischen zu nennen. Doch ist er auch unter dem Namen Meistersatz (magister matheseos) bekannt.

II. Vom rechtwinkligen Dreyecke im Kreise.

Fig. 82. Wenn AD der Durchmesser eines Kreises Fig. 82. ist und aus einem Punkte E des Umfangs die Sehnen EA und ED zu den Endpunkten des Durchmessers geführt werden; so ist (vermöge §. 29.) der ∠ AED ein rechter und demnach AED ein rechtwinkliges Dreyeck, wo $AD^2 = DE^2 + EA^2$, und wenn aus E eine senkrechte Ordinate EB auf die Abscisse oder den Durchmesser AD gefällt wird, so muß auch hier

1) $BE^2 = AB \times BD$;
2) $AE^2 = AB \times AD$ und
   $DE^2 = DB \times DA$, wie in I seyn.

Durch diese Formeln sind wir nun im Stande, Rechtecke und Dreyecke in ein Quadrat zu verwandeln und überhaupt aus jedem Produkte $a \times b$ die Wurzel auf geometrischen Wege oder durch bloße Verzeichnung zu ziehen.

1) Es sey die Grundlinie eines Parallelogramms $= a\,R$ und seine senkrechte Höhe $= b\,R$, so ist seine Fläche $= ab\,R^2$. Soll nun ein Quadrat, dessen Basis oder Seite wir $= x\,R$ setzen wollen, eben so groß als jenes Parallelogramm von $ab\,R^2$ werden, so muß die Fläche des Quadrates nämlich $x \cdot x$ oder $x^2 = ab$ gesetzt werden, woraus wir ersehen, daß $x = \sqrt{ab}$ seyn müsse. Ziehen wir aus diesem Produkte ab, sobald es in Zahlen gegeben ist, wirklich die Quadratwurzel, so erhalten wir zwar den Werth von x in Zahlen und wir können alsdann zur berechneten Basis x ein Quadrat verzeichnen, das $=$ dem vorgelegten Rechtecke ist; wenn aber

ein Rechteck BDGF auf dem Papiere gegeben ist, so trägt man BF in die verlängerte Grundlinie DB nämlich nach BA, sucht die Mitte C von AD, verlängert nöthigen Falls die aus B errichtete Senkrechte BE, faßt CA oder CD mit dem Zirkel, beschreibt mit CA aus C einen Kreis und schneidet damit die Senkrechte BE in E, so wird BE die Seite zu einem Quadrate BEHI seyn, welches $=$ □ BFGD ist. Denn nach oben ist $BE^2 = AB \times BD = BD \times AB =$

BD × BF, nämlich □ BEHI = BDGF und BE = √ BD × BF = √ □ BDGF. Fig. 80.

Ist ein Rechteck, das so lang als AD und so breit als DB und dessen Fläche demnach = AD × DB ist, gegeben, so kann man es zwar ebenfalls auf die vorige Art in ein Quadrat verwandeln; man kann aber auch die Breite DB in die Länge DA legen, aus B eine Senkrechte BE errichten, diese durch einen, über AD aus der Mitte C beschriebenen Halbkreis in E schneiden und die Sehne DE ziehen, so wird DE die Seite zu dem gesuchten Quadrate seyn, dessen Fläche DE^2 = DA × DB = der Fläche des vorgelegten Rechteckes ist.

2) Wenn aus einer Zahl, die aus Faktoren besteht, z. B. aus 12 = 2 . 6 oder = 3 . 4, die Wurzel auf geometrischen Wege gezogen werden soll, so trägt man in AB nach Masgabe des einen Faktors, 3 und in BD, nach Maßgabe des andern, 4 gleiche Theile auf, errichtet in B eine Senkrechte BE und schneidet diese aus der Mitte C der Linie AD mit dem Radius CA = $3\frac{1}{2}$. Diese Ordinate BE ist sodann = √ AB × BD = √ 3 . 4 = √ 12.

Macht man AD = 6; AB = 2 und schneidet man mit CA = 3 die Senkrechte BE in E, so ist die Sehne AE = √ AD × AB = √ 6 . 2 = √ 12.

Auch aus Zahlen, welche keine Faktoren haben, kann man die Wurzel auf diesem Wege ziehen. Macht man z. B. AB = 1 und BD = 3, so ist AD = 4 und CA = 2 und BE = √ 1 . 3 = √ 3. Oder macht man AD = 3 und AB = 1, so ist die Sehne AE = √ 1 . 3 = √ 3.

3) Schon durchs bloße rechtwinklige Dreyeck BEH Fig. 81. können wir aus einer Zahl m. n, welche aus den Faktoren m und n besteht, eine Wurzel ziehen, wenn wir nach einem guten verjüngten Masstabe die eine Cathete BE = $\frac{m - n}{2}$ Theile machen, in E eine Senkrechte EH errichten, sodann die Hypothenuse BH = $\frac{m + n}{2}$ Theile mit dem Zirkel fassen und Fig. 81.

II. Vom rechtwinkligen Dreyecke im Kreise.

Fig. 82. Wenn AD der Durchmesser eines Kreises Fig. 82. ist und aus einem Punkte E des Umfangs die Sehnen EA und ED zu den Endpunkten des Durchmessers geführt werden; so ist (vermöge §. 29.) der ∠ AED ein rechter und demnach AED ein rechtwinkliges Dreyeck, wo $AD^2 = DE^2 + EA^2$, und wenn aus E eine senkrechte Ordinate EB auf die Abscisse oder den Durchmesser AD gefällt wird, so muß auch hier

1) $BE^2 = AB \times BD$;
2) $AE^2 = AB \times AD$ und
$DE^2 = DB \times DA$, wie in I seyn.

Durch diese Formeln sind wir nun im Stande, Rechtecke und Dreyecke in ein Quadrat zu verwandeln und überhaupt aus jedem Produkte $a \times b$ die Wurzel auf geometrischen Wege oder durch bloße Verzeichnung zu ziehen.

1) Es sey die Grundlinie eines Parallelogramms $= a\,R$ und seine senkrechte Höhe $= b\,R$, so ist seine Fläche $= ab\,R^2$. Soll nun ein Quadrat, dessen Basis oder Seite wir $= x\,R$ setzen wollen, eben so groß als jenes Parallelogramm von $ab\,R^2$ werden, so muß die Fläche des Quadrates nämlich $x \cdot x$ oder $x^2 = ab$ gesetzt werden, woraus wir ersehen, daß $x = \sqrt{ab}$ seyn müsse. Ziehen wir aus diesem Produkte ab, sobald es in Zahlen gegeben ist, wirklich die Quadratwurzel, so erhalten wir zwar den Werth von x in Zahlen und wir können alsdann zur berechneten Basis x ein Quadrat verzeichnen, das $=$ dem vorgelegten Rechtecke ist; wenn aber

ein Rechteck BDGF auf dem Papiere gegeben ist, so trägt man BF in die verlängerte Grundlinie DB nämlich nach BA, sucht die Mitte C von AD, verlängert nöthigen Falls die aus B errichtete Senkrechte BE, faßt CA oder CD mit dem Zirkel, beschreibt mit CA aus C einen Kreis und schneidet damit die Senkrechte BE in E, so wird BE die Seite zu einem Quadrate BEHI seyn, welches $=$ □ BFGD ist. Denn nach oben ist $BE^2 = AB \times BD = BD \times AB =$

BD × BF, nämlich □ BEHI = BDGF und BE = $\sqrt{}$ BD × BF = $\sqrt{}$ □ BDGF. Fig. 80.

Ist ein Rechteck, das so lang als AD und so breit als DB und dessen Fläche demnach = AD × DB ist, gegeben, so kann man es zwar ebenfalls auf die vorige Art in ein Quadrat verwandeln; man kann aber auch die Breite DB in die Länge DA legen, aus B eine Senkrechte BE errichten, diese durch einen, über AD aus der Mitte C beschriebenen Halbkreis in E schneiden und die Sehne DE ziehen, so wird DE die Seite zu dem gesuchten Quadrate seyn, dessen Fläche DE^2 = DA × DB = der Fläche des vorgelegten Rechteckes ist.

2) Wenn aus einer Zahl, die aus Faktoren besteht, z. B. aus 12 = 2 . 6 oder = 3 . 4, die Wurzel auf geometrischen Wege gezogen werden soll, so trägt man in AB nach Masgabe des einen Faktors, 3 und in BD, nach Masgabe des andern, 4 gleiche Theile auf, errichtet in B eine Senkrechte BE und schneidet diese aus der Mitte C der Linie AD mit dem Radius CA = $3\frac{1}{2}$. Diese Ordinate BE ist sodann = $\sqrt{\text{AB} \times \text{BD}}$ = $\sqrt{}$ 3 . 4 = $\sqrt{}$ 12.

Macht man AD = 6; AB = 2 und schneidet man mit CA = 3 die Senkrechte BE in E, so ist die Sehne AE = $\sqrt{}$ AD × AB = $\sqrt{}$ 6 . 2 = $\sqrt{}$ 12.

Auch aus Zahlen, welche keine Faktoren haben, kann man die Wurzel auf diesem Wege ziehen. Macht man z. B. AB = 1 und BD = 3, so ist AD = 4 und CA = 2 und BE = $\sqrt{}$ 1 . 3 = $\sqrt{}$ 3. Oder macht man AD = 3 und AB = 1, so ist die Sehne AE = $\sqrt{}$ 1 . 3 = $\sqrt{}$ 3.

3) Schon durchs bloße rechtwinklige Dreyeck BEH Fig. 81. können wir aus einer Zahl m. n, welche Fig. 81. aus den Faktoren m und n besteht, eine Wurzel ziehen, wenn wir nach einem guten verjüngten Massstabe die eine Cathete BE = $\frac{m - n}{2}$ Theile machen, in E eine Senkrechte EH errichten, sodann die Hypothenuse BH = $\frac{m + n}{2}$ Theile mit dem Zirkel fassen und

Fig. 81. damit aus B die Senkrechte EH in H schneiden, wo nun jetzt $HE = \sqrt{m \cdot n}$ wird.

Denn es ist $HE = \sqrt{BH^2 - BE^2} = \sqrt{(BH + BE) \times (BH - BE)} = \sqrt{\left(\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\right) \times \left(\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\right)} = \sqrt{m.n.}$

So z. B. ist $13 = 13 \cdot 1$, machen wir nun $BE = \frac{13-1}{2} = 6$ und $BH = \frac{13+1}{2} = 7$, so ist $HE = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{(7+6)(7-6)} = \sqrt{13}$.

Aus Zahlen, welche durch die Form $m^2 + n^2$ ausgedrückt werden können, zieht man die Wurzel dadurch am geschwindesten, daß man die eine Cathete $BE = m$ und die andere $EH = n$ macht und die Hypothenuse $BH = \sqrt{m^2 + n^2}$ mißt.

Dergleichen Zahlen sind:
$2 = 1^2 + 1^2$; $5 = 2^2 + 1^2$; $8 = 2^2 + 2^2$; $10 = 3^2 + 1^2$; $13 = 3^2 + 2^2$; $17 = 4^2 + 1^2$; $18 = 3^2 + 3^2$; $20 = 4^2 + 2^2$; $25 = 5^2 = 4^2 + 3^2$; $26 = 5^2 + 1^2$; $29 = 5^2 + 2^2$; $32 = 4^2 + 4^2$; $34 = 5^2 + 3^2$; $37 = 6^2 + 1^2$; $40 = 6^2 + 2^2$; $41 = 5^2 + 4^2$; $45 = 6^2 + 3^2$; $50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$; $52 = 6^2 + 4^2$, und so fort.

Kann die eine Cathete durch die Form $m^2 - n^2$ und die andere Cathete durch die Form $2mn$ ausgedrückt werden, so ist die Hypothenuse rational und $= m^2 + n^2$, weil $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$ ist. Setzen wir $m = 2$ und $n = 1$, so ist die eine Cathete $= 3$, die andere $= 4$ und die Hypothenuse $= 2^2 + 1^2 = 5$. Setzen wir $m = 3$ und $n = 2$, so ist die eine Cathete $m^2 - n^2 = 5$, die andere $= 2mn = 12$ und die Hypothenuse $= m^2 + n^2 = 13$. Und so fort.

Fig. 82. III. Fortsetzung. Man setze im Kreise Fig. 82. den Gleichmesser $CA = CD = a$, die Abscisse $AB = x$ und die Ordinate $BE = y$, so ist der Durchmesser oder die Axe $AD = 2a$; die Abscisse $DB = DA - AB = 2a - x$; die Ordinate $BE^2 =$

AB × BD nämlich $y^2 = x.(2a - x)$ und BE $= y = \sqrt{x(2a -)x} = \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{AB \times (2AC - AB)}$. Da $AB = AD - DB = 2CD - DB$, so ist auch $BE = \sqrt{DB \times BA} = \sqrt{DB \times (2CD - DB)}$. Fig. 81.

Aus der Gleichung $y^2 = 2ax - x^2$ folgt der Werth für $a = \frac{y^2 + x^2}{2x}$, nämlich $AC = (BE^2 + AB^2) : 2AB$ und $AD = 2AC = 2a = \frac{y^2 + x^2}{x} = \frac{y^2}{x} + x = \frac{BE^2}{AB} + AB$.

Man sieht aus diesen Formeln, wie man zu einer vorgelegten Abscisse AB und Ordinate BE eines Kreises den dazu gehörigen Radium AC oder Durchmesser AD berechnen könne. Wäre ein Stück Kreis IAE vorgezogen und sollte man hierzu den ganzen Kreis ziehen, so hätte man weiter nichts zu thun, als die Sehne EI zu messen und zu halbiren, ferner auch die Höhe BA des Bogens in der Mitte B der Sehne zu messen, aus der Proportion $AB : BE = BE : BD$ das Stück $BD = \frac{BE^2}{AB}$ zu berechnen, hierzu AB zu addiren und die Summe $BD + AB = AD$ zu halbiren, wo nun $\frac{1}{2} AD = AC = EC = IC$ ist und der Mittelpunkt C des Kreises oder der Scheitel des Dreyeckes ECI aufgetragen werden kann. Zieht man ein willkührliches Dreyeck EAI zum Bogen EAI, so wird man nach §. 29. ebenfalls im Stande seyn, den Mittelpunkt C eines Kreises zu finden, der durch die drey Punkte E; A und I geht.

§. 34.

Vergleichung der Quadrate oder Produkte der Seiten mit der Fläche der Dreyecke und Parallelogramme.

I. Lehrsatz. Aehnliche Dreyecke stehen mit dem Quadrate gleichnamiger Seiten im Verhältnisse.

Fig. 70. Wenn nämlich ABC und ADE Fig. 70. ähnliche Dreyecke sind, so verhält sich die Fläche des Dreyeckes ABC zur Fläche des Dreyeckes ADE, wie AB^2 zu AD^2, oder wie AC^2 zu AE^2 oder wie BC^2 zu DE^2.

Beweis.

Wenn gezeigt werden soll, daß $\Delta ABC : \Delta ADE = AB^2 : AD^2$ ist, so muß man AB und AD als Grundlinie und CF und EG als Höhe dieser Dreyecke ansehen, und dann ist

$AB : AD = AB : AD$ identisch und

$AB : AD = CF : EG$ aus den ähnlichen Dreyecken richtig. Multipliciren wir nun beyde Gleichungen mit einander, so erhalten wir

$$AB^2 : AD^2 = AB \times CF : AD \times EG$$

und es ist auch, indem man ein äußeres und ein mittleres Glied durch 2 dividirt:

$$AB^2 : AD^2 = \frac{AB \times CF}{2} : \frac{AD \times EG}{2}$$

oder $AB^2 : AD^2 = \Delta ABC : \Delta ADE$, weil

$\frac{AB \times CF}{2} = \Delta ABC$ und $\frac{AD \times EG}{2} = \Delta BDE$ ist.

Würde man die gleichnamigen Seiten AC und AE zur Grundlinie der ähnlichen Dreyecke ACB und AED machen, so wird man auf demselben Wege finden, daß

$AC^2 : AE^2 = \Delta ACB : \Delta AED$ oder

$\Delta ACB : \Delta AED = AC^2 : AE^2$ ist.

Man kann aber auch den Beweis auf folgende Art führen:

$AC : AE = AB : AD$

$AC : AE = CF : EG$, daher auch das Produkt beyder Gleichungen:

$AC^2 : AE^2 = AB \times CF : AD \times EG$

und $AC^2 : AE^2 = \frac{AB \times CF}{2} : \frac{AD \times EG}{2}$ oder

$AC^2 : AE^2 = \Delta ABC : \Delta ADE$ oder

$AC^2 : \Delta ABC = AE^2 : \Delta ADE$.

Zusatz. Auch mit dem Quadrate gleichnamiger Höhen und mit dem Quadrate gleichnamiger

miger Theile der Grundlinie, welche durch die Höhe abgeschnitten werden, steht die Fläche ähnlicher Dreyecke im Verhältnisse. Fig. 79.

Nämlich es ist:

$\triangle ABC : \triangle ADE = CF^2 : EG^2$ und

$\triangle ABC : \triangle ADE = AF^2 : AG^2 = BF^2 : DG^2$,

weil $CF : EG = \frac{CF}{2} : \frac{EG}{2}$ und

$CF : EG = AB : AD$ und daher auch das Produkt:

$$CF^2 : EG^2 = \frac{AB \times CF}{2} : \frac{AD \times EG}{2}$$

$= \triangle ABC : \triangle ADE$ ist.

Ferner ist (nach §. 32. III.)

$\frac{CF}{2} : \frac{EG}{2} = AF : AG$ und

$AB : AD = AF : AG$, daher auch

$$\frac{AB \times CF}{2} : \frac{AD \times EG}{2} = AF^2 : AG^2$$

nämlich $\triangle ABC : \triangle ADE = AF^2 : AG^2$.

Endlich $\frac{CF}{2} : \frac{EG}{2} = BF : DG$ und

$AB : AD = BF : DG$, daher auch

$\triangle ABC : \triangle ADE = BF^2 : DG^2$.

II. Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines Winkels EAD ist schon bereits eine Linie ED vorgezeichnet; man soll hierzu eine Parallele CB dergestalt ziehen, daß das entstehende Dreyeck ABC gerade a □R enthalte. Wie weit muß BC von A abstehen?

Auflösung.

1) Durch Rechnung.

Wenn AB gesucht wird, so messe man die Grundlinie $AD = a$ und $EG = b$ Ruthen und berechne $AB = x$ nach der Formel $x = \sqrt{\frac{2a}{b}} = \sqrt{\frac{2a}{\frac{1}{2}b}}$; BC ist ∥ zu DE, es kann aber auch die Seite AC aus $AD : AB = AE : AC$ gefunden werden.

Oder:

Fig. 70. Wenn der senkrechte Abstand AH = u der Linie BC gesucht wird, so mißt man DE = d und die Senkrechte AI = c und setzt $u = \sqrt{\frac{2s.a}{d}}$.

Beweis.

Es ist AD : EG = AB : CF oder
a : b = x : CF, woher
$CF = \frac{bx}{a}$ und $\Delta ABC = \frac{AB}{2} \times CF$ oder

$$s = \frac{x}{2} \cdot \frac{bx}{a} = \frac{bx^2}{2a},$$

aus welcher Gleichung folgt der Werth von $x^2 = \frac{2as}{b}$ und $x = \sqrt{\frac{2as}{b}}$.

Ferner ist
AI : DE = AH : BC oder
c : d = u : BC, woher $BC = \frac{ud}{c}$
und $\Delta BCA = BC \times \frac{HA}{2}$ oder

$$s = \frac{ud}{c} \cdot \frac{u}{2} = \frac{u^2 d}{2c} \text{ worin } u = \sqrt{\frac{2cs}{d}}.$$

2) Durch Verzeichnung.

Man dividire die hinzulegende Fläche ABC = s □R durch $\frac{1}{2}$ EG, oder 2s durch EG, und mache AK = dem erhaltenen Quotienten $\frac{2s}{EG} = \frac{s}{h}$, so ist das Δ AKE = s □R. Jetzt suche man die Mitte M der Seite AD, errichte aus K eine Senkrechte KL auf AD und schneide diese aus M mit dem Radius MA in L; trage die Sehne AL nach AB und ziehe BC ∥ DE; so wird Δ ABC = s □R werden.

Beweis.

Es ist AL = AB = x; AD wie oben = a und $AK = \frac{2s}{b}$. Da nun (nach §. 33. II 2c.)

$AL^2 = AD \times AK$, so ist auch

$lx^2 = \frac{a.2s}{b}$ und Fig. 70.

$x = \sqrt{\frac{2as}{b}} = AB$, welche Formel demnach mit der vorhin hergeleiteten vollkommen übereinstimmt, weßhalb man auch durch die Verzeichnung ein richtiges Resultat erhält.

Anmerkung. Soll $\Delta ABC = \frac{s}{2}$ oder $= \frac{m}{n} \Delta ADE$ oder $s = \frac{m}{n} \cdot \frac{ab}{2}$ werden, so hat man AK auch nur $= \frac{s}{2}$ oder $= \frac{m}{n} AD$ zu machen. Durch Rechnung findet man $x = \sqrt{\frac{2a.s}{b}} = \sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{ab}{2}}$ $= \sqrt{\frac{a^2.m}{n}} = a \sqrt{\frac{m}{n}}$. Diese letzte Formel wird augenblicklich aus folgender Proportion erhalten, wenn nämlich $\Delta ADE = f$ und $\Delta ABC = \frac{m}{n} f$ gesetzt wird:

$\Delta ADE : \Delta ABC = AD^2 : AB^2$ oder

$f : \frac{m}{n} f = a^2 : x^2$

woher $x^2 = \frac{m}{n} a^2$ und $x = a \sqrt{\frac{m}{n}}$.

Folgesatz. Ein ΔAKE wird in ein andres ABC, dessen eine Seite BC $\#$ zu DE läuft, verwandelt, wenn man über AD einen Halbkreis beschreibt, diesen durch eine aus K auf AD errichtete Senkrechte KL in L schneidet, AB $=$ der Sehne AL macht und BC $\#$ zu DE zieht.

III. Lehrsatz. Wenn zwey Parallelogramme oder Dreyecke BAC und DAE Fig. 78. einen gleichen Winkel in A enthalten, so steht ihre Fläche mit dem Produkte der Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen, im Verhältnisse.

Nämlich es ist

Fig. 78. $\triangle ABC : \triangle ADE = AB \times AC : AD \times AE$.

Beweis. Man sehe AC und AE als Grundlinien zu diesen Dreyecken an, und ziehe die dazu gehörigen Höhen BF und DG, so ist BF # DG und

$AB : AD = BF : DG$. Da nun

$AC : AE = \frac{1}{2} AC : \frac{1}{2} AE$ identisch richtig ist, so wird auch das Produkt aus beyden Gleichungen richtig seyn, weßhalb auch

$$AB \times AC : AD \times AE = \frac{AC \times BF}{2} : \frac{AE \times DG}{2} = \triangle ACB : \triangle AED.$$

Fig. 79. Die Parallelogramme ABFG und ACED Fig. 79. haben so wie die Dreyecke BAE und CAD einen gleichen Winkel in A; da nun $\square ABGF = 2 \triangle BAF$ und $\square ACED = 2 \triangle CAD$ und $2 \triangle BAF : 2 \triangle CAD = AB \times AF : AC \times AD$ eine richtige Proportion ist, so wird auch $\square BAFG : \square CADE = BA \times AF = CA \times AD$ eine richtige Proportion seyn.

Zusätze.

Fig. 78. 1) Liegt der Punkt D in B Fig. 78., oder ist AD = AB, so erhält man die Proportion

$\triangle ACB : AED = AB \times AC : AB \times AE = AC : AE$

und es stehen daher in diesem Falle die Dreyeck mit ihren Grundlinien im Verhältnisse, welches schon aus §. 31. XI. bekannt ist.

2) Sind die beyden Produkte $AB \times AC$ und $AE \times AD$ einander gleich, so müssen auch die beyden Dreyecke ACB und AED einander gleich seyn, weil in diesem Falle

$AB \times AC : AD \times AE = 1$ und mithin auch $\triangle ACB : \triangle AED = 1$ nämlich

$\triangle ACB = \triangle AED$ werden muß.

IV. Folgesätze.

Fig. 79. 1) Ein Dreyeck ABF Fig. 79. wird in ein anderes ACD von gleicher Fläche und von einer vorgelegten Grundlinie AC verwandelt, wenn man AC in

(die verlängerte) AB aufträgt, aus B zu CF eine Parallele BD zieht und hierdurch den Punkt D des Schenkels AF schneidet, aus welchem Punkte D alsdann die Linie DC zum begehrten Dreyecke ADC gezogen wird. Fig. 79.

Eben so wird auch ein Dreyeck ACD in ein △ ABF von einer gegebenen Grundlinie AB verwandelt wenn man zu BD eine Parallele CF zieht und hiedurch AD oder ihre Verlängerung in F schneidet.

Beweis. Da BD ∥ CF, so ist

AB : AC = AD : AF und

AB × AF = AC × AD.

Da nun das Produkt AB × AF aus den Seiten des Dreyeckes BAF eben so groß ist, als das Produkt AC × AD aus den Seiten des Dreyeckes CAD, und beyde Dreyecke mit den genannten Seiten einen gleichen Winkel in A einschließen, so sind auch die Dreyecke selbst einander gleich, wie vorher schon im III. Zus. 2. dargethan worden ist.

2) Ein Parallelogramm ABGF wird in ein anderes auf dieselbe Art wie ein Dreyeck verwandelt, weil, wenn das △ ABF = △ ACD ist, auch sodann die zugehörigen Parallelogramme BAFG und CADE einander gleich seyn müssen.

Anmerkungen. 1) Sollte ein Dreyeck CAE in ein anderes BAF vom gegebenen Winkel in A verwandelt werden, so zieht man ED ∥ zu CA und verwandelt alsdann das △ CAD, welches = △ CAE ist, auf die vorige Art. Eben so werden wir auch Parallelogramme behandeln können.

2) Die Verwandlung der Rechtecke in ein Quadrat ist schon im vorigen Paragraphen gezeigt worden. Soll ein Parallelogramm oder ein Dreyeck in ein Quadrat verwandelt werden, so muß man zuvor statt derselben ein gleichgroßes Rechteck machen.

V. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien AB und CD Fig. 76. durch zwey in einem Zwischen-Punkte G sich durchkreuzende Linien CB und AD geschnitten worden, so ist, Fig. 76.

Fig. 76. 2) Wenn CG = y gefunden werden soll, so messe man CB = a und die Senkrechte AH = b, setze $\frac{a}{b} = n$ und

$$y = n + \sqrt{n\,(n + 2a)}.$$

3) Durch Verzeichnung kann CD gefunden werden, wenn man zuerst mit EF oder c in s dividirt, AK = dem erhaltenen Quotienten $\frac{s}{c} = m$ macht (wo demnach BA um AK verlängert wird), sodann in A eine Senkrechte AL auf BK errichtet, BK mit dem Zirkel faßt und aus B mit dem Radio BK = BL die Senkrechte AL in L schneidet. Trägt man nun AL nach AI (nämlich in AB oder in seine Verlängerung), und KI nach CD, so ist D der Punkt, wohin die begehrte Linie AD aus A gezogen werden muß.

Beweis.

Zu 1. Es ist (nach V.)

$$\Delta\,CDG = \frac{CD^2 \times EF}{2(AB + CD)} \text{ oder,}$$

$$s = \frac{x^2 \cdot c}{2\,(d + x)}.$$

Man mache den Divisor der rechten Seite der Gleichung zum Multiplikator der linken, so erhält man

$2\,ds + 2\,sx = cx^2$, wo auch

$c\,x^2 - 2\,sx = 2\,sd$.

Man dividire alle Glieder durch c, so erhält man

$$x^2 - \frac{2s.x}{c} = \frac{2sd}{c}$$

und wenn der Quotient $\frac{s}{c} = m$ gesetzt wird:

$$x^2 - 2mx = 2 \cdot md,$$

und man zu beyden Seiten m^2 addirt:

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 + 2md = m\,(m + 2d);$$

und die Wurzel zieht:

$$x - m = \sqrt{m\,(m + 2d)}, \text{ wo endlich}$$

$$x = m + \sqrt{m\,(m + 2d)}.$$

Zu 2. Es ist (nach V.) Fig. 76.

$$\Delta CGD = \frac{CG^2 \times AH}{2\,(BC - CG)} \text{ oder}$$

$$s = \frac{y^2 \cdot b}{2\,(a - y)}$$

Entwickelt man nun hier den Werth von y auf ähnliche Art, wie wir vorher x entwickelt haben, so finden wir nach und nach:

$$2as - 2sy = by^2;$$
$$by^2 + 2sy = 2as;$$
$$y^2 + \frac{2s}{b} = \frac{2as}{b} \text{ und } \frac{s}{b} = n \text{ gesetzt:}$$
$$y^2 + 2ny = 2an;$$
$$+ n^2 = + n^2$$
$$y^2 + 2ny + n^2 = n\,(n + 2a)$$
$$y + n = \sqrt{n\,(n + 2a)} \text{ und}$$
$$y = -n + \sqrt{n\,(n + 2a)}.$$

Zu 3. Es ist zum Kreisbogen KL die Abscisse KA = m; der Radius KB = BA + AK = d + m und (vermöge §. 33. III.) die Ordinate AL = $\sqrt{KA \times (2\,BK - KA)} = \sqrt{m\,(2d + 2m - m)} = \sqrt{m\,(m + 2d)}$. Da nun AI = AL und CD = KI gemacht wird, so ist auch KI = KA + AI = $m + \sqrt{m\,(m + 2d)}$ = CD = x, wie in Nr. 1., weshalb auch die Verzeichnung ein richtiges Resultat liefert.

VII. Aufgabe. Es sind die drey Seiten AC = a; AB = b und BC = c irgend eines Dreyeckes CAB Fig. 36. gegeben, man soll hieraus die Fig. 36. Fläche s desselben berechnen.

Auflösung. Man suche die halbe Summe u der drey Seiten, nämlich $u = \frac{a + b + c}{2}$, so ist die Fläche $s = \sqrt{u\,(u - a)\,(u - b)\,(u - c)}$.

Beweis. Man setze die senkrechte Höhe BD = h; das eine Stück AD der Grundlinie = x, so ist das andere Stück DC = a − x und $DC^2 = a^2 - 2ax + x^2$. Nun ist,

Fig. 36.

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \text{ und}$$
$$BC^2 = DC^2 + BD^2 \text{ oder}$$
$$b^2 = x^2 + h^2 \text{ und}$$
$$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$$

daher auch durch Subtraktion der letzten Gleichung von der vorhergehenden:

$$b^2 - c^2 = -a^2 + 2ax, \text{ wo}$$
$$2ax = a^2 + b^2 - c^2.$$

Es ist aber die Höhe BD oder $h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{(b+x)(b-x)}$, daher auch $\Delta ACB = \frac{AC \times BD}{2}$ nämlich $s = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2}\sqrt{(b+x)(b-x)}$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2^2}(b+x)(b-x)} =$$

$$\sqrt{\frac{2^2 a^2}{2^2 2^2}(a+x)(a-x)} = \sqrt{\frac{2a(b+x) \cdot 2a(b-x)}{2^2 2^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2ab + 2ax) \cdot (2ab - 2ax)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}.$$

Man substituire den Werth für $2ax$ von oben hieher, so ist

$$s = \sqrt{\frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2) \cdot (2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}$$

Nun ist die eine Klammergröße

$$2ab + a^2 + b^2 - c^2 = (a+b)^2 - c^2$$
$$= (a+b+c) \times (a+b-c)$$

und die andere Klammergröße

$$c^2 - a^2 + 2ab - b^2 = c^2 - (a-b)^2 =$$
$$(c+a-b) \times (c-a+b),$$

daher auch

$$s = \sqrt{\frac{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (c+a-b) \cdot (c-a+b)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}$$

Man setze $\frac{a+b+c}{2} = u$, so ist $\frac{a+b-c}{2}$

$$= \frac{a+b+c}{2} - c = u - c; \quad \frac{c+a-b}{2} =$$

$u - b$ und $\frac{c-a+b}{2} = u - a$, daher auch

$s = \sqrt{u.(u-c)(u-b).(u-a)}$ oder
$s = \sqrt{u.(u-a)(u-b).(u-c)}$.

§. 35.

Von allerley Dreyecken im und am Kreise.

I. Wenn Fig. 84. der Bogen $ABC = 90°$, der Bogen $AB = \alpha°$ ist, aus dem Mittelpunkte M die Radien $MA = MB = MC = r$ und zum Bogen AB die zugehörigen Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente, Sekante und Cosekante gezogen werden, als $BD = EM = \sin\alpha$; $BE = MD = \cos\alpha$; $AF = \tang\alpha$; $CG = \cot\alpha$; $MF = \sec\alpha$ und $MG = \operatorname{cosec}\alpha$; so liegen sogleich folgende Proportionen und Gleichungen vor Augen. Fig. 84.

1) $MD : DB = MA : AF$ oder
$\cos\alpha : \sin\alpha = r : \tang\alpha$, woher
$\tang\alpha = \frac{r.\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{\cos\alpha \times \tang\alpha}{r}$
und $\cos\alpha = \frac{r.\sin\alpha}{\tang\alpha}$.

2) $MB : BD = MF : FA$ oder
$r : \sin\alpha = \sec\alpha : \tang\alpha$, woher
$\sin\alpha = \frac{r.\tang\alpha}{\sec\alpha}$; $\sec\alpha = \frac{r.\tang\alpha}{\sin\alpha}$
und $\tang\alpha = \frac{\sin\alpha.\sec\alpha}{r}$.

3) $MB : MD = MF : MA$
$r : \cos\alpha = \sec\alpha : r$, woher
$\cos\alpha \times \sec\alpha = r^2$; $\cos\alpha = \frac{r^2}{\sec\alpha}$ u. $\sec\alpha = \frac{r^2}{\cos\alpha}$.

4) $ME : EB = MC : CG$ oder
$\sin\alpha : \cos\alpha = r : \cot\alpha$, woher
$\sin\alpha = \frac{r.\cos\alpha}{\cot\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha.\cot\alpha}{r}$
und $\cot\alpha = \frac{r.\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Fig. 62. 5) MB : BE = MG : GC, oder
r : cos α = cosec α : cot α, woher

$$\cos\alpha = \frac{r.\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r.\cot\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\text{und } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha.\operatorname{cosec}\alpha}{r}.$$

6) MB : ME = MG : MC
r : sin α = cosec α : r, woher

$$\sin\alpha \times \operatorname{cosec}\alpha = r^2;\ \sin\alpha = \frac{r^2}{\operatorname{cosec}\alpha}$$

$$\text{und } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r^2}{\sin\alpha}.$$

Da ∠ MBE und ∠ BMD wechseln und so auch ∠ BME = ∠ MBD, so sind auch die Dreyecke BEM; GCM; MDB und MAF einander ähnlich, und zwar ist:

In △ GCM ∞ △ MAF

7) MC : CG = FA : AM oder
r : cot α = tang α : r, woher

$$= \cot\alpha \times \tan\alpha = r^2;\ \cot\alpha = \frac{r^2}{\tan\alpha}$$

$$\text{und } \tan\alpha = \frac{r^2}{\cot\alpha}.$$

8) MG : MC = FM : FA oder
cosec α : r = sec α : tang α, woher

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r \times \sec\alpha}{\tan\alpha};\ \sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha \times \tan\alpha}{r} \text{ und } \tan\alpha = \frac{r.\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha}.$$

9) MG : GC = FM : MA, oder
cosec α : cot α = sec α : r, woher

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\cot\alpha.\sec\alpha}{r};\ \cot\alpha = \frac{r.\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha}$$

$$\text{und } \sec\alpha = \frac{r.\operatorname{cosec}\alpha}{\cot\alpha}.$$

Endlich ist noch in den rechtwinkligen Dreyecken das Quadrat der Hypothenuse = der Summe der Quadrate aus den beyden Catheten, als

16) $MB^2 = MD^2 + BD^2$ oder $r^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, woher $\sin\alpha = \sqrt{r^2 - \cos^2\alpha}$ und $\cos\alpha = \sqrt{r^2 - \sin^2\alpha}$. Fig. 84.

11) $MF^2 = MA^2 + AF^2$ oder $\sec^2\alpha = r^2 + \tang^2\alpha$, woher $\sec\alpha = \sqrt{r^2 + \tan^2\alpha}$ und $\tang\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - r^2}$.

12) $MG^2 = MC^2 + CG^2$ oder $\operatorname{cosec}^2\alpha = r^2 + \cot^2\alpha$, woher $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{r^2 + \cot^2\alpha}$ und $\cot\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - r^2}$.

Wir sehen aus diesem, daß alle Sinus und Tangente und Sekanten wechselweise aus einander berechnet werden können, dergestalt, daß wenn von einem Bogen AB nur eine von diesen Größen bekannt ist, man alle übrigen leicht finden kann. Als

13) $\sin\alpha = \sqrt{r^2 - \cos^2\alpha} = \frac{r\ \tang\alpha}{\sec\alpha} = \frac{r\ \tang\alpha}{(r^2 + \tang^2\alpha)}$,

$= \frac{r.\ (\sec^2\alpha - r^2)}{\sec\alpha} = \frac{r^2}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{r^2}{(r^2 + \cot^2\alpha)}$

14) $\cos\alpha = \sqrt{(r^2 - \sin^2\alpha)} = \frac{r^2}{\sec\alpha} =$

$\frac{r^2}{(r^2 + \tang\ \alpha)} = \frac{r\ \cot\ \alpha}{\operatorname{cosec}\ \alpha} = \frac{r.\ \cot\ \alpha}{r^2 + \cot^2\alpha}$

$= r.\sqrt{\frac{\operatorname{cosec}^2\alpha - r^2}{(\operatorname{cosec}\ \alpha)}}$

15) $\tang\ \alpha = \frac{r.\ \sin\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{r.\ \sin\ \alpha}{(r^2 - \sin^2\ \alpha)}$

$= \frac{r.\ \ (r^2 - \cos^2\alpha)}{\cos\ \alpha} = \frac{r^2}{\cot\ \alpha} =$

$(\sec^2\alpha - r^2) = \frac{r^2}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\alpha - r^2)}}$

Sinc 24.

16) $\cot\alpha = \frac{r.\cos\alpha}{\sin\alpha} = r.\sqrt{\frac{r^2 - \sin.^2\alpha}{\sin\alpha}}$

$= \frac{r.\cos\alpha}{\sqrt{(r^2 - \cos.^2\alpha)}} = \frac{r^2}{\text{tang}\,\alpha} = \sqrt{\frac{r^2}{(\sec^2\alpha - r^2)}}$

$= \sqrt{\text{cosec}^2\,\alpha - r^2}.$

17) $\sec\alpha = \frac{r^2}{\cos\alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - \sin.^2\alpha)}} =$

$\sqrt{r^2 + \text{tang}^2\,\alpha} = \frac{r.\text{cosec}\,\alpha}{\cot\alpha} =$

$\frac{(r.\sqrt{(r^2 + \cot^2\alpha)}}{\cot\alpha} = \frac{r.\text{cosec}\,\alpha.}{\sqrt{(\text{cosec}^2\,\alpha - r^2)}}$

18) $\text{cosec}\,\alpha = \frac{r^2}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{r^2}{(r^2 - \cos^2\alpha)}}$

$= \frac{r.\sec\alpha}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{r.\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - r^2}} =$

$\frac{r.\sqrt{r^2 + \text{tang}^2\,\alpha}}{\text{tang}\,\alpha} = \sqrt{r^2 + \cot^2\alpha}.$

welche Formeln aus den obigen gezogen und zum Theil durch Substitution gefunden worden sind.

Anmerkungen. 1) Ist in Fig. 42. die Sehne CL = dem Radius PC = PL = r, so ist im gleichseitigen Dreyecke CPL jeder Winkel = 60°. Fällt man aus P eine Senkrechte PN auf CL, so ist der $\angle$ CPN = 30°; CN = $\frac{1}{2}$ CL = $\frac{1}{2}$ r und demnach sin 30° = $\frac{1}{2}$ r; ferner PN = $\sqrt{PC^2 - CN^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2}$ demnach cos 30° = $\sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

Fig. 43. 2) Ist (in Fig. 43.) OAZD ein Quadrat und demnach $\angle$ DOA = 90° und AZ = DZ = OA = r, so wird $\angle$ AOZ = $\angle$ DOZ = 45° und demnach tang (AOY) oder tang 45° = AZ = r und auch cot 45° = DZ = r und OZ = $\sqrt{OA^2 + AZ^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2}$ = r $\sqrt{2}$ nämlich sec 45° = r $\sqrt{2}$ seyn.

II. Aufgabe. Es sind drey Punkt A; B und C Fig. 83. gegeben, man soll hierzu den Radius AM zu einem Kreise, der durch diese drey Punkte geht berechnen. Fig. 83.

Auflösung. Man ziehe das Dreyeck ABC, messe zwey Schenkel AB und BC und die aus dem zwischen liegenden ∠ B auf die dritte Seite AC gefällte Senkrechte BD, so findet man den Radius AM durch die Formel:

$$AM = \frac{AB \times BC}{2\,BD}$$

Beweis. Wenn man aus der Mitte F der Seite AB eine Senkrechte FM errichtet, so geht diese durch den Mittelpunkt M, und es ist △ AFM ≅ BFM ∽ △ BDC, weil der rechte ∠ in D = ∠ in F; ∠ C oder ∠ BCA = ½ ∠ BMA = ∠ AMF und der dritte Winkel beyder Dreyecke auch gleich seyn muß, woraus folgt, daß

DB : BC = FA : AM, nämlich

$$AM = \frac{BC \times FA}{BD} = \frac{BC \times \frac{1}{2}\,AB}{BD} = \frac{AB \times BC}{2\,BD}$$ ist.

Anmerkung. Sind die drey Punkte, oder ist das △ ABG vorgelegt, so ist ebenfalls auch ∠ BGA = ∠ EMA und das rechtwinklige △ HBG ∽ △ FAM woher HB : BG = FA : AM und AM = $\frac{FA \times BG}{HB} = \frac{AB \times BG}{2\,HB} = BM.$

Ist ein rechtwinkliges △ AED Fig. 82. vorgelegt, so ist der Radius AC = ½ AD.

III. Lehrsatz. Wenn irgend zwey Sehnen AC und BD Fig. 54. in einem Punkte I innerhalb des Kreises sich durchschneiden, so ist das Produkt BI × ID = AI × IC. Fig. 54.

Denn es ist der ∠ AID = ∠ BIC, ∠ DAC = ∠ CBD und ∠ ADB = ∠ DBC, und demnach △ AID ∽ △ BIC, wo

AI : ID = BI : IC und

folglich auch AI × IC = ID × BI ist.

IV. Lehrsatz. Wenn irgend zwey Sehnen MN und EC Fig. 55. sich erst durch Verlängerung in Fig. 55.

Fig. 83. einem Punkte P außerhalb des Kreises durchschneiden, so ist das Produkt

$$PN \times PM = PC \times PE,$$

Denn es ist (vermöge §. 29. VI.) $\angle PCN = \frac{1}{2}$ Bogen NCDE $= \angle NME$ und $\angle PNC = \frac{1}{2}$ Bogen MBNC $= \angle MEC$ und demnach $\triangle PNC \sim \triangle PEM$, wo $NP : PC = EP : PM$ und

$$NP \times PM = PC \times EP \text{ ist.}$$

V. Lehrsatz. Wenn FAE eine Tangente und Fig. 84. A der Berührungspunkt eines Kreises Fig. 84. ist und aus einem Punkte E der Tangente eine gerade Linie EB durch den Mittelpunkt C geführt wird, welche den Kreis in D und B schneidet, und wenn auch aus A die Sehnen AB und AD gezogen werden, so ist $\triangle EAD \sim \triangle EBA$, weil $\angle E$ beyden Dreyecken gemein ist und die Winkel EAD und DBA den halben Bogen AD zum Maaße haben und es findet daher folgende Proportion statt:

$$DE : EA = AE : EB,$$

woher $AE^2 = DE \times EB$, und weil $BE = BD + DE = 2CD + DE$ ist,

$$AE^2 = (2\,CD + DE) \times DE = 2\,CD \times DE + DE^2.$$

VI. Aufgabe. Es sind zwey Parallellinien AD Fig. 86. und EG Fig. 86. vorgezogen und ein Punkt L gegeben, man soll einen Kreis BLF führen, der jene Parallelen berührt und durch diesen Punkt geht.

Auflösung. Man halbire den senkrechten Abstand BF der beyden Parellelen in I und ziehe durch diesen Punkt eine dritte Parallele HM, so liegt der Mittelpunkt I des Kreises in HM und der Radius des Kreises ist $= IB = IF = CK$ wo $CK \perp HM$. Man fasse BI mit dem Zirkel, setze den einen Fuß in L und schneide mit dem andern Fuße die Linie HM in F, so wird I der gesuchte Mittelpunkt seyn.

Daß diese Auflösung richtig ist, bezweifelt wohl niemand, weil $IL = IB = IF$ ist und AD und EG auf den Endpunkten B und F der Radien IB und IF senkrecht stehen.

VII. Auf-

VII. Aufgabe. Es sind zwey Parallelen AD und EG und eine dritte Linie CF vorgezogen, welche die Parallelen in C und G schneidet; man soll einen Kreis BLF führen, der alle drey Linien streift oder berührt. Fig. 86.

Auflösung. Man ziehe, wie vorher, die Linie HM, welche CG in M schneidet, und mache MI = MC, so ist I der Mittelpunkt und IL = IB = IF der Radius.

Beweis. Ist CLM eine Tangente, so ist auch △ ILM rechtwinklig, und weil der ∠ M beyden rechtwinkligen Dreyecken, ILM und CKM gemein und IL = CK ist, so wird auch, wegen der Congruenz, IM = CM seyn.

Anmerkung. Halbirt man den ∠ ACG durch CI, so geht diese Halbirungslinie ebenfalls durch den gesuchten Mittelpunkt I, der in der Linie HM angenommen werden muß. (§. 29.)

VIII. Aufgabe. Es sind Fig. 85. zwey Linien AE und AO, welche sich in A begegnen, vorgezogen und ist ein Punkt H vorgezeichnet; man soll einen Kreis BHLM führen, der jene Linien berührt und durch diesen Punkt geht.

Auflösung. Man halbire den ∠ EAO durch AK, errichte darauf eine Senkrechte GC, welche durch den Punkt H geht und AE in C schneidet, fasse GC mit dem Zirkel, und nachdem man den einen Fuß desselben in H gesetzt hat, schneide man mit dem andern Fuße die Linie GK in I, wo demnach HI = GC gemacht worden ist; trage ferner GI nach CB und nach CD und errichte daselbst die Senkrechten BF und DK auf AE, so werden diese Senkrechten die Punkte F und K in der Linie AK durchschneiden, welche man zum Mittelpunkte solcher Kreise BHML und DHMO anzunehmen hat, welche die Aufgabe befriedigen. FB und KD sind die Radien der gesuchten Kreise.

Beweis. Daß der Mittelpunkt dergleichen Kreise in der Linie AK liegen müsse, ist bekannt. Man setze AC = c; AG = a; GC = b; GH = d; FB = FH = x und CB = y, so ist

Fig. 85. 1) $c^2 = a^2 + b^2$ oder
$a^2 = c^2 - b^2$ und
$b^2 = c^2 - a^2$

2) $AB = AC - CB = c - y$ und weil $\triangle$ ABF $\sim$ $\triangle$ AGC, so ist
$AB : BF = AG : GC$, oder
$(c - y) : x = a : b$, woher
$ax = bc - by$ und
$a^2x^2 = b^2c^2 - 2b^2cy + b^2y^2$.

3) $FG = \sqrt{(FH^2 - GH^2)} = \sqrt{(x^2 - d^2)}$
und $AF = AG - FG = a - \sqrt{(x^2 - d^2)}$.

Nun gilt in $\triangle$ FAB $\sim$ $\triangle$ CAG auch die Proportion:

$FA : AB = CA : AG$ nämlich
$(a - \sqrt{(x^2 - d^2)}) : (c - y) = c : a$, woher
$a^2 - a\sqrt{(x^2 - d^2)} = c^2 - cy$ und
$-a\sqrt{(x^2 - d^2)} = c^2 - a^2 - cy$ und
(vermöge Nr. 1.)
$-a\sqrt{(x^2 - d^2)} = b^2 - cy$.

Man erhebe beyde Seiten dieser Gleichung ins Quadrat, so erhält man:
$+ a^2(x^2 - d^2) = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$ oder
$a^2x^2 - a^2d^2 = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$;
und substituire den Werth für a^2x^2 aus Nr. 2. hieher, so erhält man
$b^2c^2 - 2b^3cy + b^2y^2 - a^2d^2 = b^4 - 2b^2cy + c^2y^2$ wo nun
$b^2c^2 - b^4 - a^2d^2 = c^2y^2 - b^2y^2$ oder
$b^2(c^2 - b^2) - a^2d^2 = (c^2 - b^2)y^2$, und weil $c^2 - b^2 = a^2$ ist:
$b^2a^2 - a^2d^2 = a^2y^2$,

woraus der Werth für $y = \pm\sqrt{(b^2 - d^2)}$ folgt,

und nach Nr. 2 ist der Werth für $x = \frac{b}{a}(c - y)$,

oder $x = \frac{b}{a}\left[c \mp \sqrt{b^2 - d^2}\right]$, und nach Nr. 4. ist

AF oder AK $= \frac{c.(c - y)}{a}$ oder $= \frac{c.(c + y)}{a}$.

Aus diesen Formeln könnten wir nun den Werth für y und x sehr leicht berechnen, wir haben aber y durch Verzeichnung gefunden, indem wir HI = GC = b gemacht haben, wo nun GI = $\sqrt{HI^2 - GH^2}$ = $\sqrt{b^2 - d^2}$ = y = CB ist. Da eine Wurzel positiv und auch negativ gesetzt werden kann, so kann die vorgelegte Aufgabe auf zweyerley Art gelöst werden, und wir haben der Werth von y = $\pm\sqrt{b^2 - d^2}$ aus C einmal nach CB und das andermal nach CD auftragen, und weil auf diesen Punkten B und D die Radien FB und KD = x senkrecht stehen, so fanden wir die Mittelpunkte F und K, welche in AK liegen müssen, durch wirkliche Errichten dieser Senkrechten BF und DK auf AE. Fig. 85.

IX. Aufgab. Es sind zwey Punkte M und H vorgezeichnet und eine Linie AE vorgezogen; man soll den Mittelpunkt F oder K eines Kreises LMHB oder POMHD finden, der durch jene Punkte H und M geht und die Linie AE in B oder D berühret.

Auflösung. Man ziehe die Sehne HM und halbire sie durch die gezogene Senkrechte KGA, welche AE in A schneidet, so wird der gesuchte Mittelpunkt F oder K in dieser Linie HK liegen müssen. Man schneide AE in C durch die Verlängerung MH, mache, wie in voriger Aufgabe, HI = GC; trage GI nach CB und CD und errichte aus B und D die Senkrechten BF und DK, so werden diese den gesuchten Mittelpunkt F oder K in der Linie AK schneiden.

Beweis. Setzt man wie vorher, AC = c; AG = a; GC = b und GH = d; FH = FB = x und BC = y; so ist

1) $c^2 = a^2 + b^2$; $a^2 = c^2 - b^2$ und $b^2 = c^2 - a^2$;

2) AB = c − y und in Δ ABF ∽ AGC ist AB : BF = AG : GC oder (c − y) : x = a : b, woher ax = bc − by und bc − ax = by.

Fig. 85. Man sieht vor Augen, daß die Behandlung dieser und der vorigen Aufgabe ganz einerley ist und daß wir überall dieselben Formeln und dieselben Werthe für x und y erhalten werden. Da aber dieser Beweis noch auf eine andere Art geführt werden kann, und der Anfänger mit mancherley Wege bekannt werden muß, so wird es nicht undienlich seyn, ihn mit folgender Behandlung bekannt zu machen.

Es ist $FG = \sqrt{FH^2 - GH^2} = \sqrt{x^2 - d^2}$

und $AF = AG - GF = a - \sqrt{x^2 - d^2}$

und in Δ AFB ∞ Δ ACG ist

AF : FB = AC : CG, nämlich

$(a - \sqrt{x^2 - d^2}) : x = c : b$ und

$cx = ab - b\sqrt{x^2 - d^2}$ oder

$b\sqrt{x^2 - d^2} = ab - cx$ und das Quadrat:

$b^2x^2 - b^2d^2 = a^2b^2 - 2abcx + c^2x^2$

oder $(c^2 - b^2)x^2 - 2abcx = -a^2b^2 - b^2d^2$;

oder $a^2x^2 - 2abcx = -a^2b^2 - b^2d^2$;

$+ b^2c^2 = + b^2c^2$

$b^2c^2 - 2abcx + a^2x^2 = b^2[c^2 - a^2 - d^2]$

oder $(bc - ax)^2 = b^2(b^2 - d^2)$ woher die Wurzel $bc - ax = b\sqrt{b^2 - d^2}$

Nun ist, nach oben, $bc - ax = by$, daher

auch $by = b\sqrt{b^2 - d^2}$ und $y = \pm\sqrt{a^2 - d^2}$, wie im VIII.

Anmerkung. Es kann der Fall eintreten, daß der Durchschneidepunkt A zweyer Linien EB und OL so fern fällt, daß man den $\angle$ EAO nicht verzeichnen, noch weniger denselben durch AK in zwey gleiche Theile theilen kann. Dieser Fall ereignet sich wenn EB und OL beynahe parallel laufen. Um jedoch eine Linie KF zu ziehen, welche durch hinlängliche Verlängerung KFA den $\angle$ EAO in zwey gleiche Theile theilt, so errichtet man auf BE und LO gleichlange senkrechte Linien DQ und OR, zieht aus Q die Parallele QF zu DB und aus R die Parallele RF zu OL, bemerkt den Durchschnittspunkt F dieser gezo-

genen Linien und theile jetzt durch FK den ∠ QFR. Fig. 35.
Denn es ist QD = OR und QD = BF und RO = FL, daher auch FL = FB und F in AK zu liegen kömmt. Da ∠ QFK = ∠ EAF, so ist auch AFK eine gerade Linie.

§. 36.

Vom vorgelegten und hinzulegenden Trapeze.

Hieher gehören folgende Sätze:

I. Lehrsatz. Die Fläche ABCD Fig. 39. eines Fig. 39.
Trapezes wird gefunden, wenn man die beyden parallelen Seiten AB und DC addirt, und die halbe Summe derselben mit dem senkrechten Abstande EF der genannten Parallelen multiplicirt. Nämlich es ist Trapez

$$ABCD = \frac{(AB + DC)}{2} \times EF$$

Halbirt man BC in G und AD in H und mißt man GH, so findet man ebenfalls die Fläche des Trapezes, wenn man GH mit EF multiplicirt. Nämlich es ist auch

$$ABCD = GH \times EF.$$

Beweis. Man ziehe die Diagonale BD, so ist das Trapez = der Summe der beyden Dreyecke ABD + DBC. Da nun

$$\Delta ABD = \frac{AB \times EF}{2} \text{ und}$$

$$\Delta DCB = \frac{DC \times EF,}{2} \text{ so ist auch}$$

$$\text{Trapez } ABCD = \Delta ABD + \Delta DCB =$$

$$\frac{AB \times EF}{2} + \frac{DC \times EF}{2} = \frac{EE}{2}(AD + DC)$$

oder Trapez $ABCD = \frac{(AB + DC) \times EF}{2}$

wo $\frac{EF}{2}$ ein gemeinschaftlicher Faktor beyder Dreyecke war.

Fig. 39. Zieht man aus B eine Parallele BK zu AD, so ist DK = AB und KC = DC — DK = DC — AB; und △ BIG ∽ △ BKC. Sehen wir nun KC als Grundlinie und FE als Höhe des △s KCB und GI als Grundlinie und LE als Höhe des Dreyeckes IGB an und denken wir uns GLH in der Mitte zwischen AB und DC, so ist EL = ½ EF und es findet folgende Proportion statt:

KC : FE = IG : LE oder
(DC — AB) : FE = IG : ½ FE, woher
IG = ½ DC — ½ AB.

Addiren wir nun IG zu IH oder AB, so erhalten wir $GH = AB + IG = AB + \frac{1}{2} DC - \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} DC = \frac{AB + DC}{2}$. Multipliciren wir GH mit EF, so erhalten wir ebenfalls die Fläche $ABCD = GH \times EF = \frac{(AB + DC)}{2} \times EF$.

Folgesatz. Ein Trapez ABCD wird in ein Parallelogramm AMND verwandelt, wenn man BC in G halbirt und durch G eine Parallele MGN zu AD führt, welche die Seiten AB und DC in M und N schneidet. Denn es ist AMND = AM × EF = HG × EF = ABCD.

Umgekehrt wird ein Parallelogramm AMND in ein Trapez ABCD verwandelt, wenn man durch die Mitte G irgend einer Seite MN eine Linie BC zieht und dadurch die Seiten AM und DN oder ihre Verlängerung schneidet.

Fig. 71. II. Aufgabe. Es ist ein Trapez BDGE Fig. 71. (wo BD ∥ EG) vorgelegt, man soll darin eine Linie CF dergestalt ziehen, daß nicht nur die dadurch abgeschnittene Fläche EBCF = ⅓ oder = $\frac{u}{n}$ der ganzen Fläche EBDG oder = s □R wird, sondern auch BD zu EG sich verhält, wie BC zu EF.

Auflösung. Soll BCFE = ⅓ oder = $\frac{u}{n}$ der ganzen Fläche BDGE werden, so macht man auch

$BC = \frac{1}{3}$ BD oder $= \frac{u}{n}$ BD und $EF = \frac{1}{3}$ EG oder Fig. 72.
$= \frac{u}{n}$ EG und zieht von C nach F die Theilungslinie

Soll BCFE eine vorausbedingte Zahl s □R enthalten, so sucht man zuerst den senkrechten Abstand HI der beyden Parallelen und den Inhalt $= f$ □R der ganzen Fläche $= \frac{(BD + EG) \times HI}{2}$ dividirt mit f in s und wenn man den Werth des Bruches $\frac{s}{f} = m$ in mehren Decimalstellen richtig gefunden hat, so multiplicirt man mit m in BD und in EG und macht $BC = m \times BD$ und $EF = m.\ EG$.

Verlängert man die schiefen Seiten EB und GD bis zum Vereinigungspunkt A, so kann man die Fläche EBCF auch dadurch $= s$ □R machen, daß man aus der Mitte L eine dritte Parallele LM zieht, $LM = \frac{s}{HI}$ macht und aus A über M eine gerade Linie ACMF zieht.

Beweis. Man setze $BC = m \times BD$, wo m als ein unbekannter Decimalbruch angesehen wird, mit welchem man BD multiplicirt muß, um BC zu erhalten, und wovon bekannt ist, daß wenn m ein wirklicher Bruch z. B. $= \frac{1}{3}$ ist, man sodann auch durch Multiplikation mit $\frac{1}{3}$ in BD eine Linie $BC = \frac{1}{3} \times BD = \frac{BD}{3}$ erhält, welche ungleich kleiner als BD ist. Setzen wir aber $BC = m.\ BD$, so müssen wir auch $EF = m.\ EG$ setzen, weil die Proportion

$BD : BC = EG : EF$ nämlich
$BD : m.\ BD = EG : EF$

Statt finden soll, worin EF schlechterdings $= m.\ EG$ seyn muß. Da nun Trapez $BCFE = s$ □R werden soll, so müssen wir auch seine Fläche $\frac{(BC + EF) \times}{2}$

$HI = s$ nämlich

Fig. 71. $\frac{(m\ BD + m.\ EG)}{2} \times HI = s$ oder

$m.\ \frac{(BD + EG) \times HI}{2} = s$ setzen.

Es stellt aber die Formel $\frac{(BD + EG) \times HI}{2}$ die Fläche f des ganzen Trapezes BDGE vor, daher auch $m.\ f = s$ und $m = \frac{s}{f}$.

Wenn der Werth m des Bruches berechnet ist, so setzt man, wie oben, $BC = m.\ BD$ und $EF = m.\ EG$.

Wird $s = \frac{u}{n}\ f$ gesetzt, so ist $m = \frac{u}{n}$, $BC = \frac{u}{n}\ BD$ und $EF = \frac{u}{n}\ EG$.

Daß $EBCF = LM \times HI$, nämlich $s = LM \times HI$ und

$LM = \frac{s}{HI}$ sey, ist schon aus I dieses Paragraphen und aus §. 32. VIII. klar.

III. Aufgabe. Zwey schiefliegende Linien ECA Fig. 87. und FHA Fig. 87. sind von einer dritten HC durchschnitten, man soll zu HC eine Parallele GD oder KB so ziehen, daß jedes Trapez CHGD und CHKB, welches zwischen diesen Linien entsteht, eine vorausbestimmte Zahl s □R enthält.

Auflösung.

Erste Art. Man suche den Durchschnittspunkt A der Schiefen BD und GK, fälle aus A auf CH die Senkrechte AQRT, messe CH und RA und mache

$AT = \sqrt{\left[RA \times (RA + \frac{2s}{CH})\right]}$ und $AQ = \sqrt{\left(RA \times (RA - \frac{2s}{CH})\right)}$; so wird man alsdann über T und R die begehrten Theilungslinien GD und KB parallel zu CH ziehen können und es wird HCDG $= s$ oder auch $HCBK = s$ □R werden.

Zweyte Art. Man fälle aus C eine Senkrechte CI auf einen von den schiefen Schenkeln AF, messe AH und CI und mache $AG = \sqrt{AH \times \left(AH + \frac{2s}{CI}\right)}$ oder $AK = \sqrt{AH \left(AH - \frac{2s}{CI}\right)}$; so wird man alsdann aus F oder K die begehrten Theilungslinien GD oder KB ∥ zu HC ziehen können. Fig. 82.

Dritte Art. Man dividire die hinzulegende Fläche s □R durch $\frac{1}{2}$ CI, so erhält man einen in Ruthen ausgedrückten Quotienten, den man aus H entweder in HF oder in HL aufträgt, jenachdem man links oder rechts der Linie CH eine Fläche HCDG oder HCBK = s anlegen will. Errichtet man nun im ersten Falle eine Senkrechte HN in H und schneidet man diese in N durch einen aus der Mitte M über AF beschriebenen Halbkreis, so wird man AG = der Sehne AN zu machen haben. Errichtet man im zweyten Falle eine Senkrechte LP in L und schneidet man diese in P durch einen aus der Mitte O der Linie AH mit OA beschriebenen Kreis, so hat man AK = der Sehne AP zu machen.

Beweise:

1) Es ist $\triangle CHA = \frac{CH \times RA}{2}$ und Trapez CHGD = s und Trapez HCBK = s, daher $\triangle GDA = \triangle HCA + \square HCDG = \frac{CH \times RA}{2} + s$ und $\triangle BKA = \triangle HCH - \square HCBK = \frac{CH \times RA}{2} - s$. Nun gilt

erstlich die Proprtion:

AR : CH = AT : DG, woher

$DG = \frac{CH \times AT}{AR}$ und

Fig. 87. $\Delta DGA = \frac{DG \times AT}{2} = \frac{CH \times AT^2}{2\,AR} = \frac{CH \times RA}{2} + s.$

Hieraus folgt der Werth für

$\frac{AT^2}{AR} = RA \times \frac{2s}{CH}$ und für

$AT^2 = RA \times \left(RA + \frac{2s}{CH}\right)$ und

$AF = \sqrt{RA \times \left(RA + \frac{2s}{CH}\right)}$.

Zweitens gilt die Proportion:

$AR : CH = AQ : BK$, woher

$BK = \frac{CH \times AQ}{AR}$ und

$\Delta BKA = \frac{BK \times AQ}{2} = \frac{CH \times AQ^2}{2AR} = \frac{CH \times AR}{2} - s.$

Hieraus folgt der Werth für

$AQ = \sqrt{AR \times \left(AR - \frac{2s}{CH}\right)}$.

2) Es ist auch $\Delta AHC = \frac{AH \times CI}{2}$ und daher auch $\Delta AGD = \frac{AH \times CI}{2} + s$ und $\Delta AKB = \frac{AH \times CI}{2} - s.$ (nach §. 34.)

Da nun $AH^2 : \Delta AHC = AG^2 : \Delta AGD$ nämlich $AH^2 : \frac{AH \times CI}{2} = AG^2 : \left(\frac{AH \times CI}{2} + s\right)$ ist, so wird auch, (weil sich der gemeinschaftliche Faktor AH im ersten und zweyten Gliede der Proportion hebt) $AG^2 \times \frac{CI}{2} = AH \times \left(\frac{AH \times CI}{2} + s\right)$ und $AG = \sqrt{AH \times \left(AH + \frac{2s}{CI}\right)}$ seyn.

Und da ferner auch

$AH^2 : \triangle AHC = AK^2 : \triangle AKB$ nämlich Fig. 87.

$AH^2 : \frac{AH \times CI}{2} = AK^2 : \left(\frac{AH \times CI}{2} - s\right)$ ist,

so wird auch $\frac{AK^2 \times CI}{2} = AH \times \left(\frac{AH \times CI}{2} - s\right)$

und $AK = \sqrt{AH \times \left[AH - \frac{2s}{CI}\right]}$ seyn.

3) In der Verzeichnung ist $AF = \frac{2s}{CI}$ gemacht, weshalb $AF = AH + HF = AH + \frac{2s}{CI}$ Nun ist (nach §. 33.) $AN^2 = AF \times AH = \left[\frac{AH + 2s}{CI}\right] AH$ und $AG = AN$, daher

$AN = \sqrt{AH \times \left[AH + \frac{2s}{CI}\right]} = AG$ welches mit der obigen Formel übereinstimmt.

Da HL ebenfalls $= \frac{2s}{CI}$ gemacht worden, so ist $AL = AH - HL = AH - \frac{2s}{CI}$ und $AP =$

$\sqrt{H \times AL} = \sqrt{AH \times \left(AH - \frac{2s}{CI}\right)} =$

AK, wie im Nr. 2.

IV. Aufgabe. Auf den Endpunkten einer Linie EU Fig. 88. stehen zwey beynahe parallel laufende Schenkel AEI und BUVV, man soll zu EU eine Parallele HV oder BS so führen, daß die Fläche des daraus entstehenden Trapezes EUVH oder Trapez UEBS eine begehrte Zahl s □R enthält. Fig. 88.

Erste Auflösung. Man dividire mit UE in s □R, errichte auf UE eine Senkrechte NZ oder NL, mache NQ oder NM = den im Ruthen ausgedrückten Quotienten $\frac{s}{UE}$, führe über Q oder M eine Parallele WQI oder TMG zu UE, welche die schiefen

Fig. 88. Linien AX und RΩ schneidet; messe oder berechne WI oder TC; mache $NP = NQ \times \left(\frac{UE + WI}{2WI}\right)$ und $NL = NM \times \left(\frac{UE + TS}{2TS}\right)$; so wird, wenn über P und L die Parallelen VH und SB zu UE geführt werden, sowohl das eine Trapez UEHV als das andere UEBS in dem Falle sehr genau $s \mid \square R$ enthalten, wenn die schmale Fläche WIHV oder TCBS ohne wirklichen Fehler als Parallelogramm angesehen werden kann.

Beweis:

1) Fürs Trapez UEHV = s.

Man denke sich durch E eine Parallele FEKY zu RΩ gezogen, so wird, weil $NQ = \frac{s}{UE}$ gemacht worden ist, das Parallelogramm UEKW richtig $s \square R$ enthalten. Da schon UEKW = s, so ist auch das Trapez UEIW ums △ KEI größer als s und es muß, wenn das Trapez UEHV = s werden soll, von jenem Trapeze UEIW eine schmale Fläche WIHV abgeschnitten werden, welche dem Inhalte des Dreyeckes KEI gleich kömmt. Nun ist $IK = IW - WK = IW - EU$ und die Fläche des Dreyeckes $KIE = \frac{KI \times QN}{2}$ $= \left(\frac{IW - EU}{2}\right) \times QN$, daher, weil das Parallelogramm $WIHV = WI \times QP$ ist, und diese Fläche = dem Dreyecke KIE werden soll, man auch $WI \times QP = \frac{(IW - EU) \times QN}{2}$ zu setzen hat.

Aus dieser Gleichung folgt nun $QP = \frac{(IW - EU) \times QN}{2WI}$

und $NP = NQ - QP = NQ - \frac{(IW - EU) \times NQ}{2WI}$

$= \left(\frac{2WI \times NQ - WI \times NQ + EU \times NQ}{2WI}\right)$

$= \frac{WI \times NQ + EU \times NQ}{2WI} = \frac{NQ \times (EU + WI)}{2WI}$

= NP.

2) Fürs Trapez UEBS $= s$. Da $NM = \frac{s}{UE}$ gemacht worden ist, so ist jetzt das Parallelogramm UEFS $= s$ und mithin das Trapez UECT ums Dreyeck CEF kleiner als s. Soll nun das Trapez UEBS $= s$ □R werden, so muß dem vorigen Trapeze UECT noch eine schmale Fläche TCBS, (welche wir, weil BC zu ST beynahe parallel laufen soll, als Parallelogramm ansehen, zugelegt werden, die dem Inhalte des Dreyeckes CFE gleich kömmt. Es ist aber $FC = FT - TC = UE - TC$ und $\Delta\ FCE = \frac{FC \times MN}{2} = \frac{(UE - TC) \times NM}{2}$ und Parallelogramm TCBS $= TC \times ML$, daher auch weil dieß Parallelogramm $=$ gleich jenem Dreyecke werden soll,

$$TC \times ML = \frac{(UE - TC) \times NM}{2} \text{ woher}$$

$$ML = \frac{(UE - TC) \times NM}{2TC} \text{ und } NL = NM + ML = NM + \frac{(UE - FC) \times NM}{2TC} =$$

$$\left(\frac{2TC \times NM + UE \times NM - FC \times NM}{2\ TC}\right)$$

$$= \frac{NM \times (UE + TC)}{2\ TC}.$$

Anmerkung. Man kann auch $WI = WK + KI$ durch Rechnung finden, wenn man nämlich in einer gewissen Entfernung NZ eine Parallele ΩX zu UE zieht, diese mißt, $EU = Y\Omega$ von Ω abzieht, mit dem Reste $= XY$ folgende Proportion anstellt: $NZ : YX = NQ : KI$ und den Werth von $KI = \frac{YX \times NQ}{NZ}$ zu $EU = KW$ addirt.

Zweite Auflösung und zwar durch Verzeichnung.

Nachdem man, wie vorher, mit UE in s □R dividirt, $NQ = \frac{s}{UE}$ gemacht, WQI # zu UE und

Fig. 38. EK # UW gezogen und dadurch den Punkt K geschnitten hat, halbirt man EI in G, zieht aus K zu WG eine Parallele KH und schneidet damit den Schenkel EX in dem Punkte H, aus welchen die begehrte Theilungslinie HV zur Fläche UEHV = s parallel zu EU gezogen werden muß.

Eben so macht man wie vorher, auch $NM = \frac{s}{UB}$, TMF # UE und EF # UT, halbirt EC in D und zieht aus F eine Parallele FB zu DT, wodurch der Punkt B zur Theilungslinie BS und zur begehrten Fläche UEBS = s geschnitten wird

Beweis. Alles kömmt darauf an, daß durch diese Verfahrungsart das □ WIHV = △ KIE und das □ TCBS = △ CFE wird. Da △ KIE und □ WIHV einen ∠ in I einschließen, so ist (nach §. 34. III. und IV.) das △ KIE = □ WIHV, wenn KI × $\frac{1}{2}$ IE = WI × IH ist. Daß dieß wirklich der Fall ist, erhellt aus KH # WG und aus der Proportion:

KI : IH = WI : IG, wo richtig

KI × $\frac{1}{2}$ IE = WI × IH.

Eben so hat auch das △ FCE und das Parallelogramm FCBS einen gleichen Winkel in C, daher, wenn FC × CD = TC × CB ist, auch △ FCE = □ FCBS seyn muß. Da △ FCB ∽ △ TCD, so ist

FC : CB = TC : CD, woher richtig

FC × CD = CB × TC.

Fig. 39. V. Aufgabe. Zu einem Trapez ABCD Fig. 39. ist die vordere Parallele AB = a; die hinter DC = b und der senkrechte Abstand EF = c derselben gegeben, man soll den senkrechten Abstand EL = x berechnen, wo eine dritte Parallele GH = y gezogen werden muß, wenn die Fläche ABGH, welche an die Seite AB gelegt wird, genau s □R enthalten soll.

Auflösung.

1) Durch Rechnung.

Man berechne y nach der Formel $y = \sqrt{\left(a^2 + 2s.\left(\frac{b-a}{c}\right)\right)}$, so ist $x = \frac{2s}{a+y}$. Oder

man setze das Resultat der Formel $\frac{ac}{b-a} = p$, so Fig. 28. ist $x = -p + \sqrt{\left(p\left(p + \frac{2s}{a}\right)\right)}$.

Soll man an die längere Parallele DC des Trapezes DCBA eine Fläche DCGH von s □R anlegen, so setzt man die Ruthen in DC $= a$, in AB $= b$, und EL $= x$, FE aber, wie vorher $= c$, sodann berechnet man $y = HG$ nach der Formel $y = \sqrt{(a^2 - 2s)} \cdot \frac{(a-b)}{c}$ und setzt ebenfalls $x = \frac{2s}{a+y}$.

Oder man sucht das Resultat der Formel $\frac{ac}{a-b} = q$ und berechnet x nach der Formel $x = q - \sqrt{q\left(q - \frac{2s}{a}\right)}$.

Beweis. Wenn BK ∥ AD, so ist HI $=$ DK $=$ AB $= a$ und GI $=$ GH $-$ HI $= y - a$, und CK $=$ CD $-$ DK $= b - a$, und weil in den ähnlichen Dreyecken CKB und GIB die Grundlinien KC und GI mit den Höhen FE und LE im Verhältnisse stehen, so gilt die Proportion:

$KC : FE = IG : LE$ oder

$(b - a) : c = (y - a) : x$, woher

$x = \frac{c \times (y - a)}{b - a}$ und

$y - a = \frac{(b-a)}{c} x$

Ferner soll das Trapez ABGH $= s$ □R werden, daher wir auch $(AB + HG) \frac{EL}{2} = s$ oder $(a + y) \frac{x}{2} = s$ zu setzen haben, woraus

$x = \frac{2s}{a+y}$ und $a + y = \frac{2s}{x}$ folgt.

Man setze diesen und den vorigen Werth von x einander gleich, als

$$\frac{c \times (y-a)}{b-a} = \frac{2s}{y+a}$$

§. 39. und ordne diese Gleichung und entwickele daraus y, so erhält man

$$c \times (y - a).(y + a) = 2s.(b - a) \text{ und}$$

$$y^2 - a^2 = \frac{2s.(b-a)}{c}, \text{ wo}$$

$$y = \sqrt{(a^2 + 2s).\frac{(b-a)}{c}}.$$

Ist nun der Werth von y aus dieser Formel bekannt, so findet man auch x nach der obigen Formel

$$x = \frac{2s}{a+y}.$$

Man ziehe die obigen Gleichungen

$$a + y = \frac{2s}{x} \text{ und}$$

$$y - a = \frac{(b-a)\,x}{c}$$

von einander ab, so erhält man

$$2a = \frac{2s}{x} - \frac{(b-a)\,x}{c},$$

wo nun (alle Glieder mit x multiplicirt)

$$2ax = 2s - \frac{(b-a)}{c}x^2 \text{ oder}$$

$$\frac{(b-a)}{c}x^2 + 2ax = \frac{2s}{a}a$$

und (alle Glieder durch $\frac{b-a}{c}$ dividirt)

$$x^2 + 2x.\frac{ac}{b-a} = \frac{2s}{a}\cdot\frac{ac}{(b-a)}.$$

Man setze nun der Kürze wegen

$$\frac{ac}{b-a} = p, \text{ so ist}$$

$$x^2 + 2x.p = \frac{2s}{a}.p$$

und addire auf beyden Seiten dieser Gleichung eine Größe p^2, so erhält man

$$x^2 + 2px + p^2 = \frac{2s}{a}.p + p^2 \text{ oder}$$

$$(x +$$

$(x + p)^2 = p\left[p + \frac{2s}{a}\right]$, wo nun die Fig. 39.
Wurzel:

$$x + p = \sqrt{p\left[p + \frac{2s}{a}\right]} \text{ und}$$

$$x = -p + \sqrt{p\left[p + \frac{2s}{a}\right]}$$

Soll an die größere Seite DC ein Trapez DCGH vom vorausbestimmten Inhalte $= s$ □R angelegt werden, so muß man die Ruthen in DC $= a$, in FE $= c$, in AB $= b$, FL $= x$ und HG $= y$ setzen, sodann bleiben zwar, wegen ihrer Allgemeinheit die obigen Formeln; da aber jetzt DC $= a$ größer als AB $= b$ ist, so wird der Faktor $(b - a)$ negativ, weshalb die Form $y = \sqrt{(a^2 + 2s)\frac{(b-a)}{c}}$ in $y = \sqrt{(a^2 - 2s)\frac{(a-b)}{c}}$ übergeht. Der Werth von $x = \frac{2s}{a+y}$ aber bleibt. Ferner wird auch der Werth von $p = \frac{ac}{b-a} = -\frac{ac}{(a-b)}$ negativ, und setzen wir $\frac{ac}{a-b} = q$, so ist $p = -q$. Es geht daher auch die obige Gleichung

$$x^2 + 2px = \frac{2s.p}{a} \text{ in}$$

$$x^2 - 2qx = -\frac{2sq}{a} \text{ über,}$$

wo, wenn q^2 auf beyden Seiten addirt wird,

$$x^2 - 2qx + q^2 = q^2 - \frac{2sq}{a} \text{ oder}$$

$$(x - q)^2 = q\left(q - \frac{2s}{a}\right) \text{ und die}$$

Wurzel:

Fig. 39. $x - q = \sqrt{q\left(q - \frac{2s}{a}\right)}$ und

$$x = q \pm \sqrt{q\left[q - \frac{2s}{a}\right]}.$$

Da hier $\sqrt{q\left[q - \frac{2s}{a}\right]}$ kleiner als q ist, so kann man $\sqrt{q\left[q - \frac{2s}{a}\right]}$ von q subtrahiren und es bleibt der Werth von x doch positiv, weshalb $x = q - \sqrt{q\left(q - \frac{2s}{a}\right)}$.

2) Auflösung durch Verzeichnung.

Wir wollen erstlich annehmen, es sollte an die Fig. 89. Linie SG Fig. 89., wo die Schenkel GL und SV divergiren, ein Trapez SGHT von s □R angelegt werden, so legt man zuerst ein Parallelogramm SGNU von s □R hin (indem man die auf SG errichtete Senkrechte $WY = \frac{s}{SG}$ macht) und schneidet zugleich durch die zu SG gezogene Parallele UYNK den Punkt K des Schenkels GL; errichte sodann, wenn UN genau = SG gemacht worden ist, in N eine Senkrechte NO auf KU, faßt KU mit dem Zirkel und, indem man den einen Fuß desselben in K stehen läßt, schneidet man mit dem andern Fuße die Senkrechte NO in O und macht daher KO = KU; jetzt faßt man NO mit dem Zirkel und trägt diese Linie in UI, welche etwas kürzer als UK ist: zieht aus I eine Parallele IH zu NG oder US und schneidet dadurch den Punkt H des Schenkels GL, aus welchem die begehrte Theilungslinie HT parallel zu GS gezogen werden muß.

Anmerkung. Liegt IH gegen KH nicht schief genug, so ist der Schnitt schlecht und mithin auch diese Arbeit unzuverlässig, man wird daher in diesem Falle besser thun, die vorgelegte Aufgabe auf eine der vorhergehenden Arten zu lösen.

Zweytens wollen wir annehmen, daß ein Trapez SGBQ von vorausbestimmter Fläche = s □R nach der Seite der Linie SG hin angelegt werden soll,

wo die Schenkel GR und SQ stark convergiren. In Fig. 89.
diesem Falle macht man zuerst das Parallelogramm SGER = s, bemerkt den Punkt C des Schenkels GA, welcher durch die zu SG gezogene Parallele RE geschnitten wird, errichtet in E eine Senkrechte EF und schneidet diese aus G mit dem Radio GR = CF; tragt EF nach RD, zieht DB parallel zu RP und schneidet dadurch den Punkt B des Schenkels GA, aus welchem endlich die begehrte Theilungslinie BQ zum Trapeze SGBQ = s □ R gezogen wird.

Beweis und zwar für Figur SGKU.

Man setze SG = a, so ist WK oder auch GN $= \frac{s}{a}$. Man setze ferner UK = b, TH = y und WX = x, so ist NK = b — a und MH = y — a und in Δ GNK ∽ Δ GMH ist

GN : NK = GM : MH oder

$$\frac{s}{a} : (b - a) = x : (y - a),$$

woher $x = \frac{s}{a} \cdot \frac{(y - a)}{(b - a)}$.

Ferner soll Trapez SGHT = s, nämlich

$(a + y) \frac{x}{2} = s$ werden, daher auch

$$x = \frac{2s}{y + a}.$$

Man setze diesen und den vorigen Werth von x einander gleich, nämlich

$$\frac{s}{a} \cdot \frac{(y - a)}{(b - a)} = \frac{2s}{(y + a)}$$

und ordne die Gleichung, so erhält man

$(y - a)(y + a) = 2a(b - a)$ oder

$y^2 - a^2 = 2ab - 2a^2$, woher

$y = \sqrt{a(2b - a)}$.

Nach §. 33. III. ist in einem Kreise UO, dessen Radius KU = b und Abscisse UN = a ist, die Ordinate $NO = \sqrt{NU \times (2KU - NU)} = \sqrt{a \times (2b - a)}$. Da nun NO = UI = TH

Fig. 39. $= y$ gemacht worden ist, so finden wir durch diese Verzeichnung y wirklich $= \sqrt{a\,(2b - a)}$, wie begehrt wird.

Beweis für Figur SGBQ.

Hier ist SG wie vorher $= a$, $SR = GE = \frac{b}{a}$

Setzen wir $BC = b$, und $QB = GH = y$, SQ oder $GZ = x$ so ist $CE = a - b$ und $BZ = a - y$, und in $\triangle GEC \sim \triangle GZB$ ist.

$GE : EC = GZ : ZB$ oder

$\frac{b}{a} : (a - b) = x : (a - y)$, woher

$$x = \frac{b\,(a - y)}{a\,(a - b)} = \frac{a\,(y - a)}{a\,(b - a)}.$$

Da nun $SGBQ = s$ werden soll, so ist auch

$$\frac{(a + y)}{2}\,x = s \text{ und } x = \frac{2s}{a + y}.$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung für x folgt, wie vorher, derselbe Werth für $y = \sqrt{a.\,(2b - a)}$.

Da nun $RC = b$ der Radius des Bogens RF und RE die Abscisse ist, so wird die zugehörige Ordinate $EF = \sqrt{RE \times (2RC - RE)}$ nach §. 33. III. seyn, weshalb $EF = \sqrt{a.\,(2b - a)}$ und weil $EE = RD = QB = y$ gemacht worden ist, so ist richtig

$$y = \sqrt{a\,(2b - a)},$$

wie begehrt wird.

§. 37.

Vom vorgelegten und hinzulegenden Trapezoide.

I. Lehrsatz. Der Inhalt eines Trapezoides ABCD wird gefunden, wenn man (sowohl in Fig. 40. als 41.) von der ersten Ecke A zur dritten C eine sogenannte Diagonale AC gezogen denkt, hierzu aus

Fig. 40. und 41.

der zweyten Ecke B eine Parallele BE führt, den senkrechten Abstand DE dieser Parallelen von der vierten Ecke D mißt, diese Senkrechte mit der Diagonale multiplizirt und das Produkt halbirt. Nämlich es ist die Fläche des Trapezoides $ABCD = \frac{AC \times DE}{2}$.

Würde man (z. B. in Fig. 41.) die Diagonale BD und hierzu eine Parallele CG ziehen und die darauf aus A gefällte Senkrechte AG messen, so würde ebenfalls auch Trapezoid $ADCB = \frac{BD \times CG}{2}$ seyn. Fig. 41.

Beweis zu Fig: 40.

$$\Delta\ ACB = \frac{AC \times FE}{2} \text{ und}$$

$$\Delta\ ACD = \frac{AC \times FD}{2} \text{ daher auch}$$

$$\square\ ABCD = \Delta\ ACB + \Delta\ ACD = \frac{AC}{2} \times FE + \frac{AC}{2} \times FD = \frac{AC}{2} \times (FE + FD).$$

Da nun $FE + FD = ED$, so ist auch

$$\square\ ABCD = \frac{AC \times ED}{2}.$$

Zu Fig. 41.

$$\Delta\ ACB = \frac{AC \times EF}{2} \text{ und}$$

$$\Delta\ ACD = \frac{AC}{2} \times DF.$$

Da nun $\square\ ADCB = \Delta\ ACB - \Delta\ ACD$, so ist auch $\square\ ADCB = \frac{AC \times EF}{2} - \frac{AC \times DF}{2} = \frac{AC}{2} \times (EF - DF) = \frac{AC}{2} \times ED$.

Zusatz. Ein Trapezoid ABCD wird in ein Parallelogramm verwandelt, wenn man in dem Produkte $(\frac{1}{2}\ AC) \times ED = (\frac{1}{2}\ ED) \times AC$ einen von diesen beyden Faktoren zur Grundlinie, und den andern zur

Fig. 70. Höhe des Parallelogramms macht. Dagegen wird ein Trapezoid in ein Dreyeck verwandelt, wenn man AC und ED zur Grundlinie und Höhe des Dreyeckes wählt.

II. Aufgabe. In GABE ein Trapezoid ABCH von begehrten s □R hinzulegen.

Auflösung. Man fälle aus B eine Senkrechte BK auf AG, dividire s durch BK und mache AH = dem erhaltenen Quotienten $\frac{s}{BK}$, so ist das Dreyeck AHB = $\frac{1}{2}$ s. Man fälle ferner aus H eine Senkrechte HD auf BE, dividire jetzt s durch HD und mache BC = dem erhaltenen Quotienten $\frac{s}{HD}$, so wird das Δ BCH ebenfalls = $\frac{1}{2}$ s □R und mithin beyde Dreyecke AHB und BHC zusammen = $\frac{1}{2}$ s + $\frac{1}{2}$ s, = s seyn. Zieht man daher die Linie CH, so ist das Trapezoid ABCH = s.

Eben so können wir auch das Trapezoid GECH = s □R machen, wenn wir zuerst aus G die Senkrechte GF auf BE fällen, EC = $\frac{s}{GF}$ und mithin das Dreyeck FCG = $\frac{1}{2}$ s machen, sodann auch aus C eine Senkrechte CI auf GA fällen, GH = $\frac{s}{CI}$ und mithin das Dreyeck GHC ebenfalls = $\frac{1}{2}$ s machen, wo nun Trapezoid GECH = $\frac{1}{2}$ s + $\frac{1}{2}$ s = s wird.

Anmerkung. Ist das Trapezoid in AG länger als in BE und in GE breiter als in AB, so sucht man das hinzulegende Trapezoid ABCH oder GECH in AH oder GH länger als in BC oder EC zu machen. Diese Absicht wird erreicht, wenn man die Grundlinie AH, welche man durch Division der Größe s mit einer kurzen Senkrechten BK erhält, in AG aufträgt, dagegen aber die Grundlinie EC, welche man durch Division mit einer langen Senkrechten GF erhält, in EB aufträgt. Soll der Punkt H der Theilungslinie CH etwas mehr nach A hin, dagegen aber der Punkt C etwas mehr nach E hin

gerückt werden, so muß man von s einige u □R einmal subtrahiren und eben so viele □R zu s wieder addiren, dergestalt, daß wenn man $AH = \frac{s - u}{BK}$ macht, man sodann $BC = \frac{s + u}{HD}$ zu machen hat. Soll aber eine Theilungslinie CH auf direkten Wege so gefunden werden, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche einen vorausbestimmten Inhalt erhält, sondern auch gewisse Verhältnisse zwischen den Seiten AE und BC; AG und AH Statt finden, so nimmt man seine Zuflucht zur Auflösung folgender Aufgaben. Fig. 88.

III. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid PEDS Fig. 90., dessen Schenkel ED und PS divergiren, vorgelegt, man soll darin eine Linie BQ so ziehen, daß die abgeschnittene Fläche PEBQ nicht nur einen vorausbestimmten Inhalt von s □R hat, sondern auch nach Maßgabe der ganzen Fläche in EU schmäler und in PQ breiter läuft. Fig. 90.

Auflösung. Man fälle aus E eine Senkrechte ET auf PS, ziehe aus der Mitte L der Seite PE eine Parallele LN und aus E eine Parallele EG zu PS, mache $LM = \frac{s}{ET}$ und ziehe in M eine Linie RMFC, welche nach dem Punkt hinzielt, wo die Seiten PEA und SD durch Verlängerung zusammen kommen. Will oder kann man aber diesen Punkt nicht füglich festlegen, so sucht man PR und EF durch die Proportionen LN : LM = PS : PR = EG : EF, und zieht die Linie RMFC. Natürlich ist jetzt (vermöge des vor. Par.) das Trapez PEFR = s □R und demnach das Trapezoid PECR um den Inhalt des Dreyeckes $EFC = \frac{EF \times CU}{2}$ größer als s und setzen wir die Fläche des Dreyeckes EFC = u □R, so muß, wenn das Trapezoid PEBQ = s werden soll, vom Trapezoide PECR wieder eine schmale Fläche RCBQ, welche wir als Trapez ansehen können, von u □R abgeschnitten werden. Um dieses zu

Fig. 84. thun, suche man die aus C auf PR gefällte Senkrechte $CV = VU + UC = TE + CU$, ziehe aus C und aus der Mitte K der Linie RC Parallellinien CA und KH zu RP, mache $KI = \frac{u}{CV}$ und ziehe durch I gehend abermals eine Linie QIB, welche nach den Schneidepunkt der verlängerten Schenkel PA und SD hinzielt. Will man aber diesen Schneidepunkt nicht nahmhaft machen, so findet man CB und QR durch Proportion, als

$$KH : KI = RP : RQ = CA : CB.$$

Man sieht vor Augen, daß diese Verfahrungsart um desto richtiger wird, je weniger das schmale Trapezoid RCBQ vom Inhalte eines Trapezes abweicht, wo niemals mehr als ein kleines, fast unsichtbares Δ in B gefehlt werden kann. Sollte jedoch dieser Fehler in andern Fällen schon merklich werden, welches man augenblicklich gewahr wird, so kann man seine Zuflucht zu einer andern Auflösungsart nehmen, welche nachher beschrieben werden soll.

Anmerkung. Wenn in einem vorgelegten Trapezoide
Fig. 91. AENL Fig. 91., wo die Schenkel AE und LN convergiren, eine Theilungslinie SU so gezogen werden soll, daß nicht nur der abgeschnittene Theil LASU eine begehrte Zahl s □R enthält, sondern auch, weil die vorgelegte Fläche in AE breiter als in LN ist, der abgeschnittene Theil ebenfalls auch in AS verhältnißmäßig breiter als in LU werde; so zieht man aus L und aus der Mitte H der Seite LA Parallellinien LR und HK nicht zur kürzern LN, sondern zur längern AE, und schneidet dadurch die gegenüber stehende Seite EN oder ihre Verlängerung, fällt aus L die Senkrechte LB auf AE, macht $HI = \frac{s}{LB}$; bestimmt AC und LQ nach der Proportion:

$$HK : HI = AE : AC = LR : LQ;$$

wo nun Trapez $LACQ = s$ und mithin Trapezoid $LACM$ um das Dreyeck $LQM = LQ \times \frac{MP}{2}$

$= u$ □R zu klein ist, weshalb noch ein schmales Fig. 92.
Trapez MCSU von u □R zugelegt werden muß, wenn das Trapezoid LASU wirklich $= s$ □R enthalten soll. Um nun MCSU $= u$ □R zu machen, sucht man die aus M auf AE gefällte Senkrechte MD $=$ PD $-$ PM $=$ LB $-$ PM; zieht aus M und der Mitte G der Linie MC die Parallelen MO und GF zu CE, macht $GT = \frac{u}{MD}$ und berechnet CS und MU nach den Proportionen:

GF : GT $=$ CE : CS und
GF : GT $=$ MO : MU,

wo man zuletzt von S nach U die begehrte Theilungslinie SU ziehen kann.

IV. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid BFHE Fig. 92. vorgelegt, man soll aus dem Punkte K, wo die Seiten BF und EH durch Verlängerung zusammentreffen, eine Linie KGD durchs Trapezoid so führen, daß die abgeschnittene Fläche BFGD oder die Fläche EHGD eine begehrte Zahl □R enthält. Fig. 92.

Auflösung. Aus §. 34. VI. haben wir gelernt, wie wir aus K eine solche Linie KGC zum $\angle$ IAE ziehen können, daß das entstehende △ GAD eine vorausbestimmte Zahl $= v$ □R enthält. Wir müssen nämlich die aus K auf AE gefällte Senkrechte KC $= c$ und die aus K zu AE gezogene Parallele KI $= d$, welche den Schenkel AI in I schneidet, messen oder berechnen, den Werth des Quotienten $\frac{v}{c} = m$ suchen und AD aus der Formel $AD = m + \sqrt{m \times (m + 2d)}$ berechnen. Um nun diese Formel auf die vorliegende Aufgabe anzuwenden, so wird wenn BFGD $= s$ □R werden soll, man den Inhalt des Dreyeckes ABF $= t$ □R zu suchen, denselben zu BFGD $= s$ zu addiren und △ AGD $= t + s = v$ zu setzen haben. Legen wir alsdann ein △ AGD von $v = t + s$ □R hin, so wird alsdann, weil das vordere △ AFB schon t □R hat, das angelegte Trapezoid BFGD gewiß die noch begehrten übrigen s □R enthalten.

Fig. 92. Soll dagegen Trapezoid EHGD $=$ s □R werden, so sucht man den Inhalt des ganzen Dreyeckes AEH $=$ u, zieht davon EHGD $=$ s ab und setzt das hinzulegende △ ADG $=$ v $=$ u $-$ s, wozu nun abermals die Grundlinie AD berechnet werden kann.

Ist AB bekannt, so findet man BD, wenn man AB von dem berechneten AD subtrahirt. Eben so ist ED $=$ AE $-$ AD.

Anmerkung. Denkt man sich aus H und F Parallellinien HL und FM zu FD, so kann man nöthigen Falls aus den ähnlichen Dreyecken ELH und EBK die Höhe KC und aus den ähnlichen Dreyecken HMF und FBA die Grundlinie AB des Dreyeckes ABF berechnen. Eben so kann man auch KI aus △ AEH ∽ △ IHK oder △ AFB ∽ IFK finden.

Fig. 93. **V. Aufgabe.** Es ist Fig. 93. ein Trapezoid BCFG vorgelegt, man soll in demselben eine Theilungslinie DE so ziehen, daß nicht nur BCDE oder GFDE eine vorausbestimmte Fläche enthält, sondern auch die Proportion CF : CD $=$ BG : BE Statt findet.

Auflösung. Man suche zuerst den Vereinigungspunkt A der beyden schiefen Schenkel GB und FC, mache CH ∥ und $=$ BG, suche den Inhalt des Dreyeckes CHF und messe AC und CF; AB und BG. Wenn nun

1) das Trapezoid BCDE $=$ s □R werden soll, so setze man $\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{GB}+\frac{AC}{\quad}\right)=p$ und $\frac{s}{\triangle HCF}=q$; berechne den Werth m aus der Formel $m=-p+\sqrt{(p^2+q)}$ und mache CD $=$ m. CF und BE $=$ m $\times$ BG.

Wenn aber

2) das Trapezoid GFDE $=$ s □R werden soll, so setze man $\frac{1}{2}\left(\frac{AG}{GB}+\frac{FA}{FC}\right)=p$ und $\frac{GFDE}{\triangle CHF}=q$; $m=+p-\sqrt{(p^2-q)}$ und mache GE $=$ m. GB und FD $=$ m. FC.

Beweis. Man fälle aus F und C die Senkrechten FKL und CI auf AG, setze Fig. 98.

1) AB = a; AC = b; BG = c und CF = d; FK = h; BCDE = s und CD = m.d, so ist, weil CF : GD = BG : BE seyn soll, BE = mc und AE = AB + BE = a + mc und AD = b + md. Ferner ist CF : FK = AC : CI, oder d : h = b : CI, woher $CI = \frac{bh}{d}$; $\Delta ABC = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{abh}{2d}$; $\Delta AED = \Delta ABC + \square BCDE = \frac{abh}{2d} + s$ und $\Delta CHF = \frac{CH \times FK}{2} = \frac{BG \times FK}{2} = \frac{ch}{2}$.

Da nun Drecke BAC und EAD, welche einen gleichen Winkel A einschließen, mit dem Produkte der einschließenden Seiten im Verhältnisse stehen, so ist auch $BA \times AC : \Delta BAC = EA \times AD : \Delta EAD$, oder $a \cdot b : \frac{abh}{2d} = (a + mc)(b + md) : \left(\frac{abh}{2d} + s\right)$, woher $(a + mc)(b + md) = ab + \frac{2ds}{h}$ oder

$$ab + amd + bmc + m^2cd = ab + \frac{2ds}{h} \text{ und}$$

$$m^2 + \left(\frac{ad + bc}{cd}\right) m = \frac{2s}{ch} \text{ oder}$$

$$m^2 + \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right) m = \frac{s}{\frac{1}{2}ch}.$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = 2p$, nämlich $\frac{1}{2}\left[\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right] = p$ und $\frac{s}{\frac{1}{2}ch} = \frac{BCDE}{\Delta CHF} = q$, so ist $m^2 + 2pm = q$, worin der Werth von $m = -p + \sqrt{(p^2 + q)}$.

Nr. 96. 2) Wenn die Fläche GFDE = s werden soll, setze man GA = a; FA = b; GB = HC = c und FG = d; FK = h; GE = mc und FD = md, so ist EA = AG − GE = a − mc; AD = b − md und (in △ GFK ∽ △ AFL)

CF : FK = AF : FL oder

d : h = b : FL, woher

$FL = \frac{bh}{d}$ und $\triangle AGF = \frac{AG \times FL}{2} = \frac{a.bh}{2d}$

und $\triangle AED = AGF - \square GFDE = \frac{abh}{2d} - s$.

Da nun

GA × AF : △ GAF = EA × AD : △ EAD oder

$a \times b : \frac{abh}{2d} = (a - mc)(b - md) : \left(\frac{abh}{2d} - s\right)$, so ist $(a - mc)(b - md) = ab - \frac{2ds}{h}$ oder

$ab - amd - bmc + m^2cd = ab - \frac{2ds}{h}$; wo

$m^2 - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right) m = -\frac{2s}{ch}$ oder

$m^2 - 2m \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right) m = -\frac{s}{\frac{1}{2}ch}$

Man setze der Kürze wegen $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{d}{b}\right) = p$

und $\frac{s}{\frac{1}{2}ch} = \frac{GFDE}{\triangle CHF} = q$, so ist

$m^2 - 2mp = -q$, worin der Werth von

$m = p - \sqrt{(p^2 + q)}$.

Daß GE = mc und FD = md gemacht werden muß, versteht sich von selbst.

Anmerkung. Die Auflösung der vorgelegten Aufgabe durch Verzeichnung ist zu weitläufig, als daß man sie im Gedächtniß behalten könnte, weshalb sie übergangen wird.

Sechstes Kapitel.

Vergleichung der Winkel oder Bögen mit geraden Linien.

§. 38.

Von Sinus und Tangenten eines gliedrigen und mfachen Bogens.

1. Wenn man den Sinus und Cosinus von zwey Bögen α und β kennt, so kann man den Sinus und Cosinus von $(\alpha + \beta)$ und von $(\alpha - \beta)$ nach folgenden Formeln berechnen. Fig. 93

Grundformeln.

1. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha \times \cos\beta + \sin\beta \times \cos\alpha}{r}$;

2. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta.\cos\alpha}{r}$;

3. $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta}{r}$;

4. $\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta}{r}$.

Beweis.

Fig. 95. Es sey in Fig. 95. der Bogen ABC $= \alpha$ und der Bogen CD $=$ CB $= \beta$, so ist der Bogen ABCD $= \alpha + \beta$ und der Bogen AB $= \alpha - \beta$ und wenn CO $=$ AO, der Radius $= r$ des Bogens ABCD ist, so wird BD eine Sehne des Bogens BCD seyn, worauf der Radius CO senkrecht steht, wo alsdann DE $=$ BE $=$ sin (CD) $=$ sin β und EO $=$ cos β ist.

Man ziehe die Senkrechten BI; CK; EL und DM und die Parallelen BH und EF zu AO, so ist BI $=$ GL $=$ HM $=$ sin (AB) $=$ sin $(\alpha - \beta)$ und IO $=$ cos $(\alpha - \beta)$; CK $=$ sin (ABC) $=$ sin α und KO $=$ cos α; EL $=$ FM; DM $=$ sin (ABCD) $=$ sin $(\alpha + \beta)$ und MO $=$ cos $(\alpha + \beta)$; Δ DEF $\cong \Delta$ EBG und daher EF $=$ BG $=$ IL $=$ LM und DF $=$ EG $=$ FH.

Da nun Δ OCK $\sim \Delta$ OFL, so ist erstlich OC : CK $=$ OE : EL, oder

$$r : \sin \alpha = \cos \beta : EL, \text{ woher}$$

$$EL = \frac{\sin \alpha . \cos \beta}{r} = MF.$$

zweytens: CO : OK $=$ EO : OL, oder

$$r : \cos \alpha = \cos \beta : OL, \text{ woher}$$

$$OL = \frac{\cos \alpha . \cos \beta}{r}$$

Ferner ist $\angle$ GEB $= 90° - \angle$ GEO, und auch $\angle$ LOE $= 90° - \angle$ GEO, daher auch $\angle$ GEB $= \angle$ LOE und die rechtwinkligen Dreyecke GEB und LOE und auch die Dreyecke FDE und KOC einander ähnlich, wo nun erstlich OC : CK $=$ DE : EF, oder

$$r : \sin \alpha = \sin \beta : EF, \text{ woher}$$

$$EF = \frac{\sin \alpha . \sin \beta}{r} \text{ und}$$

zweytens: CO : OK $=$ ED : DF, oder

$$r : \cos \alpha = \sin \beta : DF, \text{ woher}$$

$$DF = \frac{\cos \alpha . \sin \beta}{r} = FH.$$

Nun ist
$DM = MF + FD = EL + DF$, daher auch Fig. 95.
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha.\cos\beta}{r} + \frac{\cos\alpha.\sin\beta}{r}.$$

Ferner ist
$BI = MH = FM - FH$, daher auch
$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha.\cos\beta}{r} - \frac{\cos\alpha.\sin\beta}{r},$$
und $OI = OL + LI = OL + FE$, daher auch
$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r} + \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{r};$$
und endlich
$OM = OL - LM = OL - EF$, daher
$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r} - \frac{\sin\alpha.\sin\beta}{r}.$$

II. Formeln für tang und cot $(\alpha \pm \beta)$.

Da wir uns auf die Formeln dieses Paragraphen oft beziehen werden; so wollen wir immer fortnumeriren und jetzt anführen:

5. $$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{(\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta)\,r^2}{r^2 - \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta};$$

6. $$\text{tang}(\alpha - \beta) = \frac{(\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta)\,r^2}{r^2 + \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta};$$

7. $$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\beta.\cot\alpha - r^2}{\cot\beta + \cot\alpha}$$ und

8. $$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\beta.\cot\alpha + r^2}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

Beweis.

Nach §. 35. I. Nr. 1. ist
$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{r.\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$. Setzen wir die vorhin gefundenen Werthe für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ aus Nr. 1 und 2 hieher, so finden wir
$$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{r\sin\alpha.\cos\beta + r.\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$ oder
$$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{r^2(r\sin\alpha\cos\beta + r.\sin\beta.\cos\alpha)}{r^2.\cos\alpha.\cos\beta - r\sin\alpha.r\sin\beta}.$$

Fig. 95 Man dividire sowohl die Glieder über, als unter dem Grundstriche durch $\cos\alpha$, $\cos\beta$, so erhält man

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{r^2\left(\frac{r.\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{r.\sin\beta}{\cos\beta}\right)}{r^2 - \frac{r.\sin\alpha.\, r\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

Da aber $\frac{r.\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tang\alpha$ und $\frac{r.\sin\beta}{\cos\beta} = \tang\beta$, so ist auch

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{r^2(\tang\alpha + \tang\beta)}{r^2 - \tang\alpha.\tang\beta}.$$

Ferner ist

$\tang(\alpha-\beta) = \frac{r.\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$, daher auch, die Werthe für $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ hieher gesetzt:

$$\tang(\alpha-\beta) = \frac{r.(\sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta.\cos\alpha)}{\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta},$$

woraus man nun durch dieselbe Behandlung wie vorher findet:

$$\tang(\alpha-\beta) = \frac{r^2.(\tang\alpha - \tang\beta)}{r^2 + \tang\alpha.\tang\beta}.$$

Und so ist (nach §. 35. I. Nr. 4.)

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{r.\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r.(\cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta)}{\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}.$$

Dividirt man nun hier die Glieder über und unter dem Querstrich durch $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und setzt zugleich $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha}{r}$ und $\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cot\beta}{r}$, so erhält man

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\cot\alpha.\cot\beta}{r} - r}{\frac{\cot\beta}{r} + \frac{\cot\alpha}{r}},$$ und wenn man über und unter dem Querstrich mit r multicirt,

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta.\cot\alpha - r^2}{\cot\beta + \cot\alpha}.$$

Durch

Durch dieselbe Behandlung findet man Fig. 95.

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\beta \cdot \cot\alpha + r^2}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

III. Von der Summe und Differenz aus zwei Sinus und Tangenten.

Man addire und subtrahire die Gleichung Nr. 2 von 1, oder 3 von 4, so erhält man

9. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2.\frac{\sin\alpha\cos\beta}{r}$;

10. $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = \frac{2.\sin\beta.\cos\alpha}{r}$;

11. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \frac{2.\cos\alpha.\cos\beta}{r}$;

12. $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \frac{2.\sin\alpha.\sin\beta}{r}$;

und setze $\alpha + \beta = \gamma$ und $\alpha - \beta = \delta$, nämlich $\alpha = \frac{\gamma + \delta}{2}$ und $\beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$, so erhält man

13. $\sin\gamma + \sin\delta = \frac{2.}{r}\sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta) \times \cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta)$;

14. $\sin\gamma - \sin\delta = \frac{2.}{r}\sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta) \times \cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta)$;

15. $\cos\gamma + \cos\delta = \frac{2.}{r}\cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta) \times \cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta)$;

16. $\cos\delta - \cos\gamma = \frac{2.}{r} \times \sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta) \times \sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta)$.

Es sey $\delta = 90^\circ - \varepsilon$, so ist, weil nach §. 24. $\sin(90 - \varepsilon) = \cos\varepsilon$ und $\cos(90^\circ - \varepsilon) = \sin\varepsilon$ ist.

17. $\sin\gamma + \cos\varepsilon = \frac{2.}{r}\sin\frac{1}{2}(\gamma + 90^\circ - \varepsilon) \times \cos\frac{1}{2}(\gamma - 90 + \varepsilon)$.

Fig. 95. 18. $\sin\gamma - \cos\varepsilon = \frac{2}{r} \sin\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon - 90^\circ) \times \cos\frac{1}{2}(\gamma + 90^\circ - \varepsilon)$.

Da (nach §. 24.) $\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$ und (nach §. 35. I. Anmerk.) $\cos 60^\circ = \cos(90 - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}r$ und $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = r$ und $\sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0$, so lassen sich folgende Formeln sehr leicht herleiten.

Man setze (in 14. und 16.) $\gamma = 60 + \alpha$ und $\vartheta = \alpha$, so ist

19. $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin\alpha = \frac{2}{r} \cdot \sin 30^\circ \times \cos(30 + \alpha) = \frac{2}{r} \cdot \frac{r}{2} \times \sin(60 - \alpha)$ oder

$\sin(60 + \alpha) = \sin\alpha + \sin(60 - \alpha)$

20. $\cos(60 + \alpha) - \cos\alpha = \sin(30 + \alpha) = \cos(60 - \alpha)$.

In 13 und 14 sey $\gamma = 90^\circ$, so ist

21. $r + \sin\delta = \frac{2}{r} \sin(45^\circ + \frac{1}{2}\delta) \times \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\delta) = \frac{2}{r} \times \sin^2(45^\circ + \frac{1}{2}\delta)$.

22. $r - \sin\delta = \frac{2}{r} \sin^2(45 - \frac{1}{2}\delta)$.

In 15 und 16 sey $\delta = \sigma$, so ist

23. $r + \cos\gamma = \frac{2}{r} \cos^2\frac{1}{2}\gamma$.

24. $r - \cos\gamma = \frac{2}{r} \sin^2\frac{1}{2}\gamma$.

In 17 und 18 sey $\varepsilon = \gamma$, so ist

25. $\sin\gamma + \cos\gamma = \frac{2}{r} \sin 45^\circ \times \cos(\gamma - 45^\circ) = \frac{2}{r} \sin 45^\circ . \sin(135^\circ - \gamma)$.

26. $\sin\gamma - \cos\gamma = \frac{2}{r} \sin(\gamma - 45) . \sin 45^\circ$.

Man dividire die Gleichungen Nr. 1; 2; 3 und 4 durch $\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r^2}$ oder durch $\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{r^2}$ oder durch $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{r^2}$, so erhält man, indem man wieder $\frac{r.\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha$ x. setzt. Fig. 93.

27. $\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta = \frac{r^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$.

28. $\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta = \frac{r^2.\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$.

29. $\cot\alpha + \cot\beta = \frac{r^2.\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$.

30. $\cot\alpha - \cot\beta = \frac{r^2.\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha.\sin\beta}$.

31. $\cot\alpha + \text{tang}\,\beta = \frac{r^2.\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha.\cos\beta}$.

32. $\cot\alpha - \text{tang}\,\beta = \frac{r^2.\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\cos\beta}$.

33. $r^2 + \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta = \frac{r^2.\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$.

34. $r^2 - \text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta = \frac{r^2.\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$.

35. $\cot\alpha.\cot\beta - r^2 = \frac{r^2\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$.

36. $\cot\alpha.\cot\beta + r^2 = \frac{r^2.\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}$.

IV. Sinus und Tangenten in gliedrigen Brüchen.

Man dividire, an Nr. 13 angefangen und bis 28 gegangen, eine Gleichung durch die andere, so erhält man eine Menge Gleichungen von folgender Gestalt:

37. $\frac{\sin\gamma + \sin\delta}{\sin\gamma - \sin\delta} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\gamma-\delta)}$.

Fig. 95.

38. $\frac{\sin\gamma + \sin\delta}{\cos\gamma + \cos\delta} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{r}$.

39. $\frac{\sin\gamma + \sin\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} = \frac{\cot\frac{1}{2}(\gamma-\delta)}{r}$.

40. $\frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\cos\gamma + \cos\delta} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma-\delta)}{r}$.

41. $\frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} = \frac{\cot\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{r}$.

42. $\frac{\cos\gamma + \cos\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} = \frac{\cot\frac{1}{2}(\gamma+\delta).\cot\frac{1}{2}(\gamma+\delta)}{r}$

43. $\frac{\sin\gamma + \cos}{\sin\gamma - \cos\varepsilon} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+90-\varepsilon)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon-90)}$.

44. $\frac{\sin\gamma + \cos\varepsilon}{\cos\gamma + \sin\varepsilon} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\gamma+90-\varepsilon)}{r}$.

45. $\frac{\sin\gamma - \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon - \cos\gamma} = \frac{\cot\frac{1}{2}(\gamma+90-\alpha)}{r}$.

Ferner:

46. $\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

47. $\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{r^2 + \operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r.\cos(\alpha-\beta)}$.

$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{r^2 - \operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta} = \frac{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)}{r^2}$, wie Nr. 5.

48. $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

49. $\frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha.\cot\beta + r^2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{r.\cos(\alpha-\beta)}$.

50. $\frac{\cot\alpha + \operatorname{tang}\beta}{\cot\alpha - \operatorname{tang}\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

V. Sinus und Tangenten eines doppelten und halben Bogens.

Man setze, in Nr. 1 und in den folgenden Gleichungen $\beta = \alpha$, so erhält man mit Hinsicht der Gleichungen in §. 35. I.

51. $\sin 2\alpha = 2.\frac{\sin\alpha.\cos\alpha}{r} = \frac{2.\sin\alpha}{r} \times \sqrt{r^2 - \sin^2\alpha}$; Fig. 95.

woher $\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha - \frac{4\sin^4\alpha}{r^2}$ und

$$\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{r.\sin 2\alpha}{2}.$$

52. $\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{r} = \frac{r^2 - 2\sin^2\alpha}{r}$

$= \frac{\cos^2\alpha - (r^2 - \cos^2\alpha)}{r} = \frac{2\cos^2\alpha - r^2}{r}$.

Hieraus folgt

$$\sin^2\alpha = \frac{(r - \cos 2\alpha)\,r}{2} \text{ und}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{(r + \cos 2\alpha)\,r}{2}.$$

53. $\tang 2\alpha = \frac{2\tang\alpha \times r^2}{r^2 - \tang^2\alpha}$ woher

$\tang^2\alpha + \frac{2r^2\tang\alpha}{\tang 2\alpha} = r^2$.

54. $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - r^2}{2\cot\alpha} = \frac{1}{2}\cot\alpha -$

$\frac{1}{2}.\frac{r^2}{\cot\alpha} = \frac{1}{2}\cot\alpha - \frac{1}{2}\tang\alpha$. Oder

$$\cot 2\alpha = \frac{r^2}{\tang 2\alpha} = \frac{r^2 - \tang^2\alpha}{2\tang\alpha}$$

Aus Nr. 27 u. f. f. erhalten wir:

55. $2\tang\alpha = \frac{r^2.\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ und weil (nach §. 35.)

$\cos^2\alpha = \frac{r^4}{r^2 + \tang^2\alpha}$, so ist

$2\tang\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{r^2}(r^2 + \tang^2\alpha)$ worin

$\sin 2\alpha = \frac{2r^2\tang\alpha}{r^2 + \tang^2\alpha}$. Und weil (nach

Fig. 95.

Nr. 52) $\cos^2 \alpha = r \frac{(r + \cos 2\alpha)}{2}$, so ist

$$\tang \alpha = \frac{r \cdot \sin 2\alpha}{r + \cos 2\alpha}.$$

56. $2 \cot \alpha = \frac{r^2 \cdot \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{r^2} \times (r^2 + \cot^2 \alpha)$, wo $\sin 2\alpha = \frac{2 r^2 \cot \alpha}{r^2 + \cot^2 \alpha}$. Und

$2 \cot \alpha = \frac{r^2 \cdot \sin 2\alpha \times 2}{r \cdot (r - \cos 2\alpha)}$ nämlich

$$\cot \alpha = \frac{r \cdot \sin 2\alpha}{r - \cos 2\alpha}.$$

57. $\cot \alpha + \tang \alpha = \frac{r^3}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 r^2}{\sin 2\alpha}$.

58. $\cot \alpha - \tang \alpha = \frac{r^2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 r \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$.

59. $r^2 + \tang^2 \alpha = \frac{r^4}{\cos^2 2\alpha}$ und

$r^2 - \tang^2 \alpha = \frac{r^2 \cdot \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$, woher

$$\frac{r^2 - \tang^2 \alpha}{r^2 + \tang^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{r}.$$

60. $\cot^2 \alpha - r^2 = \frac{r^3 \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$ und

$\cot^2 \alpha + r^2 = \frac{r^4}{\sin^2 \alpha}$, woher

$$\frac{\cot^2 \alpha - r}{\cot^2 \alpha + r^2} = \frac{\cos 2\alpha}{r}.$$

In 51.; 52. x. setze man $\frac{1}{2} \alpha$ statt α, so bekömmt man

61. $\sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{4 \sin^4 \frac{1}{2}\alpha}{r^2}$, wo

$4 \sin^4 \frac{1}{2}\alpha - 4 r^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha + r^4 = r^4 - r^2 \sin^2 \alpha$ und die Wurzel

$2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha - r^2 = \sqrt{r^2 (r^2 - \sin^2 \alpha)}$ und Sin. 98.

$\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{r^2 \pm r \sqrt{(r^2 - \sin^2 \alpha)}}{2}$.

62. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r \left(\frac{r - \cos \alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times$
$\sqrt{r (r + \sin \alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{r (r - \sin \alpha)}$
und $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r \left(\frac{r + \cos \alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times$
$\sqrt{r (r + \sin \alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{r (r - \sin \alpha)}$
nach §. 194. III. 3 der allgem. Mathem.

63. $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{2 r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha}{\tang \alpha} - r^2 = 0$, wo
$\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{-r^2 + r \sqrt{(r^2 + \tang^2 \alpha)}}{\tang \alpha}$
oder $\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{-r^2}{\tang \alpha} +$
$r \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\tang^2 \alpha}\right)}$ oder
$\tang \frac{1}{2}\alpha = -\cot \alpha + \sqrt{(r^2 + \cot^2 \alpha)}$

64. $\cot^2 \frac{1}{2}\alpha - 2 \cot \alpha \times \cot \frac{1}{2}\alpha = r^2$, wo
$\cot \frac{1}{2}\alpha = \cot \alpha + \sqrt{(r^2 + \cot^2 \alpha)}$

65. $\sin \alpha = \frac{2 r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha}{r^2 + \tang^2 \frac{1}{2}\alpha}$, wo
$\tang^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2 r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha} = -r^2$ und
$\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^2 (r^2 - \sin^2 \alpha)}}{\sin \alpha}$.

Ferner
$\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r + \cos \alpha} = \frac{r \sqrt{(r^2 - \cos^2 \alpha)}}{\sqrt{(r + \cos \alpha)^2}}$
$= r \sqrt{\left(\frac{r - \cos \alpha}{r + \cos \alpha}\right)}$.

66. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{r^2 \mp \sqrt{r^2 (r^2 - \sin^2 \alpha)}}{\sin \alpha}$ und
$\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r - \cos \alpha} = \sqrt{\left(\frac{r + \cos \alpha}{r - \cos \alpha}\right)}$

Fig. 95. V. Sinus und Tangente eines dreyfachen oder drittel Bogens.

In Gleichung 1; 3; 5 und 7 setze man 2α statt α, so erhält man

67. $\sin(2\alpha+\beta) = \frac{\sin 2\alpha \times \cos\beta + \sin\beta \times \cos 2\alpha}{r}$ und die Werthe für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ aus 51 und 52 hieher gesetzt:

$$\sin(2\alpha+\beta) = \frac{2\sin\alpha.\cos\alpha.\cos\beta + \sin\beta(r^2-2\sin^2\beta).}{r^2}$$

68. $\cos(2\alpha+\beta) = \frac{\cos 2\alpha.\cos\beta - \sin 2\alpha.\sin\beta}{r}$ oder

$$\cos(2\alpha+\beta) = \frac{(2\cos^2\alpha - r^2)\cos\beta - 2\sin\alpha.\cos\alpha.\sin\beta.}{r^2}$$

69. $\tang(2\alpha+\beta) = \frac{r^2\tang 2\alpha + r^2\tang\beta}{r^2 - \tang 2\alpha.\tang\beta}$

oder (aus 53)

$$\tang(2\alpha+\beta) = \frac{2r^2\tang\alpha + \tang\beta(r^2-\tang^2\alpha).}{r^2 - \tang^2\alpha - 2\tang\alpha.\tang\beta}$$

70. $\cot(2\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta.\cot 2\alpha - r^2}{\cot\beta + \cot 2\alpha}$ oder (aus 54)

$$\cot(2\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta(\cot^2\alpha - r^2) - 2r^2\cot\alpha.}{2\cot\beta.\cot\alpha + \cot^2\alpha - r^2}$$

Man setze in diesen vier Gleichungen, $\beta = \alpha$, so ist

71. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - \frac{4\sin^3\alpha}{r^2}$;

72. $\cos 3\alpha = \frac{4\cos^3\alpha}{r^2} - 3\cos\alpha$

73. $\tang 3\alpha = \frac{3r^2\tang\alpha - \tang^3\alpha}{r^2 - 3\tang^2\alpha}$ und

74. $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3r^2\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - r^2}$

Man substituire hier $\frac{\pi}{3} - \alpha$ statt α und ordne gehörig die Gleichungen: Fig. 95.

75. $\sin^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{3}{4} r^2 \sin \frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{r^2}{4} \sin \alpha = 0$;

76. $\cos^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{3}{4} r^2 \cos \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{r^2}{4} \cos \alpha = 0$;

77. $\tang^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - 3 \tang^2 \frac{\pi}{3} - \alpha \times \tang \alpha - 3 r^2 \times \tang \frac{\pi}{3} - \alpha + r^2 \tang \alpha = 0$.

78. $\cot^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - 3 \cot^2 \frac{\pi}{3} - \alpha \times \cot \alpha - 3 r^2 \times \cot \frac{\pi}{3} - \alpha + r^2 \cot \alpha = 0$.

VI. Sinus und Tangente eines 4; 5 und nfachen Bogens.

Setzen wir in den Gleichungen 1; 3; 5 und 7, 3α statt α und nachher auch $\beta = \alpha$, und r überall $= 1$; so erhalten wir

79. $\sin 4\alpha = (8 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha) \cdot \sin \alpha$ oder $\sin 4\alpha = (4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha) \cdot \cos \alpha$

80. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 = 8 \sin^4 \alpha - 8 \sin^2 \alpha + 1$.

81. $\tang 4\alpha = \frac{4 \tang \alpha - 4 \tang^3 \alpha}{1 - 6 \tg^2 \alpha + \tang^4 \alpha}$.

82. $\cot 4\alpha = \frac{1 - 6 \tang^2 \alpha + \tang^4 \alpha}{4 \tang \alpha - 4 \tang^3 \alpha}$.

Eben so können wir ferner auch Ausdrücke für $\sin 5\alpha$; $\cos 5\alpha$; $\tang 5\alpha$; $\cot 5\alpha$; $\sin 6\alpha$; $\sin 7\alpha$ ꝛc. finden, wenn wir in den Gleichungen 1; 3; 5; und 7; zuerst 4α statt α und dann 5α statt α ꝛc. und jedesmal β wieder $= \alpha$ setzen, wie gezeigt worden ist.

Aus folgenden Formeln erkennt man das Gesetz, nach welchem die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten eines nfachen Bogens ausgedrückt werden müssen. Die Formeln selbst sind durch Combinationen und Lehre von arithmetischen Reihen gefunden worden.

$\sin n\alpha = \frac{n}{1} \sin^1 \alpha \cdot \cos^{n-1} \alpha -$

Fig. 98.

$$\frac{n.\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}\sin^3\alpha.\cos^{n-3}\alpha$$
$$+\frac{n.\,(n-1)}{1\quad 2}.\frac{(n-2)}{3}.\frac{(n-3)}{4}.$$
$$\frac{(n-4)}{5}\sin^5\alpha.\cos^{n-5}\alpha+\text{ꝛc.}$$

$$\cos n\,\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n.\,(n-1)}{1.\quad 2}\cos^{n-2}\alpha.\sin^2\alpha.$$
$$+\frac{n.\,(n-1)}{1.\quad 2.}.\frac{(n-2)}{3.}.\frac{(n-3)}{4}.$$
$$\cos^{n-4}\alpha.\sin^4\alpha - +\text{ꝛc.}$$

$$\text{tang } n\,\alpha = (n.\,\text{tang}\,\alpha -$$
$$\frac{n.\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}\text{tang}^3\alpha +$$
$$\frac{n.\,(n-1)\,..\,(n-4)}{1.\quad 2.\quad\ldots\quad 5.}\text{tg}^5\alpha - \Big):$$
$$\Big(1-\frac{n.\,(n-1)}{1.\quad 2}\text{tang}^2\alpha + \frac{n.\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}.$$
$$\frac{(n-3)}{4.}\text{tg}^4 - \Big)$$

$$\cot n\,\alpha = \Big(\cot^n\alpha -$$
$$\frac{n.\,(n-1)}{1.\quad 2}\cot^{n-2}\alpha + :$$
$$\frac{n.\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}\text{tg}^{n-4}\alpha - \Big):$$
$$\Big(n.\,\cot^{n-1}\alpha - \frac{n.\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}\cot^{n-3} +$$
$$\frac{n.\,(n-1)\,..\,(n-4)}{1.\quad 2.\quad\ldots\quad 5}\cot^{n-5} - \Big).$$

§. 39.

Berechnung der Kreisbögen, Sinus und Tangenten.

Aus der Formel $\sin 2\,\alpha = \frac{2.\,\sin\alpha.\,\cos\alpha}{r}$ (Nr. 51. des vor. Par.) folgt, wenn man hieher den

Werth für $\cos\alpha = \sqrt{(r^2 - \sin^2\alpha)} = r -$ Fig. 92.

$$\frac{\sin^2\alpha}{2\,r} - \frac{1.\sin^4\alpha}{2.\,4.\,r^3} - \frac{1.\,3.\,\sin^6\alpha}{2.\,4.\,6.\,r^5} - \text{ꝛc.}$$

substituirt, daß auch

$$\text{I.}\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{r^2} - \frac{\sin^5\alpha}{4\,r^4} - \frac{\sin^7\alpha}{8\,r^6} - \text{ꝛc.}$$

seyn müsse.

In dieser Reihe steigen die Potenzen von $\sin\alpha$ mit ungeraden Exponenten; will man nun für $\sin\alpha$ eine Reihe $a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 +$ ꝛc. entwerfen, aus welcher, so wie der Bogen α gegeben ist, der zugehörige Sinus berechnet werden kann, so muß in dieser Reihe die Größe α ebenfalls auch nach ungeraden Potenzen fortschreiten. Es sind aber die Coefficienten, welche zu den verschiedenen Potenzen von α gehören, bisher noch nicht bekannt, weshalb man für dieselben einstweilen unbestimmte Buchstaben anzunehmen hat.

Da wir nun

$$\text{II.}\quad \sin\alpha = a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + d\alpha^7 \ldots$$

gesetzt haben, so wird diese allgemeine Formel für alle Bögen α und also auch für den Bogen 2α passen müssen. Substituiren wir nun 2α statt α in Gleichung II, so erhalten wir

$$\text{III.}\quad \sin 2\alpha = 2a\alpha + 8b\alpha^3 + 32c\alpha^5 + 128d\alpha^7 + \text{ꝛc.}$$

Ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung I ab, so erhalten wir

$$\text{IV.}\quad 0 = \left\{\begin{array}{l} 2a\alpha + 8b\alpha^3 + 32c\alpha^5 + 128d\alpha^7 + \text{ꝛc.} \\ -2\sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{r^2} + \frac{1\sin^5\alpha}{4\,r^4} + \frac{1}{8}\frac{\sin^7\alpha}{r^6} + \ldots \end{array}\right.$$

Man substituire hierher die Werthe für

$$\sin\alpha = a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + d\alpha^7 + \text{ꝛc.}$$

$$\sin^3\alpha = \left\{\begin{array}{l} a^3\alpha^3 + 3a^2b\alpha^5 + 3a^2c\alpha^7 + \text{ꝛc.} \\ \qquad\qquad + 3ab^2\alpha^7 \end{array}\right.$$

$$\sin^5\alpha = \ldots\ldots a^5\alpha^5 + 5a^4b\alpha^7 + \text{ꝛc.}$$

$$\sin^7\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots a^7\alpha^7 + \text{ꝛc.}$$

Fig. 93. und ordne die Glieder so, daß gleiche Potenzen von α vertikal unter einander zu stehen kommen, so erhält man

$$o = \begin{cases} 2a\alpha + 8b\alpha^3 + 32c\alpha^5 + 128d\alpha^7 + \text{ꝛc.} \\ -2a\alpha - 2b\alpha^3 - 2c\alpha^5 - 2d\alpha^7 - \text{ꝛc.} \\ + \frac{a^3\alpha^3}{r^2} + \frac{3a^2b\alpha^5}{r^2} + \frac{3a^2c}{r^2}\alpha^7 + \text{ꝛc.} \\ \qquad + \frac{3ab^2}{r^2}\alpha^7 + \text{ꝛc.} \end{cases}$$

$$o = \begin{cases} + \frac{5}{4}\frac{a^5\alpha^5}{r^4} + \frac{5}{4}\frac{a^4b\alpha^7}{4r^4} + \text{ꝛc.} \\ + \frac{7}{8}\frac{a^7\alpha^7}{8r^6} + \text{ꝛc.} \end{cases}$$

Nun setze man alle vertikale Reihen $= o$, oder welches einerley ist, die Coefficienten bey α, bey α^3, ꝛc. $= o$, so wird diese Gleichnng in allen Stükken befriediget. Es folgt aber auch aus der ersten Vertikalreihe

$2a - 2a = o$ der Werth für

$a = a$, und wir können daher für a einen willkührlichen Werth annehmen. Wir wollen für a den natürlichsten Werth $= 1$ wählen.

Aus der zweyten Vertikalreihe

$$6b + \frac{1}{r^2} = o \text{ folgt}$$

$$b = -\frac{1}{2.3.r^2}.$$

Aus der dritten:

$$30c - \frac{1}{2r^4} + \frac{7}{4r^4} = o, \text{ wohin}$$

die Werthe für a und b substituirt worden sind, folgt

$$c = +\frac{1}{2.3.4.5r^4} \text{ und}$$

aus der vierten erhält man

$$d = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7.r^6}.$$

Endlich substituire man die für a; b; c; d gefundenen Werthe in Gleichung II. so ist

V. $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3.r^2} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5.r^4} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7.r^6} + \text{&c.}$ Vg. 96.

Da der Fortschritt dieser Reihe vor Augen liegt, so kann man noch so viele Glieder anhängen, als man will, oder nöthig ist.

Wir wollen nun auch eine Formel für $\cos\alpha$ herleiten.

Nach oben ist

$$\cos\alpha = r - \frac{\sin^2\alpha}{2.r} - \frac{1\sin^4\alpha}{2.4.r^3} - \frac{1.3.\sin^6\alpha}{2.4.6.r^5} - \text{&c.}$$

Sucht man nun aus V die Werthe für $\sin^2\alpha$; $\sin^4\alpha$ &c. und substituirt diese hieher, so erhält man nach gehörigem Ordnen und Reduktion der Glieder

VI. $\cos\alpha = r - \frac{\alpha^2}{1.2.r} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.r^3} - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6.r^5} + \text{&c.}$

Ferner ist

$\text{tang}\,\alpha = \frac{r.\sin\alpha}{\cos\alpha}$, daher auch, wenn man mit dem Werthe $\cos\alpha$ in den Werth $\sin\alpha$ dividirt,

VII. $\text{tang}\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3r^2} + \frac{2.\alpha^5}{3.5r^4} + \frac{17.\alpha^7}{3.5.7.3r^6} + \text{&c.}$

und endlich ist $\cot\alpha = \frac{r^2}{\text{tang}\,\alpha}$, daher auch, wenn man r^2 durch den Werth von $\text{tang}\,\alpha$ dividirt, der Werth für $\cot\alpha$ gefunden wird, nämlich es ist

VIII. $\cot\alpha = \frac{r^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{3.5.3.r^2} - \frac{2\alpha^5}{3.5.7.9.r^4}$.

Nachdem nun die Formeln zur Berechnung der Sinus und Tangenten aus ihrem Bogen bekannt sind, so kann man nun auch Formeln zur Berechnung des Bogens aus einem gegebenen Sinus oder Tangenten auf dem Wege der Umkehrung der Reihen finden.

Da nämlich in der Formel V der Bogen α von ungeraden zu ungeraden Potenzen steigt, so entwerfe man für diesen Bogen eine Reihe, worin der $\sin\Phi$ unter ähnlicher Gestalt fortschreitet, als

Bis. 93. Nr. 52) $\cos^2 \alpha = r \cdot \frac{(r + \cos 2\alpha)}{2}$, so ist

$$\tang \alpha = \frac{r \cdot \sin 2\alpha}{r + \cos 2\alpha}.$$

56. $2 \cot \alpha = \frac{r^2 \cdot \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{r^2} \times$

$(r^2 + \cot^2 \alpha)$, wo $\sin 2\alpha = \frac{2 r^2 \cot \alpha}{r^2 + \cot^2 \alpha}$. Und

$2 \cot \alpha = \frac{r^2 \sin 2\alpha \times 2}{r \cdot (r - \cos 2\alpha)}$ nämlich

$$\cot \alpha = \frac{r \cdot \sin 2\alpha}{r - \cos 2\alpha}.$$

57. $\cot \alpha + \tang \alpha = \frac{r^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 r^2}{\sin 2\alpha}$.

58. $\cot \alpha - \tang \alpha = \frac{r^2 \cos 2\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$

$$\frac{2 r \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha.$$

59. $r^2 + \tang^2 \alpha = \frac{r^4}{\cos^2 2\alpha}$ und

$r^2 - \tang^2 \alpha = \frac{r^2 \cdot \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$, woher

$$\frac{r^2 - \tang^2 \alpha}{r^2 + \tang^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{r}$$

60. $\cot^2 \alpha - r^2 = \frac{r^3 \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$ und

$\cot^2 \alpha + r^2 = \frac{r^4}{\sin^2 \alpha}$, woher

$$\frac{\cot^2 \alpha - r}{\cot^2 \alpha + r^2} = \frac{\cos 2\alpha}{r}.$$

In 51.; 52. K. setze man $\frac{1}{2}\alpha$ statt α, so bekömmt man

61. $\sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{4 \sin^4 \frac{1}{2}\alpha}{r^2}$, wo

$4 \sin^4 \frac{1}{2}\alpha - 4 r^2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha + r^4 = r^4 - r^2 \sin^2 \alpha$ und die Wurzel

$2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha - r^2 = \sqrt{r^2 (r^2 - \sin^2 \alpha)}$ und Sig. 95.

$\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{r^2 \pm r \sqrt{(r^2 - \sin^2 \alpha)}}{2}$.

62. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r \left(\frac{r - \cos \alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times$
$\sqrt{r (r + \sin \alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{r (r - \sin \alpha)}$
und $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r \left(\frac{r + \cos \alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times$
$\sqrt{r (r + \sin \alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{r (r - \sin \alpha)}$
nach §. 194. III. 3 der allgem. Mathem.

63. $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{2 r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha}{\tang \alpha} - r^2 = 0$, wo
$\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{-r^2 \pm r \sqrt{(r^2 + \tang^2 \alpha)}}{\tang \alpha}$
oder $\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{-r^2}{\tang \alpha} +$
$r \sqrt{\left(r + \frac{r^2}{\tang^2}\right)}$ oder
$\tang \frac{1}{2}\alpha = -\cot \alpha + \sqrt{(r^2 + \cot^2 \alpha)}$

64. $\cot^2 \frac{1}{2}\alpha - 2 \cot \alpha \times \cot \frac{1}{2}\alpha = r^2$, wo
$\cot \frac{1}{2}\alpha = \cot \alpha + \sqrt{(r^2 + \cot^2 \alpha)}$

65. $\sin \alpha = \frac{2 r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha}{r^2 + \tang^2 \frac{1}{2}\alpha}$, wo
$\tang^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2 r^2 . \tang \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha} = -r^2$ und
$\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^2 (r^2 - \sin^2 \alpha)}}{\sin \alpha}$.

Ferner
$\tang \frac{1}{2}\alpha = \frac{r . \sin \alpha}{r + \cos \alpha} = \frac{r . \sqrt{(r^2 - \cos^2 \alpha)}}{\sqrt{(r + \cos \alpha)^2}}$
$= r \sqrt{\left(\frac{r - \cos \alpha}{r + \cos \alpha}\right)}$.

66. $\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{r^2 \mp \sqrt{r^2 (r^2 - \sin^2 \alpha)}}{\sin \alpha}$ und
$\cot \frac{1}{2}\alpha = \frac{r . \sin \alpha}{r - \cos \alpha} = \sqrt{\left(\frac{r + \cos \alpha}{r - \cos \alpha}\right)}$

Fig. 95. V. Sinus und Tangente eines dreyfachen oder drittel Bogens.

In Gleichung 1; 3; 5 und 7 setze man 2α statt α, so erhält man

67. $\sin(2\alpha+\beta) = \frac{\sin 2\alpha \times \cos\beta + \sin\beta \times \cos 2\alpha}{r}$ und die Werthe für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ aus 51 und 52 hieher gesetzt:

$$\sin(2\alpha+\beta) = \frac{2\sin\alpha.\cos\alpha.\cos\beta + \sin\beta(r^2 - 2\sin^2\beta).}{r^2}$$

68. $\cos(2\alpha+\beta) = \frac{\cos 2\alpha.\cos\beta - \sin 2\alpha.\sin\beta}{r}$ oder

$$\cos(2\alpha+\beta) = \frac{(2\cos^2\alpha - r^2)\cos\beta - 2\sin\alpha.\cos\alpha.\sin\beta.}{r^2}$$

69. $\tang(2\alpha+\beta) = \frac{r^2\tang 2\alpha + r^2\tang\beta}{r^2 - \tang 2\alpha.\tang\beta}$

oder (aus 53)

$$\tang(2\alpha+\beta) = \frac{2r^2\tang\alpha + \tang\beta(r^2 - \tang^2\alpha).}{r^2 - \tang^2\alpha - 2\tang\alpha.\tang\beta}$$

70. $\cot(2\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta.\cot 2\alpha - r^2}{\cot\beta + \cot 2\alpha}$ oder (aus 54)

$$\cot(2\alpha+\beta) = \frac{\cot\beta(\cot^2\alpha - r^2) - 2r^2\cot\alpha.}{2\cot\beta.\cot\alpha + \cot^2\alpha - r^2}$$

Man setze in diesen vier Gleichungen, $\beta = \alpha$, so ist

71. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - \frac{4\sin^3\alpha}{r^2}$;

72. $\cos 3\alpha = \frac{4\cos^3\alpha}{r^2} - 3\cos\alpha$

73. $\tang 3\alpha = \frac{3r^2\tang\alpha - \tang^3\alpha}{r^2 - 3\tang^2\alpha}$ und

74. $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3r^2\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - r^2}$

Man substituire hier $\frac{\pi}{3} - \alpha$ statt α und ordne gehörig die Gleichungen: Fig. 95.

75. $\sin^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{3}{4} r^2 \sin \frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{r^2}{4} \sin \alpha = 0$;

76. $\cos^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{3}{4} r^2 \cos \frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{r^2}{4} \cos \alpha = 0$;

77. $\tang^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - 3 \tang^2 \frac{\pi}{3} - \alpha \times \tang \alpha - 3 r^2 \times \tang \frac{\pi}{3} - \alpha + r^2 \tang \alpha = 0$.

78. $\cot^3 \frac{\pi}{3} - \alpha - 3 \cot^2 \frac{\pi}{3} - \alpha \times \cot \alpha - 3 r^2 \times \cot \frac{\pi}{3} - \alpha + r^2 \cot \alpha = 0$.

VI. Sinus und Tangente eines 4; 5 und nfachen Bogens.

Setzen wir in den Gleichungen 1; 3; 5 und 7, 3α statt α und nachher auch $\beta = \alpha$, und r überall $= 1$; so erhalten wir

79. $\sin 4\alpha = (8 \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha) . \sin \alpha$ oder $\sin 4\alpha = (4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha) . \cos \alpha$

80. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1 = 8 \sin^4 \alpha - 8 \sin^2 \alpha + 1$.

81. $\tang 4\alpha = \frac{4 \tang \alpha - 4 \tang^3 \alpha}{1 - 6 \tg^2 \alpha + \tang^4 \alpha}$.

82. $\cot 4\alpha = \frac{1 - 6 \tang^2 \alpha + \tang^4 \alpha}{4 \tang \alpha - 4 \tang^3 \alpha}$.

Eben so können wir ferner auch Ausdrücke für $\sin 5\alpha$; $\cos 5\alpha$; $\tang 5\alpha$; $\cot 5\alpha$; $\sin 6\alpha$; $\sin 7\alpha$ ꝛc. finden, wenn wir in den Gleichungen 1; 3; 5; und 7; zuerst 4α statt α und dann 5α statt α ꝛc. und jedesmal β wieder $= \alpha$ setzen, wie gezeigt worden ist.

Aus folgenden Formeln erkennt man das Gesetz, nach welchem die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten eines nfachen Bogens ausgedrückt werden müssen. Die Formeln selbst sind durch Combinationen und Lehre von arithmetischen Reihen gefunden worden.

$\sin n\alpha = \frac{n}{1} \sin^1 \alpha . \cos^{n-1} \alpha -$

Sig. 95.

$$\frac{n.\ (n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}\sin^3\alpha.\cos^{n-3}\alpha$$
$$+\frac{n.}{1}\frac{(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}.\frac{(n-3)}{4}.$$
$$\frac{(n-4)}{5}\sin^5\alpha.\cos^{n-5}\alpha+\text{ꝛc.}$$

$$\cos n\,\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n.\ (n-1)}{1.\quad 2}\cos^{n-2}\alpha.\sin^2\alpha,$$
$$+\frac{n.}{1}\frac{(n-1)}{2.}.\frac{(n-2)}{3.}.\frac{(n-3)}{4}.$$
$$\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - + \text{ꝛc.}$$

$$\text{tang } n\,\alpha = (n.\ \text{tang}\,\alpha -$$
$$\frac{n.\ (n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}\text{tang}^3\alpha +$$
$$\frac{n.\ (n-1)\ .\ .\ (n-4)}{1.\quad 2.\quad .\quad .\quad 5.}\text{tg}^5\alpha -):$$
$$\left(1-\frac{n.\ (n-1)}{1.\quad 2}\text{tang}^2\alpha+\frac{n.\ (n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}.\right.$$
$$\left.\frac{(n-3)}{4.}\text{tg}^4-\right)$$

$$\cot n\,\alpha = \Big(\cot^n\alpha -$$
$$\frac{n.\ (n-1)}{1.\quad 2}\cot^{n-2}\alpha+:$$
$$\frac{n.\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}\text{tg}^{n-4}\alpha-\Big):$$
$$\left(n.\cot^{n-1}\alpha-\frac{n.\ (n-1)\ (n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}\cot^{n-3}+\right.$$
$$\left.\frac{n.\ (n-1)\ .\ .\ (n-4)}{1.\quad 2.\quad .\quad 5}\cot^{n-5}-\right).$$

§. 39.

Berechnung der Kreisbögen, Sinus und Tangenten.

Aus der Formel $\sin 2\,\alpha = \frac{2.\ \sin\alpha.\ \cos\alpha}{r}$ (Nr. 51. des vor. Par.) folgt, wenn man hieher den

Werth für $\cos\alpha = \sqrt{(r^2 - \sin^2\alpha)} = r - \frac{\sin^2\alpha}{2r} - \frac{1.\sin^4\alpha}{2.4.r^3} - \frac{1.3.\sin^6\alpha}{2.4.6.r^5} - \text{&c.}$ Fig. 92.

substituirt, daß auch

$$\text{I.}\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{r^2} - \frac{\sin^5\alpha}{4r^4} - \frac{\sin^7\alpha}{8r^6} - \text{&c.}$$

seyn müsse.

In dieser Reihe steigen die Potenzen von sin α mit ungeraden Exponenten; will man nun für sin α eine Reihe $a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + \text{&c.}$ entwerfen, aus welcher, so wie der Bogen α gegeben ist, der zugehörige Sinus berechnet werden kann, so muß in dieser Reihe die Größe α ebenfalls auch nach ungeraden Potenzen fortschreiten. Es sind aber die Coefficienten, welche zu den verschiedenen Potenzen von α gehören, bisher noch nicht bekannt, weshalb man für dieselben einstweilen unbestimmte Buchstaben anzunehmen hat.

Da wir nun

$$\text{II.}\quad \sin\alpha = a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + d\alpha^7 \ldots$$

gesetzt haben, so wird diese allgemeine Formel für alle Bögen α und also auch für den Bogen 2α passen müssen. Substituiren wir nun 2α statt α in Gleichung II, so erhalten wir

$$\text{III.}\quad \sin 2\alpha = 2a\alpha + 8b\alpha^3 + 32c\alpha^5 + 128d\alpha^7 + \text{&c.}$$

Ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung I ab, so erhalten wir

$$\text{IV.}\quad 0 = \left\{\begin{array}{l} 2a\alpha + 8b\alpha^3 + 32c\alpha^5 + 128d\alpha^7 + \text{&c.} \\ -2\sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{r^2} + \frac{1\sin^5\alpha}{4r^4} + \frac{1}{8}\frac{\sin^7\alpha}{r^6} + \text{&c.} \end{array}\right.$$

Man substituire hierher die Werthe für

$$\sin\alpha = a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + d\alpha^7 + \text{&c.}$$

$$\sin^3\alpha = \left\{\begin{array}{l} a^3\alpha^3 + 3a^2b\alpha^5 + 3a^2c\alpha^7 + \text{&c.} \\ \qquad\qquad + 3ab^2\alpha^7 \end{array}\right.$$

$$\sin^5\alpha = a^5\alpha^5 + 5a^4b\alpha^7 + \text{&c.}$$

$$\sin^7\alpha = a^7\alpha^7 + \text{&c.}$$

Fig. 93. und ordne die Glieder so, daß gleiche Potenzen von α vertikal unter einander zu stehen kommen, so erhält man

$$o = \begin{cases} 2a\alpha + 8b\alpha^3 + 32c\alpha^5 + 128d\alpha^7 + \text{&c.} \\ -2a\alpha - 2b\alpha^3 - 2c\alpha^5 - 2d\alpha^7 - \text{&c.} \\ + \frac{a^3\alpha^3}{r^2} + \frac{3a^2b\alpha^5}{r^2} + \frac{3a^2c}{r^2}\alpha^7 + \text{&c.} \\ \qquad + \frac{3ab^2}{r^2}\alpha^7 + \text{&c.} \end{cases}$$

$$o = \begin{cases} + \frac{1}{4}\frac{a^5\alpha^5}{r^4} + \frac{1}{4}\frac{a^4b\alpha^7}{4r^4} + \text{&c.} \\ \qquad + \frac{1}{8}\frac{a^7\alpha^7}{8r^6} + \text{&c.} \end{cases}$$

Nun setze man alle vertikale Reihen $= o$, oder welches einerley ist, die Coefficienten bey α, bey α^3, &c. $= o$, so wird diese Gleichung in allen Stükken befriediget. Es folgt aber auch aus der ersten Vertikalreihe

$2a - 2a = o$ der Werth für

$a = a$, und wir können daher für a einen willkührlichen Werth annehmen. Wir wollen für a den natürlichsten Werth $= 1$ wählen.

Aus der zweyten Vertikalreihe

$$6b + \frac{1}{r^2} = o \text{ folgt}$$

$$b = -\frac{1}{2.3.r^2}.$$

Aus der dritten:

$$30c - \frac{1}{2r^4} + \frac{1}{4r^4} = o, \text{ wohin}$$

die Werthe für a und b substituirt worden sind, folgt

$$c = +\frac{1}{2.3.4.5\,r^4} \text{ und}$$

aus der vierten erhält man

$$d = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7.r^6}.$$

Endlich substituire man die für a; b; c; d gefundenen Werthe in Gleichung II. so ist

V. $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3.r^2} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5.r^4} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7.r^6} + \text{&c.}$ Fig. 96.

Da der Fortschritt dieser Reihe vor Augen liegt, so kann man noch so viele Glieder anhängen, als man will, oder nöthig ist.

Wir wollen nun auch eine Formel für $\cos\alpha$ herleiten.

Nach oben ist

$$\cos\alpha = r - \frac{\sin^2\alpha}{2.r} - \frac{1\sin^4\alpha}{2.4.r^3} - \frac{1.3.\sin^6\alpha}{2.4.6.r^5} - \text{&c.}$$

Sucht man nun aus V die Werthe für $\sin^2\alpha$; $\sin^4\alpha$ &c. und substituirt diese hieher, so erhält man nach gehörigem Ordnen und Reduktion der Glieder

VI. $\cos\alpha = r - \frac{\alpha^2}{1.2.r} + \frac{\alpha^4}{2.3.4r^3} - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6r^5} + \text{&c.}$

Ferner ist

$\text{tang}\,\alpha = \frac{r.\sin\alpha}{\cos\alpha}$, daher auch, wenn man mit dem Werthe $\cos\alpha$ in den Werth $\sin\alpha$ dividirt,

VII. $\text{tang}\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3r^2} + \frac{2.\alpha^5}{3.5r^4} + \frac{17.\alpha^7}{3.5.7.3r^6} + \text{&c.}$

und endlich ist $\cot\alpha = \frac{r^2}{\text{tang}\,\alpha}$, daher auch, wenn man r^2 durch den Werth von $\text{tang}\,\alpha$ dividirt, der Werth für $\cot\alpha$ gefunden wird, nämlich es ist

VIII. $\cot\alpha = \frac{r^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{3.5.3.r^2} - \frac{2\alpha^5}{3.5.7.9.r^4}$.

Nachdem nun die Formeln zur Berechnung der Sinus und Tangenten aus ihrem Bogen bekannt sind, so kann man nun auch Formeln zur Berechnung des Bogens aus einem gegebenen Sinus oder Tangenten auf dem Wege der Umkehrung der Reihen finden.

Da nämlich in der Formel V der Bogen α von ungeraden zu ungeraden Potenzen steigt, so entwerfe man für diesen Bogen eine Reihe, worin der $\sin\Phi$ unter ähnlicher Gestalt fortschreitet, als

§. 95. IX. $\alpha = \sin\alpha + a\sin^3\alpha + b\sin^5\alpha + c\sin^7\alpha + \text{&c.}$

Hieraus folgt

$$\alpha^3 = \sin^3\alpha + 3a\sin^5\alpha + 3b\sin^7\alpha + \text{&c.} + 3a^2\sin^7\alpha + \text{&c.}$$

$$\alpha^5 = \sin^5\alpha + 5a\sin^7\alpha + \text{&c.}$$

$$\alpha^7 = \sin^7\alpha + \text{&c.}$$

Substituirt man nun diese Werthe in die auf Null reducirte Gleichung V, so erhält man

$$0 = \left\{\begin{array}{l} \sin\alpha + a\sin^3\alpha + b\sin^5\alpha + c\sin^7\alpha + \text{&c.} \\ -\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{2.3.r^2} - \frac{a\sin^5\alpha}{2r^2} - \frac{b\sin^7\alpha}{2r^2} - \\ \qquad - \frac{a^2\sin^7\alpha}{2r^2} - \\ +\frac{\sin^5\alpha}{2.3.4.5r^4} + \frac{a\sin^7\alpha}{2.3.4.r^4} + \\ \qquad - \frac{\sin^7\alpha}{2.3.4.5.6.7r^6}. \end{array}\right.$$

Hier ist nun die erste Vertikalreihe ohnedem $= 0$, setzen wir nun auch die folgenden $= 0$, so erhalten wir aus $a - \frac{1}{2.3r^2} = 0$, den Werth für $a = \frac{1}{2.3.r^2}$.

Substituiren wir diesen Werth in die dritte Vertikalreihe $= 0$, so erhalten wir

$$b = \frac{1}{2.2.3r^4} - \frac{1}{2.3.4.5r^4} = \frac{3.3}{2.3.4.5r^4}.$$

und so erhalten wir aus der vierten:

$$c = \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7r^6} \text{ und so fort.}$$

$$d = \frac{3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9r^8}.$$

Substituiren wir diese Werthe für a; b; c &c. in IX, so ist

X. $\alpha = \sin\alpha + \frac{1.\sin^3\alpha}{2.3.r^2} + \frac{1.3.\sin^5\alpha}{2.4.5r^4}$

$$+\frac{1.3.5.\sin^7\alpha}{2.4.6.7.r^6}+\frac{1.3.5.7.\sin^9\alpha}{2.4.6.8.9.r^8}+\text{ꝛc.}$$ Fig. 95.

von welcher Reihe der Fortgang vor Augen liegt.

Auf demselben Wege der Umkehrung findet man aus VII. den Bogen α zu seinem Tangenten. Nämlich es ist, wenn $r = 1$ gesetzt wird,

$$\text{XI. } \alpha = \text{tang}\,\alpha - \frac{\text{tg}^3\alpha}{3}+\frac{\text{tg}^5\alpha}{5}-\frac{\text{tg}^7\alpha}{7}+\frac{\text{tg}^9\alpha}{9}+$$

worin der Fortgang noch einfacher als in der vorigen Reihe ist.

Man multiplicire diese Gleichung mit 2, so erhält man

$$2\alpha = 2\left(\text{tang}\,\alpha - \frac{\text{tg}^3\alpha}{3}+\frac{\text{tg}^5\alpha}{5}-\frac{\text{tg}^7\alpha}{7}+\frac{\text{tg}^9\alpha}{9}-\right);$$

setze β statt α in XI, als

$$\beta = \text{tg}^z\,\beta - \frac{\text{tg}^3\beta}{3}+\frac{\text{tg}^5\beta}{5}-\frac{\text{tg}^7\beta}{7}+\frac{\text{tg}^9\beta}{9}-$$

und addire beyde letzte Gleichungen, so ist

$$\text{XII. } 2\alpha+\beta = \begin{cases} 2\left(\text{tang}\,\alpha - \frac{\text{tg}^3\alpha}{3}+\frac{\text{tg}^5\alpha}{5}\right. \\ \quad \left. -\frac{\text{tg}^7\alpha}{7}+\frac{\text{tg}^9\alpha}{9}+\right) \\ \text{tang}\,\beta - \frac{\text{tg}^3\beta}{3}+\frac{\text{t}^5\beta}{5} \\ -\frac{\text{t}^7\beta}{7}+\frac{\text{t}^9\beta}{9}- \end{cases}$$

Es ist aber nach §. 38. Nr. 69., wenn $r = 1$ gesetzt wird,

$$\text{tang}\,(2\alpha+\beta) = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta.(1-\text{tang}^2\alpha)}{1-\text{tang}^2\alpha-2\,\text{tang}\,\alpha\times\text{tang}\,\beta}$$

und wenn (in Fig. 43.) $2\alpha+\beta =$ dem Bogen ABY von 45° gesetzt wird, tang $(2\alpha+\beta) =$ tang ABY $=$ AZ $=$ OD $= r = 1$, nämlich in diesem Falle Fig. 43.

Fig. 43. XIII. $\text{tang}(2\alpha+\beta) = 1 = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta\,(1-\text{tg}^2\,\alpha)}{1-\text{tg}^2\,\alpha - 2\,\text{tg}\,\alpha.\,\text{tg}\,\beta}$:

daher auch, wenn wir aus dieser Gleichung den Werth für tang β entwickeln, indem wir zuerst $1 - \text{tang}^2\,\alpha - 2\,\text{tang}\,\alpha.\,\text{tang}\,\beta = 2\,\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\beta.\,\text{tang}^2\,\alpha$

und dann

$\text{tang}\,\beta \times (1 + 2\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}^2\,\alpha) = 1 - 2\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}^2\,\alpha$

setzen, der Werth für

$$\text{tang}\,\beta = \frac{1 - 2\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}^2\,\alpha}{1 + 2\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}^2\,\alpha}.$$

In dieser Gleichung können wir den Werth für tang α beliebig annehmen, da aber tang $(2\alpha+\beta) = 1$ gesetzt worden ist, so wird, wenn positive Werthe Statt finden sollen, tang α selbst kleiner als $\frac{1}{2}$ angenommen werden müssen. Es sey daher tang $\alpha = \frac{1}{3}$, so finden wir für

$$\text{tang}\,\beta = \frac{1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9}}{1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

Substituiren wir diese Werthe für tang $\alpha = \frac{1}{3}$; tang $\beta = \frac{1}{7}$ und $2\alpha+\beta =$ Bogen ABY in die Gleichung XIII, so verwandelt sich der daselbst angeführte Bruch richtig in 1, dagegen erhalten wir aus der Gleichung XII die Länge des Bogens ABY =

$$\left\{\begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} - \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9}\right. \\ \left. - \frac{1}{11.3^{11}}..\right) + \frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \frac{1}{7.7^7} + : \\ \left. + \frac{1}{9.7^9} - \frac{1}{11.7^{11}} + ..\right) \end{array}\right.$$

Man reducire je zwey neben einander stehende Brüche, so erhält man

$$\text{ABY} = 2 \times \left\{\begin{array}{l} \frac{26}{1.3.3^3} + \frac{58}{5.7.3^7} + \frac{90}{9.11.3^{11}} \\ + \frac{122}{13.15.3^{15}} + \frac{73}{1.3.7^3} + \frac{169}{5.7.7^7} + \\ + \frac{265}{9.11.7^{11}} + \frac{361}{13.15.7^{15}} + \text{&c.} \end{array}\right.$$

Da

Da die Länge des Halbkreises ABCDEFG vom Radius OA = 1 gewöhnlich mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet wird und dieser Halbkreis 4mal so groß, als der Bogen AIY ist, so wird seyn: Fig. 44

$$\text{XIV. } \pi = 8 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{26}{1.3.3^3} + \frac{58}{5.7.3^7} + \frac{90}{9.11.3^{11}} + \\ \frac{122}{13.15.3^{15}} \ldots + \frac{73}{1.3.7^3} + \frac{169}{5.7.7^7} + \\ \frac{265}{9.11.7^{11}} + \frac{361}{13.15.7^{15}} + \ldots \end{array} \right.$$

Die Nenner dieser doppelten Reihe halten einen vor Augen liegenden Fortschritt. Die Zähler der ersten Reihe steigen um 32 — der andern um 96. Man kann also beyde Reihen nach Belieben weiter fortsetzen und denselben folgende Gestalt geben.

$$\pi = 8 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 26 \times \left(\frac{1}{1.3.3^3} + \frac{1}{5.7.3^7} + \frac{1}{9.11.3^{11}} \right. \\ \left. + \frac{1}{13.15.3^{15}} + \ldots \right) \\ 32 \times \left(\frac{1}{5.7.3^7} + \frac{2}{9.11.3^{11}} \right. \\ \left. + \frac{3}{13.15.3^{15}} + \ldots \right) \\ 73 \times \left(\frac{1}{1.3.7^3} + \frac{1}{5.7.7^7} + \frac{1}{9.11.7^{11}} \right. \\ \left. + \frac{1}{13.15.7^{15}} + \ldots \right) \\ 96 \times \left[\frac{1}{5.7.7^7} + \frac{2}{9.11.7^{11}} \right. \\ \left. + \frac{3}{13.15.7^{15}} + \ldots \right) \end{array} \right.$$

Der Werth dieser Reihen kann nach §. 73. des ersten Bandes der Mathem. sehr leicht berechnet werden, durch deren Addition man findet

$\pi = 3,\ 14159265358\ldots\ldots$

Daß π auch durch die Nahrungsbrüche $\frac{22}{7}$; $\frac{333}{106}$; $\frac{355}{113}$ ausgedrückt werden könne, ist §. 59. Bd. 1. gesagt.

Fig. 43. XV. Da die Länge des Bogens von $180^\circ = \pi = 3{,}14159265$ ꝛc. ist, so wird die Länge des Bogens α von $1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$; von m Graden $= \frac{m}{180} \times 3{,}14159265$; von 1 Minute $= \frac{\pi}{180 \times 60} = 0{,}00029089$; von m Minuten $= \frac{m.\ \pi}{180.\ 60}$; von 1 Sekunde oder von $1'' = \frac{\pi}{180.60^2} = 0{,}00000485$, und $m'' = \frac{m.\ \pi}{180.\ 60^2}$ seyn.

Anmerkung. Ueber die verschiedene Länge des Bogens von Grade zu Grade, von Minute zu Minute und von Sekunde zu Sekunde findet man Tafeln fast in einem jeden Handbuche, worin nicht nur die Logarithmen von den Zahlen, sondern auch die Sinus und Tangente von den Bögen zusammen getragen sind. Soll nach einer solchen Tafel der Bogen α von $23^\circ, 46', 37''$ gefunden werden, so findet man daselbst

den Bogen von $23^\circ = 0{,}40142573$
— — — $46' = 0{,}01338086$
— — — $47'' = 0{,}00017938$ angezeigt,

deren Summe $\alpha = 0{,}41498597$.

XVI. Nachdem die Bögen α zu einem jeden Winkel bekannt sind, so kann man nun auch die zugehörigen Sinus und Cosinus nach den oben angegebenen Formeln sehr leicht berechnen. Nämlich es ist, wenn der Radius, wie immer, $= 1$,

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.\ 2.} + \frac{\alpha^4}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{\alpha^6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \frac{\alpha^8}{2.\ 3.\ \ldots 7.\ 8} - \text{ꝛc.}$$

und

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.\ 3} + \frac{\alpha^5}{2.\ 3.\ 4.\ 5} - \frac{\alpha^7}{2.\ 3.\ \ldots 6.\ 7} + \frac{\alpha^9}{2.\ 3.\ \ldots 8.\ 9} - \text{ꝛc.}$$

Man sieht hier vor Augen, daß der Werth der Br. 89
Brüche α; $\frac{\alpha^2}{2}$; $\frac{\alpha^3}{2.3}$; $\frac{\alpha^4}{2.3.4}$; $\frac{\alpha^5}{2.3.4.5}$ ꝛc.
gesucht werden muß, und daß allemal ein vorhergehender Bruch ein Faktor des folgenden ist, dergestalt, daß man einen folgenden allemal aus dem vorhergehenden herleiten kann. Setzen wir nämlich den Werth des ersten, zweyten, dritten ꝛc. Bruchs nach der Ordnung $= A$; $= B$; C; D ꝛc.; so können die genannten Brüche α; $\frac{\alpha^2}{2}$; $\frac{\alpha^3}{2.3}$; $\frac{\alpha^4}{2.3.4}$ ꝛc. auf folgende Art ausgedrückt werden: α; $\frac{\alpha A}{2}$; $\frac{\alpha B}{3}$; $\frac{\alpha C}{4}$; $\frac{\alpha D}{5}$; $\frac{\alpha E}{6}$; u. s. f. und dann ist

$\cos \alpha = 1 - B + D - F + H - K + \text{ꝛc.}$
$\sin \alpha = A - C + E - G + I - L + \text{ꝛc.}$

oder:

$$\cos \alpha = \begin{cases} 1 + D + H + M \ldots \\ -(B + F + K + O + \ldots) \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \begin{cases} A + E + I + N \ldots \\ -(C + G + L + P \ldots) \end{cases}$$

Es sey nun

1) der Sinus und Cosinus von 1′ zu suchen, so ist, vermöge XV. der zugehörige Bogen $\alpha = 0{,}0002\,9089$ und zwar $A = \alpha = 0{,}00029089$

$B = \frac{\alpha A}{2} = 0{,}00000003$

$C = 0$, und alle folgenden Buchstaben $= 0$, daher

$\sin 0^\circ\ 1' = 0{,}00029089$ und
$\cos 0^\circ\ 1' = B = 0{,}99999997$.

2) Es sey der Sinus und Cosinus von 1° zu suchen, so ist $\alpha = 0{,}01745329 = A$;

$B = \frac{\alpha . A}{2} = 0{,}00015231$;

$C = \frac{\alpha}{3} B = 0{,}00000883$; $D = 0$;

Fig. 43. E; F = o ꝛc. Daher
sin 1° = A — C + b = 0,01745241 und
cos 1° = 1 — B + o = 0,99984769.

3) Auf dieselbe Art kann man auch sin und cos von 2; 3; 4; 5 ꝛc. Graden und Minuten berechnen, und wenn die Sinus und Cosinus von den ersten fünf Graden bekannt sind, so sucht man zuerst aus den Formeln

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{r} \text{ und}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha) \times (\cos\alpha - \sin\alpha)}{r}$$

oder:

$$\cos 2\alpha = \frac{r^2 - 2\sin^2\alpha}{r}$$

den Sinus und Cosinus von 10°; 20°, und dann aus den Formeln

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{r};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha}{r};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{r} \text{ und}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{r}$$

den Sinus und Cosinus von 15° und 25°, indem, wenn $\alpha = 20$ und $\beta = 5$ gesetzt wird, wir erhalten:
sin 25° = sin 20° × cos 5° + sin 5° × cos 20°;
sin 15° = sin 20° × cos 5° − sin 5°. cos 20°;
cos 25° = cos 20°. cos 5° − sin 20°. sin 5°;
cos 15 = cos 20°. cos 5 + sin 20°. sin 5°.

Der Sinus von 30° ist bekanntlich $= \frac{1}{2} = 0{,}5$, und der cos $30° = \sqrt{(1 - \sin^2 30)} = \sqrt{(1 - (\frac{1}{2})^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254$.

Der Sinus und Cosinus von 45° sind einander gleich. Da nun $r^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, so muß auch $1 = \sin^2 45 + \sin^2 45$, nämlich $2 \cdot \sin^2 45$

$= 1$ und $\sin 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071068$ Fig. 48.
$= \cos 45^\circ$ seyn.

Uebrigens wird man noch besondere Ausdrücke für viele Sinus und Cosinus, wenn weiter unten von regelmäßigen Vielecken die Rede seyn wird, kennen lernen.

Nachdem man die Sinus und Cosinus von 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40 Graden und auch die von den vordern einzelnen Graden und Minuten, nämlich sin und cos 1°; 2°; 3; 4 und 5° und von 1; 2; 3; 4 bis 60 Minuten bekannt sind, so kann man nun ferner auch die Sinus und Cosinus zu allen Graden und Minuten sehr leicht nach den oben aufgestellten Formeln berechnen. So z. B. erhalten wir, wenn $\alpha = 10$ und $\beta = 3$ gesetzt wird, $\sin(10 + 3)^\circ$; $\sin(10 - 3)^\circ$; $\cos 13^\circ$; $\cos 7^\circ$ und wenn $\alpha = 13$ und $\beta = 7^\prime$ gesetzt wird, $\sin 13^\circ 7^\prime$ und $\cos 13^\circ 7^\prime$; $\sin 12^\circ 53^\prime$ und $\cos 12^\circ 53^\prime$, u. s. f.

Weiter als von 0 bis 45° braucht man die Sinus und Cosinus nicht zu berechnen, weil $\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$ und $\cos \alpha = (90 - \alpha)$ ist, und wenn $\alpha = 64^\circ 17^\prime$ gesetzt wird, sodann

$\sin 64^\circ 17^\prime = \cos 25^\circ 43^\prime$ und
$\cos 64^\circ 17^\prime = \sin 25^\circ 43^\prime$ ist.

4) Hat man die berechneten Sinus und Cosinus von Grad zu Grad und von Minute zu Minute in eine Tafel zusammengetragen, so wird man bemerken, daß die Sinus von einer Minute zur andern steigen, dagegen aber die Cosinus fallen; daß die Differenzen von einem Sinus oder Cosinus zum andern und von diesem zum dritten nur wenig verschieden sind. So z. B. ist

$\sin 34^\circ 46^\prime = 0{,}5702357$
$\sin 34^\circ 47^\prime = 0{,}5704747$
$\sin 34^\circ 48^\prime = 0{,}5707136$

$\cos 34^\circ 46^\prime = 0{,}8214811$
$\cos 34^\circ 47^\prime = 0{,}8213152$
$\cos 34^\circ 48^\prime = 0{,}8211492$

Fig. 43. und die Differenz der Sinus = 2390 und 2389
— — — Cosinus = 1659 und 1660.

Da von einer Minute zur andern die Sinus oder Cosinus beinahe schon um gleichviel steigen oder fallen, so werden auch von einer Sekunde zur andern die Sinus und Cosinus um $\frac{1}{60}$ der bemerkten Differenz steigen oder fallen müssen. Diese Differenz von einer Sekunde zur andern beträgt daher (bey den jetzt angeführten Sinusen) 39, 82 und (bei den Cosinusen) 27, 66.

Begehrt man den Sinus von $34^{\circ}47'25''$, so muß man

zum Sinus $34^{\circ}47' = 0{,}5704747$ noch
$25 \times 39{,}82 = \ldots 995$ addiren

um sin $34^{\circ}47'25'' = 0{,}5705742$
zu erhalten, und begehrt man den Cosinus von $34°47'25''$, so muß man vom cos
$34^{\circ}47'0'' = 0{,}8213152$ noch
$25 \times 27{,}66 = 691$ subtrahiren, um cos
$34^{\circ}47'25'' = 0{,}8212461$ zu erhalten.

XVII. Was die Tangenten und Cotangenten betrifft, so können sie nun leicht aus den berechneten Sinus und Cosinus gefunden werden, weil $\text{tang } \alpha = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}$ und $\cot \alpha = \frac{r \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ist. Daß $\text{tang } 45^{\circ} = \cot 45^{\circ} = r = 1$ und daß auch $\text{tang } \alpha = \cot (90 - \alpha)$ und $\cot \alpha = \text{tang } (90 - \alpha)$ ist, und daß wir daher die Tangenten und Cotangenten auch nicht weiter als bis 45° zu berechnen haben, braucht wohl nicht erinnert zu werden.

Fig. 96. XVIII. Kennt man zum Radius $AC = 1$ (Fig. 96.) die Sinus FB; Cosinus FM, Tangenten GC und Cotangenten NH zu irgend einem vorgelegten Winkel $LAE = \alpha$, so kann man nun auch die Sinus ID; Tangenten EK; Cosinus IP und Cotangenten QL, deren Radius $AE = r$ ist, von demselben $\angle LAE = \alpha$ augenblicklich wissen, weil wir weiter nichts zu thun haben, als FB; GC; MF und NH mit r zu multipliziren, um ID; KE; PI und QL zu erhalten.

Setzt man daher FB = sin α; GC = tang α; Fig. 96.
FM = cos α und NH = cot α, so ist

AF : FB = AI : ID, nämlich
1 : sin α = r : ID, und
ID = r sin α.

Ferner: AC : CG = AE : EK oder
1 : tang α = r : EK, woher
EK = r. tang α.

und so finden wir ferner aus

AF : FM = AI : IP und
AN : NH = AQ : QL den Werth für
IP = r. cos α und
QL = r. cot α.

XIX. Die Sinus und Tangenten, deren Radius = 1 ist, pflegt man die natürlichen zu nennen, und es sind alle Sinus und Cosinus, die Tangenten unter 45° und Cotangenten über 45° kleiner als 1 oder höchstens = 1, die Tangenten aber über 45° und Cotangenten unter 45° größer als 1. Man hat zwar mehr gedruckte Tafeln, worin die natürlichen Sinus und Tangenten von Minute zu Minute eingetragen sind, indessen findet man sie nicht in allen Hilfsbüchern der Mathematik, sondern man findet gewöhnlich nur Tafeln, worin die gemeinen Logarithmen von den verschiedenen Sinus DI = r. sin α; Cosinus PI = r. cos α; Tangente EK = r. tang α und Cotangenten QL = r. cot α eingetragen sind. Log. r ist ein für allemal = 10 gesetzt worden und hiernach ist

Log. DI = Log. (r sin α) = Log. r + Log. sin α
= 10 + Log. sin α.
Log. IP = Log. r + Log. cos α = 10 + Log cos α,
Log. EK = 10 + Log. tang α und
Log. QL = 10 + Log. cot α.

Sucht man daher zu den berechneten Sinusen und Tangenten die zugehörigen gemeinen Logarithmen auf und addirt man hierzu 10, so erhält man die Logarithmen für die Sinuse und Tangenten, welche in den gewöhnlichen Sinus- und Tangententafeln angetroffen werden.

Fig. 96. Umgekehrt kann man auch aus Log. sin α und Log. tang α der genannten Tafel wieder den zugehörigen natürlichen sin α und tang α finden, wenn man von jenen Logarithmen die Zahl 10 subtrahirt und zum Reste der Logarithmen die zugehörige Zahl nachschlägt, weil $\frac{FB}{1} = \frac{DI}{r}$ und $CG = \frac{EK}{r}$ und demnach Log. FB = Log. DI — 10 und Log. CG = Log. EK — 10 ist.

XX. Anmerk. Obgleich bei manchen Formeln von Nr. 79 bis 82 des vorigen Paragraphen der Radius = 1 gesetzt worden ist, so können wir doch daselbst den Radius r sehr leicht einschalten, wenn wir überlegen, daß nur Glieder, welche combinatorische Verbindungen von einerley Grad sind, neben einander stehen können; daß durch Division der Verbindungsgrad zum Theil aufgehoben wird, daß links und rechts einer Gleichung der Verbindungsgrad gleich seyn muß und daß man nöthigen Falls durch angeführte r den Verbindungsgrad erhöhen und herabsetzen kann. Es verwandelt sich daher

Nr. 79. in $\sin 4\alpha = \frac{(8\cos^3\alpha - 4.\, r^2 \cos\alpha).\sin\alpha}{r^3}$;

Nr. 80. in $r^3.\cos 4\alpha = 8.\cos^4\alpha - 8.\, r^2\cos^2\alpha + r^4$;

Nr. 81. in $\text{tang}\, 4\alpha = \frac{4.\, r^4 \,\text{tang}\,\alpha - 4\, r^2\,\text{tang}^3\,\alpha}{r^4 - 6\, r^2\,\text{tang}^2\,\alpha + \text{tang}^4\,\alpha}$;

Nr. 82. in $\cot 4\alpha \times (4\, r^2\,\text{tang}\,\alpha - 4\,\text{tang}^3\,\alpha) = r^4 - 6\, r^2\,\text{tang}^2\,\alpha + \text{tang}^4\,\alpha$.

§. 40.

Anwendung der Sinus und Tangenten auf Drey- und Vierecke.

Fig. 97. I. Aufgabe. Es läuft eine ziemlich gerade Linie AB Fig. 97. bergan oder bergab, man soll die zugehörigen Horizontale AC suchen, die bis zu der

aus B gefällten Vertikalen BC geht; oder man soll Fig. 97.
auch diese Vertikale selbst berechnen.

Auflösung. Man stelle in B den Meßtisch oder Theodoliten mit dem Visirinstrumente FGHI, und in A einen Stab AD von der Höhe BE auf; richte das Fernrohr FG auf D, bemerke am Gradbogen GHIF den Abdachungswinkel IEH = *L* BAC = α, und messe die Schiefe AB = a Ruthen, so findet man AC und BC aus folgenden Formeln:

$AC = \frac{a \cdot \cos \alpha}{r}$ und $BC = \frac{a \cdot \sin \alpha}{r}$, wo, wenn

$r = 1$, $AC = a \cdot \cos \alpha$ und $BC = a \times \sin \alpha$.

Beweis. Da BE ∥ und = AD, so ist auch DE ∥ und = AB und *L* GEH = *L* ABC. Weil nun GEI ein rechter Winkel und ACB ein rechtwinkliges Dreyeck ist, so wird man durch Subtraktion des Winkels GEH von 90° den Winkel HEI und durch Subtraktion des Winkels ABC (= *L* GEH) von 90° den Winkel BAC = α erhalten, weshalb auch *L* HEI = *L* BAC.

Man ziehe mit dem Radius AR = AW = r den Bogen RW zum *L* BAC und fälle die Senkrechte RV, so ist RV = sin α und AV = cos α und es gelten in den ähnlichen Dreyecken RAV und BAC die Proportionen:

RA : AV = BA : AC oder
r : cos α = a : AC und
AR : RV = BB : BC oder
r : sin α = a : BC, woher

$AC = \frac{a \cdot \cos \alpha}{r}$ und

$BC = \frac{a \cdot \sin \alpha}{r}$.

Uebrigens ist es einerley, ob man aus E nach D, oder aus D nach E visirt, weil *L* ADE = *L* BEF ist und demnach der Bogen HI immer derselbe bleibt.

Erste Anmerkung. Beym Messen der Wälder kommen sehr viele schiefe Linien AB vor, zu welchen

Fig. 97. die zugehörigen Horizontalen AC gesucht werden, und da dergleichen Verwandlungen der Schiefen in Horizontale geschwind von Statten gehen müssen und man bey Waldmessungen schon zufrieden ist, wenn die Länge der Linien nur so weit zutreffen, daß bey 100 Ruthen kaum 1 Fuß oder bey 1000 Ruthen kaum eine Ruthe gefehlt ist, so haben wir hinten eine kurze Cosinustafel zum Gebrauche der geschwinden Verwandlung der schiefen Linien in horizontale angehängt.

Der Gebrauch dieser Tafel ist folgender. Es sey die Schiefe AB = 43,54 Ruthen und der Bogen HI oder ∠ BAC = α = 19°37′, so findet man zu diesem Winkel in der Tafel den Cosinus = 0,942 angezeigt, womit man 43,54 zu multipliciren hat, um AC = 43,54 × 0,942 = 41,02 Ruthen zu erhalten.

Zweyte Anmerkung. Wenn der Abdachungswinkel BAC durch den Gradbogen GIF nicht gemessen wird, so bleibt uns, um AC zu finden, kein andrer Weg übrig, als die Kette oder Meßruthe in BK horizontal zu halten, aus K eine Vertikale KL zu fällen, wieder aus L einen horizontalen Kettenschlag LM zu machen und aus M die Vertikale MN zu fällen und aus N diese Arbeit so lange fortzusetzen, bis man in A angelangt ist. AC oder GA ist = der Summe der einzelnen horizontalen Kettenschläge oder Stücke BK + LM + NO + PQ + RS + TU.

Mißt man auf dieselbe Art von A nach B, welches aber etwas beschwerlicher ist, so muß man in A die Kette UT heben, so daß U vertikal über A steht und zugleich UT horizontal liegt, sodann wird in T die Kette SR gehoben und so fort.

Daß alle Kettenschläge in der vertikalen Ebene ADEB liegen, und sich die Kettenzieher beständig fort darin einrichten müssen, versteht sich von selbst.

Wenn AB sehr steil läuft, so kann die Meßkette nicht nach ihrer ganzen Länge horizontal gehalten werden, man spannt daher zuerst nur einen Theil

BK derselben horizontal, fällt aus dem Ringe in K die Vertikale KL, läßt die Kette in B los und hält sodann den Ring K in L an, um auch den übrigen Theil LM der Kette horizontal auszuspannen und die Vertikale MN zu fällen. BK + LM wird jetzt als ein Kettenschlag angesehen und statt der Schiefen BN wird ein horizontaler Kettenschlag angenommen. Fig. 97.

Ob eine Latte oder Kette horizontal liegt, entdeckt man am sichersten durch eine mitten darauf gesetzte Libelle oder Setzwaage, welche auf einem Lineale befestiget ist. Auch kann man hierzu einen eingehängten halben Gradbogen gebrauchen, aus dessen Mittelpunkte ein Senkbley frey herunterhängt und den Bogen halbirt. Uebrigens kömmt es hier auf eine strenge Genauheit nicht an.

Wird die Kette frey gehalten, so bleibt sie bey aller Anstrengung nicht gerad, sondern beugt sich in der Mitte etwas in die Tiefe. Zieht man sie, indem sie in der Mitte tiefer liegt, schnell an, so bewegt sich ihre Mitte in die Höhe, fällt aber sogleich wieder in die Tiefe und in dem Augenblicke, wenn sie in die Höhe geht, bemerkt man, um wie viel der Kettenstab, womit man die Kette anzog, sich weiter fortbewegte, und um eben so viel setzt man nachher das Zähleisen (§. 5.) weiter vor. Diese Arbeit nennt man die **Anwendung des Kettenschwunges**.

Dritte Anmerkung. Wird zu einer krummen Linie AEGCILB Fig. 8. die zugehörige Horizontale NO gesucht, so macht man wie vorher horizontale Kettenschläge AD; EF; GH; HI; KL und MB und addirt sie. Auch hier liegen alle diese Kettenschläge zu NO parallel und die Vertikalen DE; FG ꝛc. stehen darauf senkrecht. Fig. 8.

Auch dann, wenn Fig. 98. zur schief liegenden krummen Linie ABCDE die zugehörige Horizontale AL gefunden werden soll, pflegt man zuerst die schief liegende gerade Linie AE dadurch zu entdecken, daß man die Kettenschläge AG; GC; HD; DK in der Linie AE oder parallel zu derselben macht, Fig. 98.

Fig. 98. die Kettenstäbe AF; BG; CH; DI; EK senkrecht zu AE hält, AE = AG + GC + HD + DK setzt, wo man sodann aus der gefundenen geraden Schiefen AE und aus dem beobachteten Abdachungs-Winkel PQN = ∠ EAL = α° die gehörige horizontale AL und Vertikale LE auf dieselbe Art wie oben berechnen kann. Nämlich es ist AL = AE × $\frac{\cos \alpha}{r}$ und LE = AE × $\frac{\sin \alpha}{r}$. Uebrigens leuchtet aus der Figur von selbst hervor, daß die Axe O des Fernrohrs in der Höhe AO über der Erde aufgestellt, in E ein Stab EM von der Höhe AO gesetzt, mit dem Fernrohre OP nach M visirt worden ist, wodurch man den ∠ PON = α, den die Schiefe OP gegen die Horizontale ON macht, erhalten hat.

Vierte Anmerkung. Um die Kettenschläge AG; GC; HD ꝛc. parallel zu einander zu machen, pflegt man in die Mitte der Kette einen Gradbogen mit einem Senkbleye zu hängen, und jedesmal die Kette so schief zu halten, daß das Senkbley von der Mitte des Gradbogens um den beobachteten Abdachungswinkel, der = α° gefunden worden ist, abweicht. Da aber das Senkbley beym Winde nicht ruhig bleibt, und die Kette durchs Gewicht des Gradbogens in der Mitte noch mehr in die Tiefe gezogen wird, so verbindet man besser eine Libelle und einen Gradbogen mit den Kettenstäben selbst, wo man den Gradbogen gegen die Libelle auf α Grade richtet, und wodurch man sogleich wissen kann, ob die Kettenschläge AG; GC; HD ꝛc. parallel zu QM oder AE laufen oder nicht, weil der Gradbogen die Abweichung der Schiefen gegen die Horizontale anzeigt und bekannt ist, daß HD gegen ON um eben so viele Grade abweicht, als AG oder AE gegen ON oder AL.

II. Bey allen unsern geometrischen Arbeiten ist uns daran gelegen, zu zwey Orten A und E die zugehörige horizontale Entfernung AL (welche wir auch schlechtweg die Entfernung dieser Orte nennen) zu

finden. Ist nun diese Entfernung AL der beyden Orte A und E bekannt, und hat man durch Winkelinstrumente gefunden, um wie viel Grade der Punkt E höher als der Punkt A, oder um wie viel Grade der Punkt A tiefer als der Punkt E in der vertikalen Fläche AO ML liegt, so entsteht die Frage, wie man aus der bekannten horizontalen Entfernung AL der genannten zwey Orte A und E, und aus dem beobachteten Abdachungswinkel PON = α° (welcher = dem Winkel EAL ist), sowohl den Höhen-Unterschied LE der beyden Orte A und E, als auch die schiefe Entfernung AE derselben berechnen könne? Fig. 98.

Man denke sich zum Bogen NP = α eine Tangente NQ = tang α gezogen, und setze den Radius ON = r, so wird, weil ON # zu AL und OP # AE ist, $\triangle$ ONQ $\sim$ $\triangle$ ALE und OQ = sec α seyn, woher folgende Proportionen gelten.

1) ON : NQ = AL : LE oder r : tang α = AL : LE und worin LE = AL $\times \frac{\text{tang } \alpha}{r}$.

2) ON : OQ = AL : AE oder r : sec α = AL : AE, wo AE = AL $\times \frac{\sec \alpha}{r}$.

Da aber r : sec α = cos α : r nämlich $\frac{\sec \alpha}{r} = \frac{r}{\cos \alpha}$ ist, so wird auch AE = AL $\times \frac{r}{\cos \alpha}$ seyn.

Es wird demnach, wenn r = 1 gesetzt wird, der Höhenunterschied LE der beyden Orte A und E gefunden, wenn man ihre horizontale Entfernung AL mit dem Tangenten des Abdachungswinkels PON = α multiplicirt, und die schiefe Entfernung AE der genannten Orte A und E wird gefunden, wenn man ihre horizontale Entfernung AL durch den Cosinus des Abdachungswinkel α dividirt.

Anmerkung. Wenn die Entfernung AL sehr groß ist, so kömmt hierbey auch das Gewölbe unserer

Fig. 43. E; $F = o$ ꝛc. Daher

$\sin 1° = A - C + b = 0{,}01745241$ und

$\cos 1° = 1 - B + o = 0{,}99984769$.

3) Auf dieselbe Art kann man auch sin und cos von 2; 3; 4; 5 ꝛc. Graden und Minuten berechnen, und wenn die Sinus und Cosinus von den ersten fünf Graden bekannt sind, so sucht man zuerst aus den Formeln

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{r} \text{ und}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha) \times (\cos \alpha - \sin \alpha)}{r}$$

oder:

$$\cos 2\alpha = \frac{r^2 - 2 \sin^2 \alpha}{r}$$

den Sinus und Cosinus von 10°; 20°, und dann aus den Formeln

$$\sin (\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{r};$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha}{r};$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}{r} \text{ und}$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{r}$$

den Sinus und Cosinus von 15° und 25°, indem, wenn $\alpha = 20$ und $\beta = 5$ gesetzt wird, wir erhalten:

$\sin 25° = \sin 20° \times \cos 5° + \sin 5° \times \cos 20°$;

$\sin 15° = \sin 20° \times \cos 5° - \sin 5° \cdot \cos 20°$;

$\cos 25° = \cos 20° \cdot \cos 5° - \sin 20° \cdot \sin 5°$;

$\cos 15 = \cos 20° \cdot \cos 5 + \sin 20° \cdot \sin 5°$.

Der Sinus von 30° ist bekanntlich $= \frac{1}{2} = 0{,}5$, und der $\cos 30° = \sqrt{(1 - \sin^2 30)} = \sqrt{(1 - (\frac{1}{2})^2)} = \sqrt{\cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660254$.

Der Sinus und Cosinus von 45° sind einander gleich. Da nun $r^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, so muß auch $1 = \sin^2 45 + \sin^2 45$, nämlich $2 \cdot \sin^2 45$

$= 1$ und $\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071068$ Fig. 48.

$= \cos 45°$ seyn.

Uebrigens wird man noch besondere Ausdrücke für viele Sinus und Cosinus, wenn weiter unten von regelmäßigen Vielecken die Rede seyn wird, kennen lernen.

Nachdem man die Sinus und Cosinus von 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40 Graden und auch die von den vordern einzelnen Graden und Minuten, nämlich sin und cos 1°; 2°; 3; 4 und 5° und von 1; 2; 3; 4 bis 60 Minuten bekannt sind, so kann man nun ferner auch die Sinus und Cosinus zu allen Graden und Minuten sehr leicht nach den oben aufgestellten Formeln berechnen. So z. B. erhalten wir, wenn $\alpha = 10$ und $\beta = 3$ gesetzt wird, $\sin(10 + 3)°$; $\sin(10 - 3)°$; $\cos 13°$; $\cos 7°$ und wenn $\alpha = 13$ und $\beta = 7^x$ gesetzt wird, $\sin 13°7^x$ und $\cos 13° 7^x$; $\sin 12° 53^x$ und $\cos 12° 53^x$, u. s. f.

Weiter als von 0 bis 45° braucht man die Sinus und Cosinus nicht zu berechnen, weil $\sin \alpha = \cos(90 - \alpha)$ und $\cos \alpha = (90 - \alpha)$ ist, und wenn $\alpha = 64° 17^x$ gesetzt wird, sodann

$\sin 64° 17^x = \cos 25° 43^x$ und

$\cos 64° 17^x = \sin 25° 43^x$ ist.

4) Hat man die berechneten Sinus und Cosinus von Grad zu Grad und von Minute zu Minute in eine Tafel zusammengetragen, so wird man bemerken, daß die Sinus von einer Minute zur andern steigen, dagegen aber die Cosinus fallen; daß die Differenzen von einem Sinus oder Cosinus zum andern und von diesem zum dritten nur wenig verschieden sind. So z. B. ist

$\sin 34° 46^x = 0{,}5702357$
$\sin 34° 47^x = 0{,}5704747$
$\sin 34° 48^x = 0{,}5707136$

$\cos 34° 46^x = 0{,}8214811$
$\cos 34° 47^x = 0{,}8213152$
$\cos 34° 48^x = 0{,}8211492$

Fig. 43. und die Differenz der Sinus = 2390 und 2389
— — — Cosinus = 1659 und 1660.

Da von einer Minute zur andern die Sinus oder Cosinus beinahe schon um gleichviel steigen oder fallen, so werden auch von einer Sekunde zur andern die Sinus und Cosinus um $\frac{1}{60}$ der bemerkten Differenz steigen oder fallen müssen. Diese Differenz von einer Sekunde zur andern beträgt daher (bey den jetzt angeführten Sinusen) 39, 82 und (bei den Cosinusen) 27, 66.

Begehrt man den Sinus von $34^{g}47^{z}25^{zz}$, so muß man
zum Sinus $34^{g}47^{z}$ = 0,5704747 noch
$25 \times 39{,}82$ = . . 995 addiren
um sin $34^{g}47^{z}25^{zz}$ = 0,5705742
zu erhalten, und begehrt man den Cosinus von
$34°47'25''$, so muß man vom cos
$34^{g}47'0''$ = 0,8213152 noch
$25 \times 27{,}66$ = 691 subtrahiren, um cos
$34^{g}47'25''$ = 0,8212461 zu erhalten.

XVII. Was die Tangenten und Cotangenten betrifft, so können sie nun leicht aus den berechneten Sinus und Cosinus gefunden werden, weil tang $\alpha = \frac{r.\ \sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}$ und cot $\alpha = \frac{r.\ \cos\ \alpha}{\sin\ \alpha}$ ist. Daß tang $45° = \cot 45° = r = 1$ und daß auch tang $\alpha = \cot (90 - \alpha)$ und cot $\alpha =$ tang $(90 - \alpha)$ ist, und daß wir daher die Tangenten und Cotangenten auch nicht weiter als bis 45° zu berechnen haben, braucht wohl nicht erinnert zu werden.

XVIII. Kennt man zum Radius AC = 1 (Fig.
Fig. 96. 96.) die Sinus FB; Cosinus FM, Tangenten GC und Cotangenten NH zu irgend einem vorgelegten Winkel LAE = α, so kann man nun auch die Sinus ID; Tangenten EK; Cosinus IP und Cotangenten QL, deren Radius AE = r ist, von demselben $\angle$ LAE = α augenblicklich wissen, weil wir weiter nichts zu thun haben, als FB; GC; MF und NH mit r zu multipliciren, um ID; KE; PI und QL zu erhalten.

Setzt man daher FB = sin α; GQ = tang α; Fig. 96.
FM = cos α und NH = cot α, so ist

AF : FB = AI : ID, nämlich
1 : sin α = r : ID und
ID = r sin α.

Ferner: AC : CG = AE : EK oder
1 : tang α = r : EK, woher
EK = r. tang α.

und so finden wir ferner aus
AF : FM = AI : IP und
AN : NH = AQ : QL den Werth für
IP = r. cos α und
QL = r. cot α.

XIX. Die Sinus und Tangenten, deren Radius = 1 ist, pflegt man die natürlichen zu nennen, und es sind alle Sinus und Cosinus, die Tangenten unter 45° und Cotangenten über 45° kleiner als 1 oder höchstens = 1, die Tangenten aber über 45° und Cotangenten unter 45° größer als 1. Man hat zwar mehr gedruckte Tafeln, worin die natürlichen Sinus und Tangenten von Minute zu Minute eingetragen sind, indessen findet man sie nicht in allen Hilfsbüchern der Mathematik, sondern man findet gewöhnlich nur Tafeln, worin die gemeinen Logarithmen von den verschiedenen Sinus DI = r. sin α; Cosinus PI = r. cos α; Tangente EK = r. tang α und Cotangenten QL = r. cot α eingetragen sind. Log. r ist ein für allemal = 10 gesetzt worden und hiernach ist

Log. DI = Log. (r sin α) = Log. r + Log. sin α
= 10 + Log. sin α.
Log. IP = Log. r + Log. cos α = 10 + Log cos α.
Log. EK = 10 + Log. tang α und
Log. QL = 10 + Log. cot α.

Sucht man daher zu den berechneten Sinusen und Tangenten die zugehörigen gemeinen Logarithmen auf und addirt man hierzu 10, so erhält man die Logarithmen für die Sinuse und Tangenten, welche in den gewöhnlichen Sinus- und Tangententafeln angetroffen werden.

Fig. 96. Umgekehrt kann man auch aus Log. sin α und Log. tang α der genannten Tafel wieder den zugehörigen natürlichen sin α und tang α finden, wenn man von jenen Logarithmen die Zahl 10 subtrahirt und zum Reste der Logarithmen die zugehörige Zahl nachschlägt, weil $\frac{FB}{1} = \frac{DI}{r}$ und $CG = \frac{EK}{r}$ und demnach Log. FB = Log. DI — 10 und Log. CG = Log. EK — 10 ist.

XX. Anmerk. Obgleich bei manchen Formeln von Nr. 79 bis 82 des vorigen Paragraphen der Radius = 1 gesetzt worden ist, so können wir doch daselbst den Radius r sehr leicht einschalten, wenn wir überlegen, daß nur Glieder, welche combinatorische Verbindungen von einerley Grad sind, neben einander stehen können; daß durch Division der Verbindungsgrad zum Theil aufgehoben wird, daß links und rechts einer Gleichung der Verbindungsgrad gleich seyn muß und daß man nöthigen Falls durch angeführte r den Verbindungsgrad erhöhen und herabsetzen kann. Es verwandelt sich daher

Nr. 79. in $\sin 4\alpha = \frac{(8\cos^3\alpha - 4.\, r^2 \cos\alpha).\, \sin\alpha}{r^3}$;

Nr. 80. in $r^3.\, \cos 4\alpha = 8.\, \cos^4\alpha - 8.\, r^2 \cos^2\alpha + r^4$;

Nr. 81. in $\text{tang}\, 4\alpha = \frac{4.\, r^4 \text{tang}\,\alpha - 4\, r^2\, \text{tang}^3\,\alpha}{r^4 - 6\, r^2\, \text{tang}^2\,\alpha + \text{tang}^4\,\alpha}$;

Nr. 82. in $\cot 4\alpha \times (4\, r^2\, \text{tang}\,\alpha - 4\, \text{tang}^3\,\alpha) = r^4 - 6\, r^2\, \text{tang}^2\,\alpha + \text{tang}^4\,\alpha$.

§. 40.

Anwendung der Sinus und Tangenten auf Drey- und Vierecke.

Fig. 97. I. Aufgabe. Es läuft eine ziemlich gerade Linie AB Fig. 97. bergan oder bergab, man soll die zugehörigen Horizontale AC suchen, die bis zu der

aus B gefällten Vertikalen BC geht; oder man soll Fig. 97.
auch diese Vertikale selbst berechnen.

Auflösung. Man stelle in B den Meßtisch oder Theodoliten mit dem Visirinstrumente FGHI, und in A einen Stab AD von der Höhe BE auf; richte das Fernrohr FG auf D, bemerke am Gradbogen GHIF den Abdachungswinkel IEH = *L* BAC = α, und messe die Schiefe AB = a Ruthen, so findet man AC und BC aus folgenden Formeln:

$AC = \frac{a \cdot \cos \alpha}{r}$ und $BC = \frac{a \cdot \sin \alpha}{r}$, wo, wenn

$r = 1$, $AC = a \cos \alpha$ und $BC = a \times \sin \alpha$.

Beweis. Da BE ∥ und = AD, so ist auch DE ∥ und = AB und *L* GEH = *L* ABC. Weil nun GEI ein rechten Winkel und ACB ein rechtwinkliges Dreyeck ist, so wird man durch Subtraktion des Winkels GEH von 90° den Winkel HEI und durch Subtraktion des Winkels ABC (= *L* GEH) von 90° den Winkel BAC = α erhalten, weshalb auch *L* HEI = *L* BAC.

Man ziehe mit dem Radius AR = AW = r den Bogen RW zum *L* BAC und fälle die Senkrechte RV, so ist RV = sin α und AV = cos α und es gelten in den ähnlichen Dreyecken RAV und BAC die Proportionen:

RA : AV = BA : AC oder
r : cos α = a : AC und
AR : RV = BB : BC oder
r : sin α = a : BC, woher

$AC = \frac{a \cdot \cos \alpha}{r}$ und

$BC = \frac{a \cdot \sin \alpha}{r}$.

Uebrigens ist es einerley, ob man aus E nach D, oder aus D nach E visirt, weil *L* ADE = *L* BEF ist und demnach der Bogen HI immer derselbe bleibt.

Erste Anmerkung. Beym Messen der Wälder kommen sehr viele schiefe Linien AB vor, zu welchen

Fig. 97. die zugehörigen Horizontalen AC gesucht werden, und da dergleichen Verwandlungen der Schiefen in Horizontale geschwind von Statten gehen müssen und man bey Waldmessungen schon zufrieden ist, wenn die Länge der Linien nur so weit zutreffen, daß bey 100 Ruthen kaum 1 Fuß oder bey 1000 Ruthen kaum eine Ruthe gefehlt ist, so haben wir hinten eine kurze Cosinustafel zum Gebrauche der geschwinden Verwandlung der schiefen Linien in horizontale angehängt.

Der Gebrauch dieser Tafel ist folgender. Es sey die Schiefe AB = 43.54 Ruthen und der Bogen HI oder ∠ BAC = α = 19°37′, so findet man zu diesem Winkel in der Tafel den Cosinus = 0,942 angezeigt, womit man 43.54 zu multipliciren hat, um AC = 43.54 × 0,942 = 41,02 Ruthen zu erhalten.

Zweyte Anmerkung. Wenn der Abdachungswinkel BAC durch den Grabbogen GIF nicht gemessen wird, so bleibt uns, um AC zu finden, kein andrer Weg übrig, als die Kette oder Meßruthe in BK horizontal zu halten, aus K eine Vertikale KL zu fällen, wieder aus L einen horizontalen Kettenschlag LM zu machen und aus M die Vertikale MN zu fällen und aus N diese Arbeit so lange fortzusetzen, bis man in A angelangt ist. AC oder GA ist = der Summe der einzelnen horizontalen Kettenschläge oder Stücke BK + LM + NO + PQ + RS + TU.

Mißt man auf dieselbe Art von A nach B, welches aber etwas beschwerlicher ist, so muß man in A die Kette UT heben, so daß U vertikal über A steht und zugleich UT horizontal liegt, sodann wird in T die Kette SR gehoben und so fort.

Daß alle Kettenschläge in der vertikalen Ebene ADEB liegen, und sich die Kettenzieher beständig fort darin einrichten müssen, versteht sich von selbst.

Wenn AB sehr steil läuft, so kann die Meßkette nicht nach ihrer ganzen Länge horizontal gehalten werden, man spannt daher zuerst nur einen Theil

BK derselben horizontal, fällt aus dem Ringe in K Fig. 97.
die Vertikale KL, läßt die Kette in B los und hält sodann den Ring K in L an, um auch den übrigen Theil LM der Kette horizotal auszuspannen und die Vertikale MN zu fällen. BK + LM wird jetzt als ein Kettenschlag angesehen und statt der Schiefen BN wird ein horizontaler Kettenschlag angenommen.

Ob eine Latte oder Kette horizontal liegt, entdeckt man am sichersten durch eine mitten darauf gesetzte Libelle oder Setzwaage, welche auf einem Lineale befestiget ist. Auch kann man hierzu einen eingehängten halben Gradbogen gebrauchen, aus dessen Mittelpunkte ein Senkbley frey herunterhängt und den Bogen halbirt. Uebrigens kömmt es hier auf eine strenge Genauheit nicht an.

Wird die Kette frey gehalten, so bleibt sie bey aller Anstrengung nicht gerad, sondern beugt sich in der Mitte etwas in die Tiefe. Zieht man sie, indem sie in der Mitte tiefer liegt, schnell an, so bewegt sich ihre Mitte in die Höhe, fällt aber sogleich wieder in die Tiefe und in dem Augenblicke, wenn sie in die Höhe geht, bemerkt man, um wie viel der Kettenstab, womit man die Kette anzog, sich weiter fortbewegte, und um eben so viel setzt man nachher das Zähleisen (§. 5.) weiter vor. Diese Arbeit nennt man die Anwendung des Kettenschwunges.

Dritte Anmerkung. Wird zu einer krummen Linie AEGCILB Fig. 8. die zugehörige Horizontale NO Fig. 8.
gesucht, so macht man wie vorher horizontale Kettenschläge AD; EF; GH; HI; KL und MB und addirt sie. Auch hier liegen alle diese Kettenschläge zu NO parallel und die Vertikalen DE; FG ꝛc. stehen darauf senkrecht.

Auch dann, wenn Fig. 98. zur schief liegenden Fig. 98.
krummen Linie ABCDE die zugehörige Horizontale AL gefunden werden soll, pflegt man zuerst die schief liegende gerade Linie AE dadurch zu entdecken, daß man die Kettenschläge AG; GC; HD; DK in der Linie AE oder parallel zu derselben macht,

Fig. 98. die Kettenstäbe AF; BG; CH; DI; EK senkrecht zu AE hält, AE = AG + GC + HD + DK setzt, wo man sodann aus der gefundenen geraden Schiefen AE und aus dem beobachteten Abdachungs-Winkel PQN = $\angle$ EAL = α° die gehörige horizontale AL und Vertikale LE auf dieselbe Art wie oben berechnen kann. Nämlich es ist AL = $AE \times \frac{\cos \alpha}{r}$ und $LE = AE \times \frac{\sin \alpha}{r}$. Uebrigens leuchtet aus der Figur von selbst hervor, daß die Axe O des Fernrohrs in der Höhe AO über der Erde aufgestellt, in E ein Stab EM von der Höhe AO gesetzt, mit dem Fernrohre OP nach M visirt worden ist, wodurch man den $\angle$ PON = α, den die Schiefe OP gegen die Horizontale ON macht, erhalten hat.

Vierte Anmerkung. Um die Kettenschläge AG; GC; HD ꝛc. parallel zu einander zu machen, pflegt man in die Mitte der Kette einen Gradbogen mit einem Senkbleye zu hängen, und jedesmal die Kette so schief zu halten, daß das Senkbley von der Mitte des Gradbogens um den beobachteten Abdachungswinkel, der = α° gefunden worden ist, abweicht. Da aber das Senkbley beym Winde nicht ruhig bleibt, und die Kette durchs Gewicht des Gradbogens in der Mitte noch mehr in die Tiefe gezogen wird, so verbindet man besser eine Libelle und einen Gradbogen mit den Kettenstäben selbst, wo man den Gradbogen gegen die Libelle auf α Grade richtet, und wodurch man sogleich wissen kann, ob die Kettenschläge AG; GC; HD ꝛc. parallel zu QM oder AE laufen oder nicht, weil der Gradbogen die Abweichung der Schiefen gegen die Horizontale anzeigt und bekannt ist, daß HD gegen ON um eben so viele Grade abweicht, als AG oder AE gegen ON oder AL.

II. Bey allen unsern geometrischen Arbeiten ist uns daran gelegen, zu zwey Orten A und E die zugehörige horizontale Entfernung AL (welche wir auch schlechtweg die Entfernung dieser Orte nennen) zu

finden. Ist nun diese Entfernung AL der beyden Orte A und E bekannt, und hat man durch Winkelinstrumente gefunden, um wie viel Grade der Punkt E höher als der Punkt A, oder um wie viel Grade der Punkt A tiefer als der Punkt E in der vertikalen Fläche AO ML liegt, so entsteht die Frage, wie man aus der bekannten horizontalen Entfernung AL der genannten zwey Orte A und E, und aus dem beobachteten Abdachungswinkel PON $= \alpha^{\circ}$ (welcher = dem Winkel EAL ist), sowohl den Höhen-Unterschied LE der beyden Orte A und E, als auch die schiefe Entfernung AE derselben berechnen könne? Fig. 98.

Man denke sich zum Bogen NP $= \alpha$ eine Tangente NQ $=$ tang α gezogen, und setze den Radius ON $= r$, so wird, weil ON $\#$ zu AL und OP $\#$ AE ist, Δ ONQ $\sim \Delta$ ALE und OQ $=$ sec α seyn, woher folgende Proportionen gelten.

1) ON : NQ $=$ AL : LE oder r : tang α $=$ AL : LE und worin LE $=$ AL $\times \frac{\text{tang } \alpha}{r}$.

2) ON : OQ $=$ AL : AE oder r : sec α $=$ AL : AE, wo AE $=$ AL $\times \frac{\sec \alpha}{r}$.

Da aber r : sec α $=$ cos α : r nämlich $\frac{\sec \alpha}{r} = \frac{r}{\cos \alpha}$ ist, so wird auch AE $=$ AL $\times \frac{r}{\cos \alpha}$ seyn.

Es wird demnach, wenn $r = 1$ gesetzt wird, der Höhenunterschied LE der beyden Orte A und E gefunden, wenn man ihre horizontale Entfernung AL mit dem Tangenten des Abdachungswinkels PON $= \alpha$ multiplicirt, und die schiefe Entfernung AE der genannten Orte A und E wird gefunden, wenn man ihre horizontale Entfernung AL durch den Cosinus des Abdachungswinkel α dividirt.

Anmerkung. Wenn die Entfernung AL sehr groß ist, so kömmt hierbey auch das Gewölbe unserer

Erdoberfläche in Betracht, worauf wir zu seiner Zeit zurückkommen werden.

III. Lehrsatz. In einem Dreyecke stehen die Sinus der Winkel mit ihren gegenüberstehenden Seiten im Verhältnisse, und umgekehrt.

Fig. 99. Wenn nämlich in einem Dreyecke ABC Fig. 99. ein $\angle$ BAC $= \alpha^\circ$ und die gegenüberstehende Seite BC $=$ a Ruthen, ein zweyter $\angle$ ACB $= \gamma^\circ$ und die gegenüberstehende Seite AB $=$ c Ruthen ist, so findet folgende Proportion Statt:

$\sin \alpha : a = \sin \gamma : c$ und

$a : \sin \alpha = c : \sin \gamma$.

Oder:

sin $\angle$ in A : BC $=$ sin $\angle$ in C : AB und

BC : sin A $=$ AB : sin C.

Beweis. Man beschreibe mit dem Gleichmesser AI $=$ CF $=$ r die Bögen IH und FE zu den Winkeln IAH $= \alpha$ und FCE $= \gamma$ und fälle hierzu die Senkrechten HK und EG innerhalb dieser Bögen, so ist HK $= \sin \alpha$ und EG $= \sin \gamma$. Ferner fälle man auch aus dem dritten Winkel B die Senkrechte BD auf AC, so sind die Dreyecke AHK und ABD einander ähnlich, und auch die Dreyecke CEG und CBD einander ähnlich, weshalb

1) AH : HK $=$ AB : BD oder

r : sin α $=$ c : BD und

r $\times$ BD $=$ c . sin α ist.

2) CE : EG $=$ CB : BD oder

r : sin γ $=$ a : BD und

r $\times$ BD $=$ a . sin γ ist.

Da nun r . BD (in Nr. 1.) $=$ c . sin α und (in Nr. 2.) auch $=$ a . sin γ ist, so wird auch

c . sin α $=$ a . sin γ seyn.

Man formire aus dieser Gleichung eine Proportion, indem man die zwey Faktoren auf der linken Seite, zum ersten und vierten Gliede und die zwey Faktoren auf der rechten Seite zum zweiten und dritten Gliede der begehrten Proportion macht, so erhält man

sin α : a = sin γ : c oder Fig. 99.
sin A : BC = sin C : AB

und weil die äußern Glieder einer Proportion gegen einander, und auch die mittlern Glieder derselben verwechselt werden können, so ist auch

AB : sin C = BC : sin A,

und es stehen die Seiten eines Dreyeckes mit dem Sinus der gegenüberliegenden Winkel, und diese mit jenen im Verhältnisse.

Eben so kann auch gezeigt werden, daß sin A : BC = sin ∠ ABC : AC ist, wenn man aus C auf AB eine Senkrechte fällt. Und so ist endlich auch

sin C : AB = sin B : AC oder
AB : sin C = AC : sin B.

Beyspiel.

Es sey ∠ BAC = 41° 32′, die Seite AC = 39,4 Ruthen und der ∠ ACB = 73° 42′, so wird der ∠ ABC = 180° — ∠ in A — ∠ in C = 180° — 41° 32′ — 73° 42′ = 64° 46′ seyn. Wollen wir nun die Seite AB berechnen, so stellen wir die Proportion an:

sin B : AC = sin C : AB oder
sin 64° 46′ : 39,4 = sin 73° 42′ : AB

wo Log AB = Log 39,4 + Log sin 73° 42′ — Log . 64° 46′ ist. Da nun

Log 39,4 = 1,5954962;
L. sin 73° 42′ = 9,9821831 und
DE. L. sin 64° 46′ = . 0,0435534
so ist Log AB = 1,6212327 und
AB = 41,806 Ruthen.

Ein anderes Beyspiel, wo die Seite AE = 52,54 Ruthen Fig. 100. der anliegende Winkel Fig. 100.
EAG = α = 37° 47′ 36″ und die diesem Winkel gegenüber stehende Seite EG oder EF = 37,58 R. gegeben ist, und wo nun der Winkel AGE oder AFE = γ berechnet werden soll.

Hier wird im Dreyecke die Proportion

EG : sin A = AE : sin G nämlich

37,58 : sin 37° 47′ 36″ = 52,54 : sin γ angewandt, wo nun

Aufg. 100.

Log 37° 47′ 36″ = 9,7872317 } 977
Log 52,54 = 1,7204941 und
D . E : L. 37,58 = . 8,4250432
Log sin γ = 9,9328627

Schlägt man nun hierzu den Winkel γ in der logarithmischen Sinustafel nach, so findet man γ = 58°57′ 19″,8, welches die Grade des Winkels AGE sind; da aber sin γ auch = sin (180 — γ) ist, so wird der gesuchte Winkel auch = 180° — 58°57′ 19″,8 = 121°2′ 40″,2 gesetzt werden können, welches die Grade des Winkels AFE sind, und man wird sich aus dieser Rechnung vollständig erklären können, warum in dem Falle zwey Dreyecke AGE und AFE verzeichnet werden können, wenn hierzu die Seite AE und der L EAG vorgezogen ist, und man aus E eine Seite EG von der Länge EF eintragen soll, die an zwei Orten richtig angelegt werden kann.

IV. Folgesätze.

1) Wenn die beyden Winkel in A und G des einen Dreyeckes AGE eben so groß sind, als die beyden Winkel A und E des andern Dreyeckes ACD und wenn ferner $AC = \frac{m}{n} AG$ ist, so wird auch $AD = \frac{m}{n} AE$ und $DC = \frac{m}{n} . EG$ seyn. Der dritte Winkel ADC des einen Dreyeckes muß ohnedem dem dritten Winkel AEG des andern Dreyeckes gleich seyn, weil alle drei Winkel zusammen in einem jeden Dreyecke 180° sind.

Beweis. Es sey L A = α; L G = L C = γ und L AEG = L ADC = 180 — α — γ = β; so ist (im Dreyecke AGE).

sin E : AG = sin A : EG oder
sin β : AG = sin α : EG, woher

$$EG = AG \times \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

und im Dreyecke ADC ist

sin D : AC = sin A : DC oder

sin

Fig. 109.

$\sin \beta : \frac{m}{n} AG = \sin \alpha : DC$, woher

$DC = \frac{m}{n} AG \times \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Da nun $AG \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = EG$, so wird auch

$DC = \frac{m}{n} \cdot EG$ seyn.

Eben so können wir auch beweisen, daß $AD = \frac{m}{n} AE$ seyn müsse, doch folgt dieß alles schon aus der Aehnlichkeit der beyden Dreyecke ACD und AGE selbst.

2) Wenn der Winkel A in einem Dreyecke EAG eben so groß, als der $\angle$ A in einem andern Dreyecke DAC, und $AD = \frac{m}{n} AE$ und $DC = \frac{m}{n} \cdot EG$ ist, so wird auch das $\triangle$ ADC dem Dreyecke AEG in dem Falle ähnlich seyn, wenn die beiden Winkel in G und C spitzig, oder wenn beide stumpf sind.

Beweis. Im Dreyecke AGE gilt die Proportion $GE : \sin A = AE : \sin G$, woher $\sin G = \frac{AE}{GE} \times \sin A$ und weil $\sin G$ auch $= \sin (180 - G)$, so giebt es zwey große Dreyecke AGE und AFE, welche die begehrten drey Stücke AE; $\angle$ A und die Seite $EG = EF$ enthalten.

Ferner gilt im Dreyecke ACD die Proportion $DC : \sin A = AD : \sin C$ oder

$\frac{m}{n} EG : \sin A = \frac{m}{n} AE : \sin C$,

woher $\sin C = \frac{AE}{EG} \times \sin A$ und demnach eben so groß, als $\sin G$. Da nun $\sin C = \sin G$, so ist auch $\angle C = \angle G$ und demnach $\triangle ACD \sim \triangle AGE$. Wir können aber auch statt $\angle C$ den $\angle (180 - C)$ nämlich $\angle DCG = \angle ABD$ annehmen und es ist $\angle ABD = \angle AFE$ und demnach $\triangle$

Fig. 100. ABD ∽ △AFE und es folgt hieraus, daß es eben so gut zwey kleine Dreyecke ACD und ABD wie zwey große Dreyecke AGE und AFE gibt, wo jene diesen ähnlich sind.

Beyspiel. Es sey der Winkel EAG = L DAC; faßt man nun mit dem Zirkel auf dem §. 32. V. beschriebenen verjüngten Maaßstabe eben so viele kleine Theile, als Ruthen in AE enthalten sind, und trägt diese kleinen Theile in AD ein, und faßt man ferner mit dem Zirkel eben so viele kleine Theile, als Ruthen in EG oder EF enthalten sind, und setzt man den einen Fuß des Zirkels in D und schneidet mit dem andern Fuße den Schenkel AG in C und B, so erhält man zwey kleine Dreyecke ACD und ABD, welche den zwey großen AGE und AFE ähnlich sind, wo demnach nicht nur DC und DB eben so viele kleine Theile enthält, als Ruthen in EF oder EG enthalten sind, sondern wo auch die Zahl der kleinen Theilchen in AB und AC mit der Zahl der Ruthen in AF und AG übereinstimmt. Ist nun das große △ AGE mit dem Spitzwinkel in G vorgelegt, so gilt das kleine △ ACD, im Gegentheile gilt das △ ABD, wenn das große △ AFE mit dem Stumpfwinkel F vorgelegt seyn sollte.

Fig. 101. V. Aufgabe. Zu einem Dreyecke FBD Fig. 101. ist ein L FBD = α mit den anlegenden Seiten BD = b und BF = c, wo BD größer als BF ist, gegeben, man soll die beyden übrigen Winkel BFD = β und BDF = γ berechnen, wo demnach auch β größer als γ ist.

Auflösung. Man setze $90 - \frac{1}{2}\alpha = \mu$ und $\frac{(b-c)}{(b+c)}$. tang μ = tang φ, so ist $\beta = \mu + \varphi$ und $\gamma = \mu - \varphi$. Drücken wir diese Formeln durch Worte aus, so müssen wir auf folgende Art zu Werke gehen:

Man halbire die Grade α des gegebenen Winkels FBD und ziehe $\frac{1}{2}\alpha$ von 90° ab, so erhält man den Werth von $\mu = 90 - \frac{1}{2}\alpha$, welcher Werth in Graden ausgedrückt ist. Man schlage zu diesen μ

Graden die Tangenten auf, multiplicire diese tang μ Fig. 102. mit $b - c$ und dividire das Produkt durch $b + c$, sehe das erhaltene Resultat $\frac{(b-c)}{(b+b)}$ tang μ (weil $\frac{(b-c)}{(b+c)}$. tang μ = tang φ gesetzt worden ist) als einen Tangenten an, und schlage in der Tangententafel den zugehörigen Winkel nach, der hier = φ gesetzt worden ist, so wird man durch Addition des Winkels φ zu μ den Winkel BFD = β und durch Subtraktion des Winkels φ von μ den Winkel BDF = γ erhalten.

Anmerkung. Die Gleichung $\frac{(b-c)}{(b+c)}$. tang μ = tang φ wird gewöhnlich durch Logarithmen gelöst, und dann ist

$$\text{Log tang } \varphi = \text{Log tang } \mu + \text{Log } (b-c) - \text{Log } (b+c).$$

Beyspiel. Es sey $\angle$ DBF = α = 54°36′; BD = b = 49,3 R. und BF = c = 31,7 R., so ist $b - c$ = 17,6 und $b + c$ = 81,0; $\frac{1}{2}\alpha$ = 27°18′ und μ = 90° − $\frac{1}{2}\alpha$ = 90° − 27° 18′ = 62°42′ = μ.

Log tang μ =	10,2872338	
Log $(b-c)$ =	1,2455127	add.
D. L. Log $(b+c)$ =	8,0915150	
Log tang φ =	9,6242615	

39763

2852

wo demnach φ = 22°49′ 48″,4 und
$\angle$ BFD = $\mu + \varphi$ = 85°31 48″,4 und
$\angle$ BDF = $\mu - \varphi$ = 39°52′ 11″,6.

Beweis zu den oben aufgestellten Formeln.

Man denke sich DB bis A verlängert, trage die Seite BF nach BC und BA, ziehe aus A über F die Linie AFB und führe zu CF die Parallele DE; so ist, weil BA; BF und BC Radien zu einem Halbkreise AFC sind, der $\angle$ AFC ein rechter, nämlich = 90° und auch, weil ED ∥ FC, der $\angle$ AED = 90°;

Fig. 101. Ferner ist AD = DB + BA = b + c und DC = DB − BC = b − c.

Man setze den ∠ BCF = μ, so ist auch, weil BC = BF, der ∠ BFC = μ, und im △e BFC die Summe der Winkel B + F + C nämlich α + μ + μ = 180°, wo demnach 2μ = 180 − α und $\mu = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{1}{2}\alpha$. Da nun DE und CF parallel sind, so ist auch ∠ ADE = ∠ BCF = μ. Man setze ferner die Wechselwinkel CFD und EDF = φ, so ist ∠ BFD = ∠ BFC + ∠ CFD oder

$\beta = \mu + \varphi$ und

∠ BDF = ∠ BDE − EDF oder

$\gamma = \mu - \varphi$.

In diesen Gleichungen ist nur noch φ unbekannt welcher Werth auf folgende Art hergeleitet werden kann.

Man beschreibe mit dem Gleichmesser DG einen Bogen zu den Winkeln EDF = φ und EDA = μ und ziehe die Tangente GIH, so ist GI = tang φ und GH = tang μ. Nun ist

(im △ DGI ∽ △ DEF)

DG : DE = GI : EF und

(in △ DGH ∽ △ DEA)

DG : DE = GH : EA

wo, weil die linke Seite dieser beyden Proportionen gleich ist, auch die rechte gleich seyn muß, weshalb

GI : EF = GH : EA oder

EA : EF = GH : GI.

Es ist aber auch △ AED ∽ △ AFC und es verhält sich demnach auch

EA : EF = AD : DC

daher auch aus der Verbindung dieser beyden letzten Proportionen folgt:

AD : DC = GH : GI oder

(b + c) : (b − c) = tang μ : tang φ

wo $\text{tang}\,\varphi = \frac{(b-c)}{(b+c)} \cdot \text{tang}\,\mu$ und, aus welcher Gleichung der Werth von tang φ berechnet

und zu diesem Werthe der Winkel φ selbst in der Tangententafel nachgeschlagen werden kann, und weil jetzt μ und φ bekannt ist, so wird auch $\beta = \mu + \varphi$ und $\gamma = \mu - \varphi$ berechnet werden können.

VI. Zusatz. Wenn zwey Dreyecke MAL und CAB Fig. 99. einen gleichen Winkel BAC = LAM $= \alpha$ enthalten und $AL = \frac{m}{n} AB$ und $AM = \frac{m}{n} AC$, so sind auch die beiden Dreyecke LAM und BAC einander ähnlich, nämlich $\angle L = \angle B$; $\angle M = \angle C$ und auch $LM = \frac{m}{n} BC$. Fig. 99.

Ist z. B. AB = b Ruthen und AC = c Ruthen, und macht man AL = b verjüngte Maaßstabstheile und AM = c Theile, so wird auch LM eben so viele Theile enthalten, als Ruthen in BC enthalten sind.

Beweis. Berechnen wir zu dem Dreyecke ACB die Winkel in C und B (nach Anleitung V.) indem wir zuvor $90° - \frac{1}{2}\alpha = \mu$ und

$$\text{tang } \varphi = \frac{(AB - AC)}{(AB + AC)} \cdot \text{tang } \mu$$ und dann $C = \mu + \varphi$ und $B = \mu - \varphi$ setzen.

Und berechnen wir ferner auch zum Dreyeck AML die Winkel M und L, indem wir zuvor $90° - \frac{1}{2}\alpha = \mu$, und

$$\text{tang } \varphi = \frac{(AL - AM)}{(AL + AM)} \cdot \text{tang } \mu$$ und endlich $\angle M = \mu + \varphi$ und $L = \mu - \varphi$ setzen; so werden wir sogleich gewahr, daß der Werth von μ in beyden Dreyecken gleich ist. Es ist aber auch der Werth von φ in beyden Dreyecken gleich, weil $AL = \frac{m}{n} AB$ und $AM = \frac{m}{n} AC$ gesetzt worden und demnach $AL - AM = \frac{m}{n} AB - \frac{m}{n} AC = \frac{m}{n}(AB - AC)$ und $AL + AM = \frac{m}{n}(AB + AC)$ und

Fig. 99.

$$\text{tang } \varphi = \frac{(AL - AM)}{(AL + AM)} \cdot \text{tang } \mu =$$

$$\frac{\frac{m}{n}(AB - AC)}{\frac{m}{n}(AB + AC)} \cdot \text{tang } \mu =$$

$$\frac{(AB - AC)}{AB + AC} \text{ tang } \mu \text{ ist,}$$

weshalb auch $\angle M = \mu + \varphi = \angle C$, und
$\angle L = \mu - \varphi = \angle B$.

Da nun die drey Winkel A, L und M des einen Dreyeckes eben so groß sind, als die drey Winkel A, B und C des andern Dreyeckes und $AL = \frac{m}{n} AB$ ist, so wird auch $LM = \frac{m}{n} BC$ und $AM = \frac{m}{n} AC$ seyn.

VII. Aufgabe. Zu einem Dreyecke BAC sind zwey Seiten $AB = b$ und $AC = c$ mit dem eingeschlossenen $\angle BAC = \alpha$ gegeben, man soll die dritte Seite $BC = a$ berechnen.

Auflösung. Sucht man wie vorher, zuerst die Winkel in B und C, indem man

$90 - \frac{1}{2}\alpha = \mu$

$\frac{(AB - AC)}{AB + AC} \cdot \text{tang } \mu = \text{tang } \varphi$ und

$B = \mu + \varphi$ und $C = \mu - \varphi$ setzt, so findet man BC durch die bekannte Proportion:

sin C : AB = sin A : BC, oder
sin B : AC = sin A : BC.

Begehrt man aber die Winkel in B und C nicht zu wissen, so setzt man zuerst

$$\frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{AB \times AC}}{(AB - AC)} = \text{tang } \lambda \text{ und}$$

dann ist $BC = \frac{(AB - AC) \times r}{\cos \lambda}$.

Beweis. Man setze $AB = b$; $AC = c$;

$BC = a$; $\angle BAC = \alpha$; $AI = AH = r$ und fälle aus B die Senkrechte BD auf AC, so ist $HK = \sin\alpha$ und $AK = \cos\alpha$ und in $\triangle ABD \backsim AHK$ verhält sich $AH : HK = AB : BD$ oder Fig. 90.

$$r : \sin\alpha = b : BD \text{ wo}$$

$$BD = \frac{b \cdot \sin\alpha}{r}.$$

Ferner verhält sich

$$HA : AK = BA : AD \text{ oder}$$

$$r : \cos\alpha = b : AD, \text{ wo}$$

$$AD = \frac{b \cdot \cos\alpha}{r} \text{ und}$$

$$CD = CA - AD = c - \frac{b \cdot \cos\alpha}{r} \text{ ist.}$$

Da nun $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2}$, so ist, weil $CD^2 = c^2 - \frac{2bc \cdot \cos\alpha}{r} + \frac{b^2 \cdot \cos^2\alpha}{r^2}$, auch

$$BC = a = \sqrt{b^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{r^2} + b^2 \cdot \frac{\cos^2\alpha}{r^2} - 2bc \cdot \frac{\cos\alpha}{r} + c^2}$$

und weil $b^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{r^2} + b^2 \cdot \frac{\cos^2\alpha}{r^2} =$

$$b^2\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{r^2}\right) = b^2 \cdot \frac{r^2}{r^2} = b^2, \text{ so ist}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{\cos\alpha}{r}}.$$

Nach §. 38. Nr. 62. ist aber $\cos\alpha = r - 2 \cdot \frac{\sin^2}{r} \frac{1}{2}\alpha$, daher auch $a =$

$$\sqrt{b^2 + c - 2bc + 2^2 \frac{bc \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{r^2}} =$$

$$\sqrt{(b - c)^2 + \frac{2^2 \cdot bc}{r^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} \text{ oder}$$

$$a = \frac{(b - c)}{r} \cdot \sqrt{r^2 + \frac{bc \cdot 2^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{(b - c)^2}}.$$

Fig. 99. Nun setze man $\frac{bc \cdot 2^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{(b-c)^2} = \text{tang}^2 \lambda$

nämlich $\text{tang } \lambda = \frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha}{(b-c)} \times \sqrt{b \cdot c}$, so ist

$$a = \frac{(b-c)}{r} \cdot \sqrt{r^2 + \text{tang}^2 \lambda} =$$

$$(b-c) \cdot \frac{\sec \lambda}{r} = \frac{(b-c)\, r}{\cos \lambda}.$$

Suchen wir daher den Werth der Formel $\frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2}\alpha}{b-c} \sqrt{bc} = \text{tang } \lambda$ in der Tangententafel auf und machen wir hierzu den Winkel λ namhaft, so ist die gesuchte dritte Seite

$$BC = a = \frac{(b-c)\, r}{\cos \lambda}. \quad (1)$$

Beyspiel. Wenn $AB = 41{,}8 = b$; $AC = 39{,}4 = c$; $\angle BAC = 41°32' = \alpha$, so ist $\frac{1}{2}\alpha = 20°46'$; $b - c = 2{,}4$;

Log b =	1,6211763
Log c =	1,5954962
Log bc =	3,2166725
Log $\sqrt{bc}$ =	1,6083362
Log sin $\frac{1}{2}\alpha$ =	9,5496935
Log 2 =	0,3010300
D. E. Log (b—c) =	0,1797888
Log tang λ =	11,0788485 und
λ =	85°13' 58''
Log (b — c) . r =	10,3802112
Log cos λ =	8,9196416
Log a =	1,4605696

sucht.

wo $a = 28{,}878 = BC$.

VIII. Aufgabe. Es sind die drey Seiten BC = a; CA = b und AB = c eines Dreyeckes ABC Fig. 99 gegeben, man soll den Winkel BAC = α berechnen, der der Seite BC = a entgegen steht.

Auflösung. Man setze die halbe Summe der drey Seiten, nämlich $\frac{a+b+c}{2} = u$, so ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{r^2 \cdot u \cdot (u-a)}{bc}}, \text{ oder}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{r^2 (u-b)(u-c)}{bc}}.$$

Schlägt man nun das Resultat einer der letzten Formeln in der Cosinus- oder Sinustafel nach, so findet man die Grade von $\frac{1}{2}\alpha$, welche man noch mit 2 multipliciren muß, um $L\,BAC = \alpha$ zu erhalten.

Beweis. Man setze $AD = x$ und $BD = y$, so ist $CD = b - x$; $CD^2 = b^2 - 2bx + x^2$; $BD^2 = AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$ oder $y^2 = c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2$ wo

$$x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}.$$

Nun ist $BA : AD = HA : AK$ oder $c : x = r : \cos\alpha$ und $\cos\alpha = \frac{rx}{c}$, daher auch $\frac{\cos\alpha}{r} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$.

Da nun $\cos\alpha = \frac{2 \cdot \cos^2\frac{1}{2}\alpha^2}{r} - r$ und $\cos\alpha = r - \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{r}$ nach §. 38. Nr. 62. ist, so wird auch

1) $2\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{r^2} - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ und

2) $1 - \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{r^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ seyn.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{r^2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2 \cdot 2 \cdot bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2b \cdot 2c} = \frac{(b+c+a)}{2b} \cdot \frac{(b+c-a)}{2c}.$$

Fig. 99. daher $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r^2 \frac{(a+b+c)}{2b} \cdot \frac{(b+c-a)}{2c}}$

und wenn $\frac{a+b+c}{2} = u$ gesetzt wird, so ist

$\frac{b+c-a}{2} = u - a$ und

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{r^2 \cdot u \cdot (u-a)}{b \cdot c}}$$

Aus der Gleichung Nr. 2. folgt:

$\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{r^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc}$, wo

$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{r^2 \frac{[a^2 - (b-c)^2]}{2b \cdot 2c}} =$

$\sqrt{r^2 \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b \cdot 2c}}$ und

wenn auch hier $\frac{a+b+c}{r} = u$ gesetzt wird:

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{r^2 \frac{(u-b)(u-c)}{b \cdot c}}.$$

Beyspiel. Wenn AB $= c = 41{,}8$; AC $= b = 39{,}4$ und BC $= a = 28{,}9$, so ist $\frac{a+b+c}{2}$

$= u = \frac{110{,}1}{2} = 55{,}05$; $u - a = 26{,}15$;

Log . r^2 . u	= 21,7407573	} add.
Log (u − a)	= 1,4174717	
D . E . Log . b	= 8,4045038	
D . E . Log . c	= 8,3788257	
	19,9415585	
	: 2	
Log cos $\frac{1}{2}\alpha$	= 9,9707782	

wo $\frac{1}{2}\alpha = 20^\circ 47'$ und

$\alpha = 41^\circ 34' = \angle$ BAC.

Anmerkung. In der Formel

$\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{r^2 \cdot u \cdot (u-a)}{b \cdot c}}$ ist a die dem gesuchten Winkel α entgegen stehende Seite, und b

und c sind anliegende Seiten; soll nun der ∠ ABC = β berechnet werden, so muß man cos ½ β = $\sqrt{\frac{r^2 \cdot u \cdot (u-b)}{a \cdot c}}$ setzen. Eben so ist auch cos ½ C = $\sqrt{\frac{r^2 \cdot u \cdot (u-AB)}{CA \times CB}}$. Fig. 99.

Hat man freylich nur erst einen Winkel A aus den drey Seiten berechnet, so ergeben sich sodann auch die übrigen Winkel durch die Proportion:

BC : sin A = AC : sin B

und sind zwey Winkel α und β eines Dreyeckes bekannt, so folgt, daß der dritte Winkel γ = 180 — α — β sey.

IX. Zusatz. Wenn die drey Seiten MA, AL und LM eines Dreyeckes MAL mit den drey Seiten CA, AB und BC eines andern Dreyeckes CAB im Verhältnisse stehen, so sind auch die einzelnen Winkel des einen und des andern Dreyeckes gleich groß.

Denn es sey AM = $\frac{m}{n}$ AC = $\frac{m}{n}$. b;

so ist auch AL = $\frac{m}{n}$. c und LM = $\frac{m}{n}$. a;

und u = $\frac{m}{n}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$; u — a = $\frac{m}{n}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$ und

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{r^2 \cdot \frac{m}{n}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}b \cdot \frac{m}{n}c}}$$

wo, wie beym Dreyecke BAC,

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{r^2 (a+b+c)(b+c-a)}{2b \cdot 2c}}.$$

Daß nun auch der ∠ L = ∠ B und ∠ M = ∠ C, folgt von selbst.

X. Auch die Fläche eines Dreyeckes ABC Fig. 102. kann berechnet werden, wenn Fig. 102.

30. Aufg. 1) hierzu zwey Winkel A und B $= \alpha$ und β und eine Seite AB $= c$ gegeben ist. Der dritte Winkel B oder γ ist nämlich $180° - \alpha - \beta$ und die gesuchte Fläche $s = \frac{\frac{1}{2} c^2 \cdot r}{\cot \alpha + \cot \beta}$

oder $s = \frac{1}{2} \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{r \cdot \sin (\alpha + \beta)}$;

Beweis. Man fälle aus C die Senkrechte CD auf AB und beschreibe mit dem Gleichmesser CE einen Bogen zu den Winkeln DCA $= 90° - \alpha$ und DCB $= 90 - \beta$, so ist EF ein Tangent des Winkels ECF nämlich EF $=$ tang $(90 - \alpha) = \cot \alpha$ und EG $=$ tang $(90 - \beta) = \cot \beta$. Nun setze man AD $= x$ und DB $= y$, so ist

CE : EF $=$ CD : DA, oder
$r : \cot \alpha = CD : x$ und
$x = CD \times \frac{\cot \alpha}{r}$; ferner

CE : EG $=$ CD : DB oder
$r : \cot \beta = CD : y$ und
$y = CD \times \frac{\cot \beta}{r}$.

Da nun $x + y = c$, so ist auch

$CD \times \frac{\cot \alpha}{r} + CD \times \frac{\cot \beta}{r} = c$, wo

$CD = \frac{c \cdot r}{\cot \alpha + \cot \beta}$.

Endlich ist die Fläche ABC $= \frac{AB \times DC}{2}$ daher auch $s = \frac{c^2 \cdot r}{2 (\cot \alpha + \cot \beta)}$.

Nach §. 38. Nr. 29. ist aber $\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{r} = \frac{r \cdot \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$, daher auch

$s = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \cdot r \cdot \sin (\alpha + \beta)}$.

2) Wenn zu einem Dreyecke BAC Fig. 99. der Fig. 99.
Winkel BAC $= \alpha$ mit den einschließenden Seiten
$AC = b$ und $AB = c$ gegeben, so wird die Fläche
s des Dreyeckes durch nachstehende einfache Gleichung
gefunden:

$$s = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{\sin \alpha}{r}.$$

Beweis. $AH : HK = AB : BD$ oder
$r : \sin \alpha = c : BD$, wo

$$BD = c \cdot \frac{\sin \alpha}{r}.$$

Da nun $\triangle ACB = \frac{AC \times BD}{2}$, so ist auch

$$s = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2 \cdot r}.$$

3) Ist zu einem Dreyecke EAG oder EAF Fig. Fig. 100.
100. ein Winkel $EAH = \alpha$ mit einer anliegenden
Seite $AE = c$ und einer gegenüber stehenden Seite
$EG = EF = a$ gegeben, so setzt man zuerst
$\frac{c \cdot \sin \alpha}{a} = \sin \gamma$ und dann ist die gesuchte Fläche

$s = \frac{a \cdot c}{2 \cdot r} \sin (\gamma \pm \alpha)$, wo zwey Dreyecke AEG
und AEF möglich sind, und wo $AEG = \frac{a \cdot c}{2 \cdot r}$
$\times \sin (\gamma + \alpha)$ und $AEF = \frac{a \cdot c}{2r} \sin (\gamma - \alpha)$ ist.

Beweis. Im Dreyecke AEG verhält sich
$EG : \sin A = AE : \sin G$ oder
$a : \sin \alpha = c : \sin \gamma$, wo

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} \cdot \sin \alpha = \sin (180 - \gamma).$$

Wird hier blos γ nachgeschlagen, so erhält man den $\angle$ FGE des Dreyeckes AGE und es ist zugleich $\angle FGE = \angle GFE = \alpha$; wird aber $180 - \gamma$ angenommen, so erhält man den $\angle$ AFE des Dreyeckes AFE. Natürlich ist nun im Dreyecke AGE der dritte

Fig. 100. $\angle$ in E $=$ 180 $-$ α $-$ γ und sin E $=$ sin (180 $-$ α $-$ γ) $=$ sin (α $+$ γ) und weil

sin A : EG $=$ sin E : AG oder

sin α : a $=$ sin (α $+$ γ) : AG und

$$AG = \frac{a \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha},$$

dagegen aber (wie in Nr. 2.) $EH = \frac{c \cdot \sin \alpha}{r}$ ist,

so wird auch $\triangle$ AGE $= \frac{AG \times HE}{2}$ nämlich

$$s = \frac{ac \cdot \sin(\gamma + \alpha)}{2r} \text{ seyn.}$$

Im Dreyecke AFE ist $\angle$ A $= \alpha$; $\angle$ F $= 180 - \gamma$, daher $\angle$ AEF $= 180 - \angle A - \angle F = 180 - \alpha - 180 + \gamma = \gamma - \alpha$ und weil

sin A : EF $=$ sin E : AF oder

sin α : a $=$ sin (γ $-$ α) : AF und

$$AF = \frac{a \cdot \sin(\gamma - \alpha)}{\sin a},$$

und EH wie vorhin $= \frac{c \cdot \sin \alpha}{r}$ ist, so wird auch

$\triangle$ AFE $= \frac{1}{2}$ AF $\times$ HE nämlich

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot ac \cdot \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{r} \text{ seyn.}$$

4) Sind die drey Seiten a; b und c eines Dreyeckes gegeben, so findet man nach §. 34. VII. die Fläche s desselben, wenn man zuvor $\frac{a + b + c}{2} = u$ und dann

$$s = \sqrt{u \cdot (u - a)(u - b) \cdot (u - c)}$$

setzt.

Beyspiel. a $=$ 39,8

b $=$ 54,7

c $=$ 54,5

a + b + c $=$ 146,0

$a + b + c = 146{,}0$: 2 — Fig. 100.

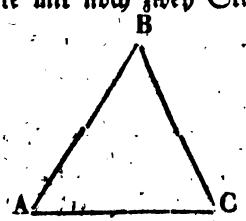
$u = 73{,}0$
$u - a = 33{,}2$;
$u - b = 21{,}3$
$u - c = 18{,}5$

$\text{Log } u = 1{,}8633229$
$\text{Log } (u - a) = 1{,}5211381$
$\text{Log } (u - b) = 1{,}3283796$
$\text{Log } (u - c) = 1{,}2671717$ } add.

$5{,}9800123$: 2

$\text{Log } s = 2{,}9900062$ und
$s = 977{,}25$

XI. Tafel zum Auflösen der Dreyecke, wenn hierzu eine Seite mit noch zwey Stücken gegeben.



1) Wenn zwey Winkel A und C und eine Seite AC gegeben sind, so ist

a) der dritte Winkel $B = 180 - A - C$.

b) die Seite $AB = \frac{AC \times \sin C}{\sin B}$ und

$BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B}$ nach III.

c) die Fläche $s = \frac{AC^2 \cdot \sin A \cdot \sin C}{2 \cdot r \sin (A + C)}$.

2) Wenn zwey Seiten AB und AC mit dem eingeschlossenen Winkel A gegeben sind, so wird

a) $90° - \frac{1}{2} A = \mu$ und $\frac{(AC - AB)}{(AC + AB)} \cdot \text{tang } \mu = \text{tang } \varphi$ gesetzt und dann ist $B = \mu + \varphi$ und $C = \mu - \varphi$. nach V.

b) $BC = \frac{AB \times \sin A}{\sin(\mu - \varphi)} = \frac{AC \times \sin A}{\sin(\mu + \varphi)}$.

Oder man setzt zuvor $\frac{2 \cdot \sin \frac{1}{2} A}{(AC - AB} \times \sqrt{AB \times AC} = \tang \lambda$, sodann ist $BC = \frac{(AC - AB) \cdot r}{\cos \lambda}$.

c) die Fläche s ist $= AC \times AB \cdot \frac{\sin A}{2 \cdot r}$.

3) Wenn ein Winkel A, eine anliegende Seite AB und die gegenüberstehende BC gegeben ist, so ist

a) $\sin C = \sin(180 - C) = \frac{AB}{AC} \times \sin A$

und $\angle B = 180 - A - C$ oder $= C - A$.

b) die Seite $AC = \frac{BC}{\sin A} \times \sin(C \pm A)$ und

c) die Fläche $s = AB \times BC \times \frac{\sin(C \pm A)}{2 \cdot r}$

4) Wenn die drey Seiten gegeben sind, so wird zuerst $\frac{CA + AB + BC}{2} = u$ gesetzt und dann ist

$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{r^2 \cdot u\,(u - BC)}{AB \times AC}}$;

$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{r^2 \cdot u \cdot (u - AC)}{BA \times BC}}$;

$\sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC}$ und

$C = 180 - A - B$ und

$s = \sqrt{u \cdot (u - AC)\,(u - AB)\,(u - BC)}$.

XII. Aufgabe. Zu einem Parallelogramme ABCD Fig. 103. ist die Länge $AB = a$ und die schiefe Breite $AD = b$ mit dem eingeschlossenen Winkel $BAD = \alpha$ gegeben, man fragt nach der senkrechten Breite $BD = h$ und nach der Fläche s des Parallelogramms. Fig. 103.

Auflösung. Es sey $AH = r$ und $HI = \sin \alpha$, so ist (in $\triangle AHI \sim \triangle ADE$)

$AH : AD = HI : DE$, oder

$$r : b = \sin \alpha : h \text{ und}$$

$$h = \frac{b \sin \alpha}{r}$$

und da $\square ABCD = AB \times DE$, so ist

$$s = \frac{ab \cdot \sin \alpha}{r}$$

Anmerkung der Winkel ABC ist $= 180 - \alpha$ und mithin sin $(180 - \alpha)$ auch $=$ sin α

XIII. Aufgabe. Zu einem Trapeze ABCH Fig. 104 ist die eine parallele Seite AB, die anliegenden Winkel BAH und ABC $= \alpha$ und β mit der Länge der schiefen Seite AH gegeben, man soll den senkrechten Abstand AG der Parallelen AB und HC und HC selbst berechnen, damit man auch die Fläche s des Parallelogramms finden könne. Fig. 104.

Auflösung. Es ist, wenn AG und BD $\perp$ auf AB stehen, $\angle$ GAH $= \angle$ BAH $- \angle$ BAG $= \alpha - 90°$. Läge AH in AF und wäre $\alpha =$ BAF, so würde $\alpha - 90°$ negativ seyn. Wirklich ist auch im Vergleiche des Winkels GAH der Winkel GAF negativ.

Man denke sich zum $\angle$ GAH einen Bogen und eine Senkrechte KI gezogen, so ist

$$AK : KI = AH : HG \text{ oder}$$

$$r : \sin (\alpha - 90) = AH : HG \text{ und}$$

$$HG = \frac{AH \times \sin (\alpha - 90)}{r}.$$

Ferner $AK : AI = AH : AG$ oder

$$r : \cos (\alpha - 90) = AH : AG, \text{ wo}$$

$$AG = \frac{AH \times \cos (\alpha - 90)}{r}$$

Ist $\alpha - 90$ oder der Winkel GAF negativ, so ist der zu gehörige Sinus ebenfalls negativ, der Cosinus aber positiv, daher auch AG seine Lage wie vorher behält, aber GA in GF übergeht. Denn es sey $\angle$ BAF $= \alpha$, so ist

$$GF = \frac{AF \times \sin (\alpha - 90) \text{ und}}{r}$$

$$AG = \frac{AF \times \cos (\alpha - 90)}{r}$$

wo sin $(\alpha - 90)$ und mithin auch GF negativ, dagegen aber cos $(\alpha - 90) = \cos -(90 - \alpha) =$ + cos $(90 - \alpha)$ und mithin AG positiv bleibt. Fig. 104.

Nachdem AG = BD berechnet worden ist, oder wenn BD selbst gegeben ist, so kann man auch DC oder DE und die Schiefe BC selbst berechnen. Denn wenn $\angle$ ABC = α, so ist $\angle$ DBC = $\beta - 90°$, und wenn BL = r und LN = tang $(\beta - 90)$; so verhält sich

$$BL : LN = BD : DC \text{ oder}$$
$$r : \tan(\beta - 90) = BD : DC, \text{ wo}$$
$$DC = \frac{BD \times \tan(\beta - 90)}{r}$$

Ferner:

$$BL : BN = BD : BC \text{ oder}$$
$$r : \sec(\beta - 90) = BD : BC, \text{ wo}$$
$$BC = \frac{BD \cdot \sec(\beta - 90)}{r} = \frac{BD \cdot r}{\cos(\beta - 90)}$$

Wird $\angle$ ABE = β gesetzt, so ist tang $(\beta - 90)$ negativ, dagegen aber cos $(\beta - 90)$ positiv weshalb jetzt DC in DE übergeht, dagegen aber BE wie BC positiv bleibt.

Die hintere Parallele CH ergiebt sich nun von selbst. In allen Trapezen ist DG = BA und im Trapeze HA BC ist HC = GD + GH + DC

Im Trapeze HABE ist HE = GD + GH − DE.

Im Trapeze FABC ist FC = GD + DC − GF und

Im Trapeze FABE ist FE = GD − GF − DE.

Die Fläche dieser Trapezien wird gefunden, wenn man die halbe Summe der beyden parallelen Seiten mit dem senkrechten Abstand derselben multiplicirt.

Es sey AB = a; $\angle$ BAH = α; AH = b und $\angle$ ABC = β, so ist $AG = BD = \frac{b \cos(\alpha - 90)}{r}$

$GH = \frac{b \cdot \sin(\alpha - 90)}{r}$; $DC = \frac{BD \tan(\beta - 90)}{r}$

$= \frac{b \cos}{r} (\alpha - 90) \times \frac{\text{tang}}{r} (\beta - 90)$; Fig 104.

Rechteck ABDG $=$ AB $\times$ AG $= \frac{a.\ b.\ \cos}{r} (\alpha - 90)$

$= + \frac{ab.\ \cos}{r} (90 - \alpha)$; $\triangle$ AGH $= \frac{AG \times GH}{2}$

$= \frac{b^2.\ \cos\ (\alpha - 90) \sin\ (\alpha - 90)}{2\ r^2} = \frac{b^2.}{4.\ r}$

$\sin 2\ (\alpha - 90)$ (vermöge §. 38. Nr. 51.);

$\triangle$ BDC $= \frac{BD \times DC}{2} = \frac{b^2.\ \cos^2\ (\alpha - 90) \times}{2.\ r^2}$

$\frac{\text{tang}\ (\beta - 90)}{r}$; wo ABCH $=$ s $=$ $\square$ ABDG $+$ $\triangle$ AGH $+$ $\square$ BDC.

Ist AB $=$ a; AG $=$ BD $=$ c und $\angle$ BAH $=$ α und $\angle$ ABC $=$ β gegeben, so ist BL ; LN $=$ BD ; DC oder

r ; tang $(\beta - 90) =$ c : DC und

$$DC = \frac{c.\ \text{tang}\ (\beta - 90).}{r}$$

Eben so ist $GH = \frac{c.\ \text{tang}\ (\alpha - 90.)}{r}$ Ferner

$\triangle$ AGH $= \frac{1}{2}$ AG $\times$ GH $= \frac{\frac{1}{2} c^2.\ \text{tang}}{r} (\alpha - 90)$

und $\triangle$ BDC $= \frac{\frac{1}{2} c^2.\ \text{tang}}{r} (\beta - 90)$;

$\square$ ABDG $=$ ac und

Trap. ABCH $=$ $\square$ ABDG $+$ $\triangle$ AGH $+$ $\triangle$ BDC oder

$$s = ac + \tfrac{1}{2} c^2 \frac{[\text{tang}\ (\alpha - 90) + \text{tang}\ (\beta - 90)]}{r}$$

und vermöge §. 38. Nr. 27. ist

$$s = ac + \frac{\frac{1}{2} c^2.\ r.\ \sin\ (\alpha + \beta - 180)}{\cos\ (\alpha - 90).\ \cos\ (\beta - 90.)}$$

Wäre AB $=$ a mit den Winkel BAH $=$ α und ABC $=$ β vorgezogen, und sollte man nun zu AB eine Parallele CA so führen, daß das entstehende

Trapez eine voraus bestimmte Fläche = s □R. enthält, so müßte man den Werth von c aus der für s aufgestellten Gleichung entwickeln und BD = AG = c machen, welche Entwickelung aus der Lehre von quadratischen Gleichungen bekannt ist.

Fig. 105. XIV. Vom Trapezoide ABCD Fig. 105. führen wir nur folgendes an.

1) Die vier Winkel DAB; ABC; BCD und CDA eines jeden Viereckes sind zusammen = 2. 180 = 360°

Denn wenn man die Diagonale AC zieht, so besteht das Viereck aus zwey Dreyecken ACB und ACD, wovon ein jedes 180 Grade enthält, und es hat daher das Viereck 2. 180°.

Nimmt man irgend einen Punkt E in der Mitte an und zieht aus E in alle vier Ecken die Strahlen EA; EB; EC und ED, so erhält man eben so viele Dreyecke AEB; BEC, ꝛc. als Seiten das Vieleck enthält, mithin vier Dreyecke, welche zusammen 4. 180 Grade enthalten. Da aber die 360 oder 2. 180°, welche um dem Punkt E herumliegen, nicht zum Viereck gehören, so gehen diese 2. 180 von jenen 4. 180 Graden ab, weshalb das Viereck in allen vier Winkeln A; B; C und D zusammen nur 4. 180 — 2. 180 = 2. 180 = 360° enthält.

Ist das Viereck AECB vorgelegt, so muß für den Winkel in E der inwendig liegende Bogen FGH oder die Grade des inneren Winkels angenommen werden und dann ist ∠ EAB + ∠ ABC + ∠ BCE + Bogen HGF ebenfalls = 360°. Denn es ist, wenn die Linie BER gezogen wird, ∠ REA = ∠ EAB + ∠ ABE und ∠ REH = ∠ ECB + ∠ EBC. Addiren wir nun diese beyden Gleichungen, so erhalten wir

∠ FEH oder Bogen FIH = ∠ EAB + ABC + BCE

und wenn wir hierzu den Bogen FGH addiren, so erhalten wir den

Bogen HIFGH = 360° = ∠ in A + ∠ B + ∠ C + ∠ E.

2) Sind zu einem Trapezoide Fig. 105. die vier Seiten AB; BC; CD und DA nebst einem oder zwey Winkel gegeben, so kann man die Fläche desselben und alle übrigen Winkel berechnen. Denn es sey L ABC $= \beta$ und L ADC $= \delta$, so ist $\triangle$ ABC $= BA \times BC \times \frac{\sin \beta}{2 \cdot r}$ und $\triangle$ ADC $= DA \times DC \times \frac{\sin \delta}{2 \cdot r}$ und Viereck ABCD $= \triangle$ ACB $+$ $+ \triangle$ ACD. Ferner ist im Dreyecke ABC die dritte Seite Fig. 105.

$$AC = \sqrt{\left(AB^2 + BC^2 - 2.AB \times BC \times \frac{\cos B}{r}\right)}$$

und im Dreyecke ADC die dritte Seite

$$AC = \sqrt{\left(DC^2 + DA^2 - 2.DC.DA.\frac{\cos D}{r}\right)}$$

wo nun diese Wurzeln der vorigen gleich gesetzt und aus dieser Gleichung der Werth von cos D entwikkelt werden kann. Sind nun zu den Dreyecken ABC und ADC die Winkel B und D mit den anliegenden Seiten bekannt, so können alsdann leicht auch die Winkel in A und C berechnet werden.

3) Sind zu einem Trapezoide Fig. 105. drey Seiten AB, BC, CD mit zwey Winkeln in B und C gegeben, so sucht man zum Dreyecke ABC die Seite AC und den L BCA, zieht den Winkel BCA von L BCD ab, wo L ACD übrig bleibt, und da jetzt zum Dreyecke ACD die Seiten AC und CD mit dem eingeschlossenen Winkel ACD bekannt sind, so wird man hierzu auch die Winkel in D und A und die Seite AD berechnen können.

4) Sind zu einem Trapezoide DABC Fig. 105. drey Winkel A; B und C und zwey Seiten AB und BC, gegeben, so ist der vierte L in D $= 360 - A - B - C$ und wenn man zum Dreyecke ABC die Winkel BAC und BCA und die dritte Seite AC sucht, so sind alsdann auch zum Dreyecke ACD die Winkel in A und C mit der zwischenliegenden Seite AC bekannt, aus welchen man sodann augenblicklich

die übrigen beyden Seiten AD und DC berechnen kann.

Anmerkung. Andrer Sätze, welche ebenfalls zum Trapezoide gehören, kommen im Nachfolgenden und weiter unten bey der Lehre von Vielecken vor.

XV. Aufgabe. A; B und C sind drey Grenzsteine (Fig. 105; 106 und 107) und man hat von einem zum andern mit der Kette gemessen und AB = a und BC = b Ruthen gefunden. Wenn man nun das Winkelinstrument nicht in B, sondern darneben in E aufstellt, aus E nach A, nach B und C visirt, den Winkel AEC = α° und die Winkel AEB = β° und ∠ BEC = γ° und zugleich auch BE = c R. mißt, so entsteht die Frage, wie groß der Winkel ABD = δ sey, denn die beyden Linien BA und BC machen, die vom Grenzsteine B zum vorhergehenden A und folgenden C gezogen werden.

Fig. 105. — 106. — 107.

Auflösung. Im Dreyecke ABE ist

AB : sin ∠ AEB = BE : sin ∠ A

nämlich $\sin A = \frac{BE \times \sin \beta}{AB}$ und

im Dreyecke CBE ist

BC : sin ∠ BEC = BE : sin C und

$\sin C = \frac{BE \times \sin \gamma}{BC}$

Hat man nun die Winkel BAE = A und BCE = C Grade berechnet, so ist

in Fig. 105. ∠ ABC = ∠ AEC − ∠ A − C;

in Fig. 106. ∠ ABC = ∠ AEC + A + C

und in Fig. 107. ∠ ABC = ∠ AEC − A + C.

Denn wenn man die Linie BER oder EBR zieht, so ist vermöge §. 27. V. Nr. 3. in Fig. 105.

∠ AER = ∠ EAB + ∠ ABE oder

∠ ABE = ∠ AER − ∠ EAB und

∠ EBC = ∠ REC − ∠ ECB

und durch Addition der beyden letzten Gleichungen erhält man

∠ ABC = (∠ AER + ∠ REC) − ∠ EAB − ECB;

oder ∠ ABC = ∠ AEC − ∠ A − C.

In Fig. 106. ist
$\angle ABR = \angle AEB + \angle A$ und
$\angle RBC = \angle BEC + \angle C$ daher auch durch Addition:
$\angle ABC = \angle AEC + \angle A + \angle C$,
und in Fig. 107. ist;
$\angle RBC = \angle BEC + C$ und
$\angle RBA = \angle BEA + \angle A$ daher auch durch Subtraktion:
$\angle ABC = \angle AEC + C - A$.

XVI. Aufgabe. Man hat zwar die beyden Schenkel AB und BC Fig. 108; 109 und 110, aber nicht den Winkel ABC gemessen, sondern das Winkelinstrument in E aufgestellt, nach A und C visirt, den Winkel $AEC = \alpha$ gemessen, in B eine Senkrechte BD auf AB errichtet und dadurch AE (oder dessen Verlängerung) in D geschnitten, ferner in B noch eine Senkrechte BF auf BC errichtet und dadurch CE (oder dessen Verlängerung) in F geschnitten und diese Senkrechte BD und BF gemessen. Man fragt wie groß der $\angle ABC$ sey? Fig. 108. — 109. — 110.

Auflösung. Es sey $AH = r$ und HI eine Tangente zum $\angle A$, so ist in allen drey Figuren
$AH : HI = AB : BD$ oder
$r : \text{tang } A = AB : BD$ und
$$\text{tang } A = \frac{r \cdot BD}{AB}.$$
Eben so ist auch in allen drey Figuren
$$\text{tang } C = \frac{r \cdot BF}{CB}.$$
Nachdem nun die $\angle A$ und C bekannt sind, so erhält man den gesuchten $\angle ABC$ wie in XV. durch nachstehende Gleichungen:
Nämlich es ist
in Fig. 108. $\angle ABC = \angle AEC + \angle A + \angle C$;
in Fig. 109. $\angle ABC = \angle AEC - \angle A - \angle C$;
und in Fig. 110. $\angle ABC = \angle AEC - A + C$.

XVII. Aufgabe. Zur Linie AB, deren Länge bekannt ist, hat man die Mittagslinie AN Fig. 111. Fig. 111.

Fig. 111. gezogen, oder man hat den $\angle$ NAB, den die Linie AB gegen die Lage AN der Magnetnadel macht, mittelst der Buffole gemessen; wenn nun aus einem dritten Orte D nach A und B visirt und daselbst die Lage der Mittagslinie oder der Magnetnadel DC (welche zu AN parallel läuft) beobachtet wird, der $\angle$ CDA $= \alpha$ und $\angle$ CDB $= \beta°$; $\angle$ NAB $= \gamma°$ und AB $= a$ Ruthen enthält, so entsteht die Frage, wie groß der $\angle$ BAD; $\angle$ ABD; die Linie AC; oder BC; die Seiten AD; CD und BD sind?

Auflösung. Es ist $\angle$ DCA ein Wechselwinkel von NAC, daher auch $\angle$ ACD $= \gamma$, und weil im Dreyecke ABC auch der $\angle$ D $= \alpha$ bekannt ist, so muß der $\angle$ DAB $= 180 - \alpha - \gamma$ seyn. Ferner ist $\angle$ ACD ein Nebenwinkel des Dreyeckes BCD, daher $\angle$ ACD $=$ $\angle$ CDB $+$ $\angle$ CBD oder $\gamma = \beta +$ $\angle$ CBD, woher $\angle$ CBD $= \gamma - \beta$. Endlich ist $\angle$ ADB $= \alpha + \beta$. Da nun im Dreyecke ABD der $\angle$ A $= 180 - \alpha - \gamma$: $\angle$ B $= \gamma - \beta$ und $\angle$ D $= \alpha + \beta$ und sin D : AB $=$ sin A : BD oder sin $(\alpha + \beta)$: a $=$ sin $(\alpha + \gamma)$: BD, so ist

$$BD = \frac{a. \sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

und da sin D : AB $=$ sin B : AD oder sin $(\alpha + \beta)$: a $=$ sin $(\gamma - \beta)$: AD, so ist

$$AD = \frac{a. \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Man setze AC $= x$ und BC $= y$, so gilt im Dreyecke ADC die Proportion:

sin C : AD $=$ sin D : AC oder

$$\sin\gamma : \frac{a. \sin(\gamma - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \sin\alpha : x, \text{ wo}$$

$$x \text{ oder } AC = \frac{a. \sin\alpha. \sin(\gamma - \beta)}{\sin\gamma. \sin(\alpha + \beta)}$$

Ferner gilt im Dreyecke CDB die Proportion:

sin C : BD $=$ sin D : BC oder

$$\sin\gamma : \frac{a. \sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} = \sin\beta : y, \text{ wo}$$

$$y = BC = \frac{a. \sin\beta. \sin(\gamma + \alpha)}{\sin\gamma. \sin(\alpha + \beta)}$$

Daß nun $x + y = a$, nämlich

$$a.\left[\frac{\sin\alpha\,\sin(\gamma-\beta)}{\sin\gamma.\sin(\alpha+\beta)}+\frac{\sin\beta.\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma.\sin(\alpha+\beta)}\right] = a$$

ist, ergiebt sich aus den Formeln §. 38. Nr. 1 und 2.

Auch die Linie DC kann berechnet werden. Nämlich im Dreyecke ACD verhält sich

$\sin C : AD = \sin A : CD$ oder

$$\sin\gamma : \frac{a.\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \sin(\alpha+\gamma) : CD,$$

wo $$CD = \frac{a.\sin(\gamma+\alpha).\sin(\gamma-\beta)}{\sin\gamma\,\sin(\alpha+\beta)}$$

Oder es ist im Dreyecke BCD;

$\sin C : BD = \sin B : CD$ oder

$$\sin\gamma : \frac{a.\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} = \sin(\gamma-\beta) : CD,$$

wo CD denselben Werth, wie vorher, erhält.

Anmerkung. Läuft die aus D zu AN Fig. 112. parallel gezogene Mittagslinie DC neben der gemessenen Linie $AB = a$ weg, so muß man sich den Punkt C in der Verlängerung AB denken, der durch DC geschnitten wird, sodann ist $\angle NAB = \angle ACD = \angle BCD = \gamma$; $\angle ADC = \alpha$ und $\angle CDB = -\beta$, oder $\angle ADB = \alpha - \beta$; $\angle ABD = \angle BCD + \angle BDC = \gamma + \beta$ und $\angle BAD = 180° - \alpha - \gamma$; im $\triangle ADB$:

$\sin D : AB = \sin A : BD$, oder

$\sin(\alpha-\beta) : a = \sin(\alpha+\gamma) : BD$, wo

$$BD = \frac{a.\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)}$$ und

$\sin D : AB = \sin B : AD$, oder

$\sin(\alpha-\beta) : a = (\gamma+\beta) : AD$, wo

$$AD = \frac{a.\sin(\gamma+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

und man sieht hieraus, daß man in allen obigen Formeln, welche für Fig. 111. aufgestellt sind, nur β negativ zu setzen habe, um die Formeln für Fig. 112. zu erhalten.

Fig. 112.

XVIII. Aufgabe. Man hat zwey Standorte C und D Fig. 113 und 114. mit dem Winkelinstrumente gewählt, aus C nach D; B und A, und aus D nach C; A und B visirt und die Entfernung CD = a Ruthen gemessen, man fragt, wie weit A von B liege, oder wie groß AB = c sey? Oder, wenn umgekehrt AB bekannt und CD unbekannt seyn sollte, wie groß die Entfernung CD und wie groß die L BAC; BAD; ABC und ABD sind? Fig. 113.

Auflösung. Es sey L DCA = $\alpha°$; DCA = β; L CDB = γ und CDA = $\delta°$, so ist L DBC = $180 - \gamma - \beta$ und im △ CDB verhält sich

sin L DBC : CD = sin L CDB : BC,

oder $\sin(\beta + \gamma) : a = \sin\gamma : BC$, wo

$$BC = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

Ferner ist L CAD = $180 - \alpha - \delta$ und im Dreyecke ACD verhält sich

sin A : CD = sin D : AC, oder

$\sin(\alpha + \delta) : a = \sin\delta : AC$, wo

$$AC = \frac{a \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$$

Wird der Kürze wegen $\frac{r \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \sin k$

und $\frac{r \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)} = \sin\lambda$ gesetzt, so ist

$$BC = \frac{a \cdot \sin k}{r} \text{ und}$$

$$AC = \frac{a \cdot \sin\lambda}{r}$$

Nun sind zum Dreyecke ACB die beyden Seiten AC und CB mit dem eingeschlossenen Winkel ACB = $\alpha - \beta$ gegeben, man wird daher auch nach V. die beyden Winkel CAB und CBA und dann auch die begehrte Seite AB = c berechnen können.

Man setze demnach $90° - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \mu$ und $\frac{(BC - AC)}{(BC + AC)} \tan\mu = \tan\varphi$, oder, wenn

statt BC und AC die vorhin angeführten Werthe Fig. 113.
substituirt werden und $\frac{a}{r}$ gehoben wird, so ist

$$\frac{(\sin k - \sin \lambda).\ \text{tang}\ \mu}{(\sin k + \sin \lambda)} = \text{tang}\ \varphi,$$

und vermöge §. 38. Nr. 37.

$$\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(k - \lambda).\ \text{tang}\ \mu}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(k + \lambda)} = \text{tang}\ \varphi$$

Da nun nach V der $\angle$ BAC $= \mu + \varphi$ und $\angle$ ABC $= \mu - \varphi$, so gilt auch im Dreyecke ABC die Proportion:

$$\sin B : AC = \sin C : AB \text{ oder}$$

$$\sin(\mu - \varphi) : \frac{a.\ \sin \lambda}{r} = \sin(\alpha - \beta) : c$$

wo nun $c = \frac{a.\ \sin \lambda.\ \sin(\alpha - \beta)}{r.\ \sin(\mu - \varphi)}$ und

$$a = c.\ \frac{r\ \sin(\mu - \varphi)}{\sin \lambda.\ \sin(\alpha - \beta)}.$$

Hieraus leiten wir nun folgende kurze Verfahrungsart ab:

Die Winkel BAC $= \mu + \varphi$ und ABC $= \mu - \varphi$ werden gefunden, wenn man setzt:

$$\frac{r.\ \sin \gamma}{\sin(\gamma + \beta)} = \sin k;$$

$$\frac{r.\ \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)} = \sin \lambda;$$

$$\mu = 90° - \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

$$\frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(k - \lambda)}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(k + \lambda)} \times \text{tang}\ \mu = \text{tang}\ \varphi;$$

sodann ist $\angle$ BAD $= \angle$ BAC $-$ CAD $= \mu + \varphi + \alpha + \delta - 180$ und $\angle$ ABD $= \angle$ ABC $+ \angle$ CBD $= \mu - \varphi + 180 - \gamma - \beta$ und wir sehen hieraus, daß alle Winkel ganz unabhängig von den Seiten sind; dagegen ist

$$c = \frac{a.\ \sin \lambda.\ \sin(\alpha - \beta)}{r.\ \sin(\mu - \varphi)} \text{ und}$$

$$a = \frac{c.\ r.\ \sin(\mu - \varphi)}{\sin \lambda.\ \sin(\alpha - \beta)}.$$

Fig. 114. XIX. Es ist dieselbe Aufgabe, wie die vorige vorgelegt, nur liegen die beyden Standorte C und D Fig. 114. aus welchen man nach A und B visirt, gekreuzt zu AB = c, man fragt, wie man AB aus CD = a, oder umgekehrt CD aus AB berechnen könne, und wenn die Winkel DCA = α; DCB = β; CDB = γ und CDA = δ gemessen sind, wie groß die Winkel ABC und BAC; ∠ BAD und ABD sind?

Auch hier ist, wie XVIII. im Dreyecke DCA, die Seite $AC = \frac{a.\ \sin\ \delta}{\sin(\alpha+\delta)}$, und im Dreyecke CDB die Seite $BC = \frac{a:\ \sin\ \gamma.}{\sin(\beta+\gamma)}$. Wird nun auch hier,

$\frac{r.\ \sin\ \gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \sin k$ und

$\frac{r.\ \sin\ \delta}{\sin(\alpha+\delta)} = \sin\lambda$ gesetzt, so ist

$AC = \frac{a.\ \sin\lambda}{r}$ und

$BC = \frac{a.\ \sin k}{r}$.

Nun ist im Dreyecke ACB der ∠ ACB = α + β mit den anliegenden Seiten CB und CA bekannt, daher $\mu = 90 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und

$\text{tang}\ \varphi = \frac{(CB - CA)\ \text{tang}\ \mu}{CB + CA} = \frac{(\sin k - \sin\lambda).\ \text{tang}\ \mu}{(\sin k + \sin\lambda)} = \frac{\text{tang}\ \frac{1}{2}(k-\lambda)\ \text{tang}\ \mu}{\text{tang}\ \frac{1}{2}(k+\lambda)}$;

∠ CAB = μ + φ; ∠ ABC = μ − φ;

∠ CAD = 180° − α − δ; ∠ BAD = ∠ CAD − ∠ CAB = 180 − α − δ − μ − φ; ∠ CBD = 180° − β − γ und ∠ ABD = ∠ CBD − CBA = 180 − β − γ − μ + φ und im Dreyecke ABC ist

$AB = \frac{AC.\ \sin(\alpha+\beta)}{\sin(\mu-\varphi)}$ oder

$c = \frac{a.\ \sin\lambda.\ \sin(\alpha+\beta)}{r.\ \sin(\mu-\varphi)}$ und

$$a = \frac{c.\ r.\ \sin(\mu - \varphi)}{\sin\lambda.\sin(\alpha+\beta)}.$$

XX. Aufgabe. Man hat aus zwey Standorten A und C Fig. 115; 116; 117 und 118. nach einem dritten Orte B. visirt und die Winkel CAB $= \gamma$ und ACB $= \delta$ gemessen; sodann hat man auch aus einem vierten Orte D nach den vorigen dreyen visirt und die Winkel ADB $= \alpha$ und BDC $= \beta$ gemessen: man fragt, unter welchem $\angle$ BAD $= \varphi$ und $\angle$ BCD $= \mu$ die Strahlen AD und CD zum Orte D gegen AB und CB geneigt sind? Fig. 115. — 116. — 117. — 118.

Auflösung. Man setze $\frac{\sin\alpha.\sin\gamma}{r} = \cot k$ und $\frac{\sin\beta\sin\delta}{r} = \cot\lambda$ und in Fig. 115 und 117. eine Größe $\Psi = \frac{180 - \alpha - \beta + \gamma + \delta}{2}$ und in Fig. 116. $\Psi = \frac{180 - \alpha - \beta - \gamma - \delta}{2}$, so ist $\cot\omega = \frac{\cot\Psi.\sin(k+\lambda)}{\sin(k-\lambda)}$ und $\varphi = \Psi - \omega$ und $\mu = \Psi + \omega$, wo ω auch negativ und demnach $\varphi > \mu$ seyn kann.

Beweis. Es ist $\angle$ ABC $= 180° - \gamma - \delta$, und (in Fig. 115 und 117.) $\mu = 180 - \alpha - \beta + \gamma + \delta - \varphi$ und (in Fig. 116.) $\mu = 180 - \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varphi$ und in Fig. 118. ist $\mu = 180 - \alpha - \beta - \varphi$, weil im letzten Falle γ und $\delta = 0$ sind. Es finden aber folgende Proportionen Statt: als (im Dreyecke ACB)

1) $\sin\delta : \sin\gamma = AB : BC$;
(im Dreyecke ABD)
$\sin\alpha : AB = \sin\varphi : BD$, wo

2) $BD = \frac{AB \times \sin\varphi}{\sin\alpha}$ und
(im Dreyecke DBC)
$\sin\beta : BC = \sin\mu : BD$, wo

Fig. 115.
— 116.
— 117.
— 118.

3) $BD = \frac{BC.\ \sin \mu}{\sin \beta}$, daher auch die Werthe Nr. 2 und 3 einander gleich, nämlich

$$\frac{AB.\ \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{BC.\ \sin \mu}{\sin \beta} \text{ oder}$$

$$\frac{AB.\ \sin \varphi}{BC.\ \sin \alpha} = \frac{\sin \mu}{\sin \beta}$$

und durch Substitution aus Nr. 1 hierher erhält man

$$\frac{\sin \delta.\ \sin \varphi}{\sin \alpha.\ \sin \gamma} = \frac{\sin \mu}{\sin \beta} \text{ oder}$$

4) $\sin \beta.\ \sin \delta.\ \sin \varphi = \sin \alpha.\ \sin \gamma.\ \sin \mu.$

Man setze $\frac{\mu + \varphi}{2} = \frac{180 - \alpha - \beta + \gamma + \delta}{2}$

$= \Psi$ oder (in Fig. 116.) $\Psi = \frac{180 - \alpha - \beta - \gamma - \delta}{2}$

und $\frac{\mu - \varphi}{2} = \frac{180 - \alpha - \beta + \gamma + \delta}{2} - \varphi = \omega$

oder (in Fig. 116) $\omega = \frac{180 - \alpha - \beta - \gamma - \delta}{2}$

$- \varphi$ so ist in allen Figuren $\mu = \Psi + \omega$ und $\varphi = \Psi - \omega$ und durch Substitution in 4 erhält man

5) $\sin \beta.\ \sin \delta.\ \sin (\Psi - \omega) = \sin \alpha.\ \sin \gamma.\ \sin (\Psi + \omega)$.

Es ist aber $\sin (\Psi \pm \omega) = \sin \Psi.\ \cos \omega \pm \sin \omega.\ \cos \Psi$, daher $\sin \beta.\ \sin \delta.\ [\sin \Psi.\ \cos \omega - \sin \omega.\ \cos \Psi.] = \sin \alpha.\ \sin \gamma.\ [\sin \Psi.\ \cos \omega + \sin \omega\ \cos \Psi]$.

Man dividire diese Gleichung durch $\sin \omega.\ \cos \Psi$, so ist, weil $\frac{\cos \omega}{\sin \omega} = \frac{\cot \omega}{r}$ und $\frac{\sin \Psi}{\cos \Psi} = \frac{r}{\cot \Psi}$ ist,

$$\sin \beta.\ \sin \delta \left[\frac{\cot \omega}{\cot \Psi} - 1\right] = \sin \alpha.\ \sin \gamma.$$

$$\left[\frac{\cot \omega}{\cot \Psi} + 1\right],$$ woraus man durch Entwickelung findet:

$$\cot \omega = \left[\frac{\sin \beta . \sin \delta + \sin \alpha . \sin \gamma}{\sin \beta . \sin \delta - \sin \alpha . \sin \gamma}\right] \times \cot \Psi .$$

Man setze $\frac{\sin \alpha . \sin \gamma}{r} = \cot k$ und $\frac{\sin \beta . \sin \delta}{r} = \cot \lambda$, so ist $\cot \omega = \frac{[\cot \lambda + \cot k] . \cot \Psi}{\cot \lambda - \cot k}$

und aus §. 38. Nr. 40. folgt

$$\cot \omega = \frac{\sin (k + \lambda) \cot \Psi}{\sin (k - \lambda)}$$

§. 41.

Gleichungen vom zweyten und dritten Grade trigonometrisch zu lösen.

I. Wenn in der Formel $a \sqrt{\left(\frac{bc \pm fg}{h}\right)} = x$ die Größen a; b; c; f; g; h vielziffrig sind, so sucht man die Multiplikation, Division vielziffriger Größen und das Wurzelziehen gewöhnlich durch Logarithmen zu verrichten; da aber die Summe oder Differenz zweyer Glieder durch Logarithmen nicht gefunden werden kann, so können wir auch keinen fortgesetzten Gebrauch von Logarithmen machen, sondern sehen uns genöthiget, erst einmal von Logarithmen auf die Zahlen zurück zu gehen, die Addition oder Subtraktion derselben zu verrichten, und dann können wir auch wieder zu Logarithmen übergehen und die fortgesetzte Berechnung durch dieselben verrichten. Wir wollen nun jetzt zeigen, wie Formeln von der vorgelegten Gestalt mit Hilfe der Trigonometrie oder mit Hilfe der Kreisbögen unabgesetzt durch Logarithmen auch dann berechnet werden können, wenn die Formel Glieder enthält, welche addirt oder subtrahirt werden sollen.

1) Es sey die Formel $x = a \cdot \sqrt{m + n}$ vorgelegt, so wird auch $x = a \sqrt{2m \left(\frac{m+n}{2m}\right)} = a \sqrt{2m} \times \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{m+n}{m}\right)} = a \sqrt{2m} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{m}\right)}$ seyn. Im Falle $m > n$, welches hier Bedingung ist, wird $\frac{n}{m} < 1$ seyn. Da nun $\frac{n}{m} < 1$ ist, so wird es auf alle Fälle einen Cosinus geben, welcher $= \frac{n}{m}$ ist. Man schlage daher $\frac{n}{m}$ in der Cosinustafel nach und mache den dazu gehörigen Winkel α namhaft, so ist, weil $\frac{n}{m} = \cos \alpha$ gesetzt worden, $x = a \cdot \sqrt{2m} \times \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$. Es ist aber nach §. 38. Nr. 23., wenn dort α statt γ und $r = 1$ gesetzt wird, $1 + \cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ nämlich $\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$, mithin wird auch $x = a \cdot \sqrt{2m} \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = a \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \sqrt{2m}$ seyn, und wenn wir wieder r einführen, so ist $x = \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha \cdot \sqrt{2m}}{r}$ und $\cos \alpha = \frac{n \cdot r}{m}$.

Diesemnach wird, um $x = a \times \sqrt{m + n}$ trigonometrisch aufzulösen, $\frac{n \cdot r}{m \cdot a}$ in der Cosinustafel nachgeschlagen, der dazu gehörige Winnel α halbirt, zu diesem halben Winkel wieder der Cosinus nachgeschlagen und derselbe mit $\frac{a \cdot \sqrt{2m}}{r}$ multiplicirt. Mittelst Logarithmen findet man

$\mathrm{Ln} + 10 - \mathrm{Lm} = \mathrm{Log} \cos \alpha$ und

$x = \mathrm{La} + \mathrm{Log} \cos \frac{1}{2} \alpha - 10 + \frac{1}{2} \mathrm{L}(2m)$.

Sollte

Sollte n größer als m seyn, so darf man nur $\frac{m \cdot r}{n} = \cos \alpha$ und $x = a \sqrt{(m+n)} = a \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha \sqrt{2n}$ setzen.

Wenn m und n Größen sind, deren Werth bekannt ist, so behält man die Formel $x = a\sqrt{m+n}$ bey, sollte aber der Werth von m und n schwer zu finden und z. B. $m = \frac{bc}{h} a$ und $n = \frac{fg}{h}$ seyn, so dann rechnet man lieber nach den hier aufgestellten Formeln, wovon man sich bald überzeugen wird.

2) Wenn $x = a. \sqrt{m-n}$, so muß $m > n$ seyn, wenn kein ungereimter Werth für x entstehen soll. Man gebe nun dieser Formel zuerst die Gestalt: $x = a. \sqrt{2m} \times \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{n}{m}\right)}$ setze wie vorhin $n = \cos \alpha$, so ist $x = a. \sqrt{2m} \times \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} = a. \sin \frac{1}{2}\alpha \times \sqrt{2m}$ nach §. 38. Nr. 24, wo $\sin \frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}}$ ist. Um daher $x = a. \sqrt{m-n}$ trigonometrisch aufzulösen, muß man zuerst den Winkel α aus der Formel $\cos \alpha = \frac{n \cdot r}{m}$ suchen, sodann α halbiren und $x = a. \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{r} \times \sqrt{2m}$ setzen.

3) Die Form $a\sqrt{m+n} = x = a\sqrt{m}.\sqrt{\left(1 \pm \frac{n}{m}\right)}$ läßt sich auf mehrerley Arten auflösen. Man setze z. B. $\frac{n}{m} = \text{tang}^2 \alpha$, nämlich $\text{tang}\, \alpha = \sqrt{\frac{n}{m}}$ weil es gewiß einen Tangenten gibt, der $= \sqrt{\frac{n}{m}}$ ist, so wird $x = a. \sqrt{m}. \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha} =$

$a \sqrt{m}$. sec $\alpha = \frac{a \sqrt{m}}{\cos \alpha}$ seyn. In $x = a\sqrt{(m+n)}$ sey daher $r.\sqrt{\frac{n}{m}} = \text{tang}\,\alpha$, so ist $x = \frac{r.\, a \sqrt{m}}{\cos \alpha}$.

Eben so läßt sich auch

4) die Form $x = a\sqrt{m - n} = \frac{a}{r}\sqrt{m}.\sqrt{r^2 - \frac{r^2 n}{m}}$ dadurch auflösen, wenn man $\frac{r.^2 n}{m} = \sin^2 \alpha$, nämlich $\sin \alpha = r.\sqrt{\frac{n}{m}}$ und $x = \frac{a}{r}\sqrt{m}.\sqrt{r^2 - \sin^2 \alpha} = \frac{a}{r}\sqrt{m}.\cos \alpha = \frac{a.\cos \alpha.}{r}\sqrt{m}$ setzt.

5) Wenn die Formel $x = a.\sqrt{\frac{bc + fg}{h}}$ statt $x = a\sqrt{m + n}$ gegeben ist, so setzt man $m = \frac{bc}{h}$ und $n = \frac{fg}{h}$ sodann ist $\frac{n}{m} = \frac{fg}{bc}$, $\text{tang}\,\alpha = r.\sqrt{\frac{fg}{bc}}$ und $x = \frac{r.}{\cos \alpha}\cdot\frac{a}{}\sqrt{\frac{bc}{h}}$ nach Nr. 3.

6) Ist die Formel $x = a.\sqrt{\frac{bc - fg}{h}}$ vorgelegt, so wird $\sin \alpha = r.\sqrt{\frac{fg}{bc}}$ und $x = \frac{a.\cos \alpha.}{r}\sqrt{\frac{bc}{h}}$ gesetzt, nach Nr. 4.

Beyspiel.

$$x = 182{,}13\sqrt{\frac{73{,}430 \times 5{,}7065 - 182{,}13}{365{,}23}}$$

wo $Lb = 1{,}8658735$ } 47

$Lc = 0{,}7563698$

$Lbc = 2{,}6222480$

$Lfg = 2{,}2603815 = L\ 182{,}13$;

$L\frac{fg}{bc} = 0{,}6381335 - 1$ wovon die Hälfte =

$L\sqrt{\frac{fg}{bc}} = 0{,}8195667 - 1$ und

$Log\ sin\ \alpha = 9{,}8195667$ und $\alpha = 41^{\circ}.\ 18'\ 9''$

$L\ h = 2{,}5625664$

$L\frac{bc}{h} = 0{,}0596816$

$L\sqrt{\frac{bc}{h}} = 0{,}0298408$

$La = 2{,}2603815$

$L\ cos\ \alpha = 9{,}8757927$

$- \quad 166$

$L\ x = 2{,}1659984$ und $x = 146{,}554$.

$985{,}8$

126

II. Bekanntlich ist (§. 216. X. des ersten Bandes der Math.) in der Gleichung

$$mx^2 + ax + b = 0$$

der Werth von $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4mb}}{2m}$ oder

$$x = \frac{-a}{2m}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4mb}{a^2}}\right) \text{ oder}$$

$$x = \frac{-a}{2mr}\left(r \mp \sqrt{r^2 - \frac{4mb \cdot r^2}{a^2}}\right)$$

1) Man setze $\frac{4mbr^2}{a^2} = \sin^2 \alpha$, nämlich

$\sin \alpha = \frac{2r}{a}\sqrt{mb}$, so ist

$$x = \frac{-a}{2mr}\left[r \mp \sqrt{r^2 - \sin^2 \alpha}\right] \text{ oder}$$

$$x = \frac{-a}{2mr}\left[r \mp \cos \alpha\right] \text{ und weil}$$

(nach §. 38. Nr. 23 und 24) $r - \cos \alpha = \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{r}$

und $r + \cos \alpha = \frac{2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{r}$, so ist

$$x = \frac{-a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{mr^2} \text{ und der zweyte Werth}$$

$$x = \frac{-a \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{mr^2}$$

2) In $mx^2 - ax + b = 0$, ist

$$x = \frac{+a \pm \sqrt{a^2 - 4mb}}{2m} \text{ oder}$$

$$x = \frac{+a}{2mr}\left(r \pm \sqrt{r^2 - \frac{4mbr^2}{a^2}}\right)$$

Man setze, wie vorher, $\frac{4mbr^2}{a^2} = \sin^2 \alpha$, nämlich

$\sin \alpha = \frac{2r\sqrt{mb}}{a}$, so ist

$$x = \frac{+a}{2mr}\left(r \pm \sqrt{r^2 - \sin^2 \alpha}\right) \text{ oder}$$

$$x = \frac{a}{2mr}\left(r \pm \cos \alpha\right) \text{ und der eine Werth von}$$

$$x = \frac{+a \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{mr^2} \text{ und der andere Werth}$$

$$x = \frac{+\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{m \cdot r^2}$$

3) Nach §. 38. Nr. 65. ist

$$\text{tang}^2 \tfrac{\alpha}{2} - \frac{2r^2 \cdot \text{tang} \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} + r^2 = 0.$$

Hier mag man nun für α jede beliebige Zahl Grade setzen, so wird allezeit diese Gleichung uns auf Null führen. Und gesetzt, es wäre die Gleichung

$$z^2 - \frac{2.\ z}{0{,}8944} + 1 = 0$$

vorgelegt, so wird auch, weil $0{,}8944 = \sin 63° 26'$ und $\alpha = 63° 26'$ ist,

$$z^2 - \frac{2z}{\sin 63°26'} + 1 = 0$$

und $z = \text{tang } \frac{1}{2}\alpha = \text{tang } \frac{1}{2}(63° 26') = \text{tang } 31° 43' = 0{,}6180$ seyn, indem sodann wie oben $\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha} + 1 = 0$ beym Werthe $r = 1$ ist.

Auf dieselbe Art können wir nun auch die Gleichung $mx^2 - ax + b = 0$ auflösen, wenn wir

$$x = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\alpha . \sqrt{bm}}{r \qquad m}$$

setzen und diesen Werth in $mx^2 - ax + b = 0$ substituiren, wodurch wir erhalten

$$\frac{m. \text{ tang}^2 \frac{1}{2}\alpha \times mb}{m^2 r^2} - \frac{a \text{ tang } \frac{1}{2}\alpha . \sqrt{bm}}{m. r} + b = 0$$

und wenn alle Glieder durch $\frac{r^2}{b}$ multiplicirt worden, so ist

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2r^2. \text{ tang } \frac{1}{2}\alpha}{\frac{2r. \sqrt{bm}}{a}} + r^2 = 0$$

Jetzt setze man $\frac{2r. \sqrt{bm}}{a} = \sin \alpha$, so ist richtig $\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2r^2 \text{ tang } \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha} + r^2 = 0$ und $x = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\alpha}{r} . \frac{\sqrt{bm}}{m}$, wie vorhin.

Es ist aber auch $\frac{2r. \sqrt{bm}}{a} = \sin (180 - \alpha)$, wird nun $180 - \alpha$ statt α gesetzt, so ist $\frac{1}{2}\alpha = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ und $\text{tang } \frac{1}{2}\alpha = \text{tang } (90 - \frac{1}{2}\alpha) = \cot \frac{1}{2}\alpha$, daher auch

$x = \frac{\cot \frac{1}{2}\alpha}{r} \cdot \frac{\sqrt{bm}}{m}$ welches ein zweyter Werth von x ist.

4) Denkt man sich in

$$mx - ax + b = 0$$

die Größe x negativ, so erhält man die Gleichung

$$mx^2 - ax + b = 0,$$

worin nun ein Werth von

$x = \frac{-\tang \frac{1}{2}\alpha}{r} \cdot \frac{\sqrt{bm}}{m}$ und der andere Werth $x = \frac{-\cot \frac{1}{2}\alpha}{r} \cdot \frac{\sqrt{bm}}{m}$, weil jetzt die vorigen Werthe von x ebenfalls negativ werden.

$\sin \alpha = \frac{2r \sqrt{bm}}{a}$ bleibt aber wie vorher.

5) Nach §. 38. Nr. 63. ist

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{2r^2 \tang \frac{1}{2}\alpha}{\tang \alpha} - r^2 = 0,$$

wo man statt $\tang \alpha$ jeden beliebigen Werth setzen kann und allemal eine Form $z^2 + \frac{2r^2 z}{\tang \alpha} - r^2 = 0$ wird, wenn $z = \tang \frac{1}{2}\alpha$ gesetzt wird. Wenn wir daher den Werth für $\tang \alpha$ zu einer quadratischen Gleichung $z^2 + \frac{2r^2 z}{\tang \alpha} - r^2 = 0$ kennen, so ist alsdann gewiß $z = \tang \frac{1}{2}\alpha$.

Um nun eine vorgelegte Gleichung von der Gestalt $mx^2 + ax - b = 0$ oder

$$x^2 + \frac{ax}{m} - \frac{b}{m} = 0$$

zu lösen, setze man $x = \frac{\tang \frac{1}{2}\alpha}{r} \cdot \frac{\sqrt{bm}}{m}$, so ist

$$\frac{\tang^2 \frac{1}{2}\alpha}{r^2} \cdot \frac{b}{m} + \frac{\tang \frac{1}{2}\alpha}{r} \times \frac{a\sqrt{bm}}{m^2} - \frac{b}{m} = 0$$

oder $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{2 \cdot \tang \frac{1}{2}\alpha \times r^2}{\frac{2r\sqrt{mb}}{a}} - r^2 = 0$

Nun setze man $\frac{2r.\sqrt{mb}}{a} = \text{tang } \alpha$, so ist richtig $\text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{2.r^2.\text{tang } \frac{1}{2}\alpha^2}{\text{tang } \alpha} - r^2 = 0$, wie anfangs und es ist daher in

$$mx^2 + ax - b = 0$$

der Werth von $x = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.m}$.

Es ist aber auch $\frac{2r.\sqrt{mb}}{a} = \text{tang } (180 - \alpha)$, wird nun $180 - \alpha$ statt α gesetzt, so ist der zweyte Werth von

$$x = \frac{\text{tang } (180 - \alpha)}{2} \times \frac{\sqrt{bm}}{m.r} \text{ oder}$$

$$x = \text{tang } (90 - \tfrac{1}{2}\alpha).\frac{\sqrt{bm}}{rm} \text{ oder}$$

$$x = \frac{\text{cot } \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.m}$$

6) Wird in den vorigen Formen die Größe x negativ gesetzt, so erhalten wir die Gleichung

$$mx^2 - ax - b = 0,$$

worin, wenn $\frac{2r.\sqrt{mb}}{a} = \text{tang } \alpha$ ist, der eine Werth $x = \frac{-\text{tang } \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.m}$

und der andere Werth von

$$x = \frac{-\text{cot } \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.m}.$$

7) Wir wollen nun die erhaltenen Resultate in eine Tafel bringen.

A) In $mx^2 + ax - b = 0$, setze man $\frac{2r.\sqrt{mb}}{a} = \text{tang } \alpha$; so ist

erstlich $x = \frac{+\text{tang } \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.m}$ und

zweytens $x = \frac{+\text{cot } \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.m}$

B) In $mx^2 \pm ax + b = o$, setze man $\frac{2r.\sqrt{mb}}{a} = \sin \alpha$, so ist

erstens

$$x = \frac{\mp a.\ \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{m.\ r^2} = \frac{\mp \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.\ m}$$

zweitens

$$x = \frac{\mp a.\ \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{m.\ r^2} = \frac{\mp \cot \frac{1}{2}\alpha.\sqrt{bm}}{r.\ m},$$

wo, wenn in der vorgelegten Form das Mittelglied $\pm ax$ positiv oder negativ ist, sodann der Werth von x ein verkehrtes Zeichen annimmt.

Beyspiel. Es sey die Gleichung

$$7x^2 - 31{,}476\ x + 24{,}876 = o$$

vorgelegt, so ist hier $m = 7$; und (nach der Formel B) $a = 31{,}476$ (wo das untere Zeichen gilt) und $b = 24{,}876$;

$mb = 174{,}132$;

Log mb = 2,2408786

Lr $\sqrt{mb}$ = 1,1204393 }

L $\frac{1}{2}$ a = 1,1969595 } subtr.

L sin α = 9,9234898, wo

$\alpha = 56° 58' 45''$ und

$\frac{1}{2}\alpha = 28° 29' 22'',4$

L. tang $\frac{1}{2}\alpha$ = 9,7344631 }

1125 }

L mb = 1,1204393

D. E. Lm = 1,1549020

Lx = 0,0099169, wo

$x = 1{,}023091$ und der zweyte Werth

$x_1 = 3{,}473481$.

III. Auflösung der höhren kubischen Gleichung.

Nach §. 38. Nr. 75. ist, wenn $r = 1$ gesetzt wird,

1) $\sin^3 \frac{1}{3}\alpha - \frac{3}{4}\sin \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{4}\sin \alpha = o$.

Durch Hilfe dieser Formel können wir nun auch eine höhere kubische Gleichung von der Gestalt

$$x^3 - px + q = 0$$

auflösen, weil es hier bloß darauf ankommt, diese Gleichung so zu verwandeln, daß sie mit der ersten gleiche Gestalt hat. Man setze daher

$x = m \cdot \sin \frac{1}{3}\alpha$, so ist

$m^3 \sin^3 \frac{1}{3}\alpha - mp \sin \frac{1}{3}\alpha + q = 0$ und demnach 2) auch $\sin^3 \frac{1}{3}\alpha - \frac{p}{m^2} \sin \frac{1}{3}\alpha + \frac{q}{m^3} = 0$.

Wenn nun $\frac{p}{m^2} = +\frac{3}{4}$ und $\frac{q}{m^3} = \frac{1}{4} \sin \alpha$ ist, so hat die Gleichung 2 mit 1 vollkommen einerley Gestalt. Es folgt aber aus $p = \frac{3m^2}{4}$ der Werth von $m = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ und aus $\frac{q}{m^3} = \frac{1}{4} \sin \alpha$ der Werth

$$\sin \alpha = \frac{4q}{m^3} = \frac{q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}} = \frac{1}{\frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}}$$

und indem die Größe r wieder eingeführt wird,

$$\sin \alpha = \frac{r}{\frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}};$$

wenn man daher diese letzte Formel in der Sinustafel nachschlägt, den dazu gehörigen Winkel α durch 3 dividirt, so ist in $x^3 - px + q = 0$ die unbekannte Größe $x = \frac{m \cdot \sin \frac{1}{3}\alpha}{r} =$

$$\frac{\sin \frac{1}{3}\alpha \cdot 2}{r}\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Um den zweyten Werth von x zu finden, muß man sich erinnern, daß $\sin \alpha = \sin (180 - \alpha)$ ist, wenn man nun $180 - \alpha$ statt α setzt, so ist zweytens $x = \sin (60 - \frac{1}{3}\alpha) \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}$.

Um den dritten Werth zu finden, darf man nur, wie aus kubischen Gleichungen bekannt ist, die ersten beyden Werthe addiren und ihre Summe negativ setzen. Es ist aber

$\sin (60 - \frac{1}{3}\alpha) + \sin \frac{1}{3}\alpha = \sin (60 + \frac{1}{3}\alpha)$

nach §. 38. daher drittens $x = -\sin (60 + \frac{1}{3}\alpha)$.

$2\sqrt{\frac{p}{3}}$

Zu $x^3 - px - q = 0$ gehören, wenn

$\frac{r}{\frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{p}{3}}} = \sin \alpha$ gesetzt wird, folgende drey Werthe

$$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{\sin \frac{1}{3}\alpha}{r};$$

$$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \sin (60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha) \text{ und}$$

$$x = +2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \sin (60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha);$$

denn wenn hier x negativ gesetzt wird, so kommt die vorher vorgelegte Gleichung

$-x^3 + px - q = 0$ oder

$+x^3 - px + q = 0$ zum Vorschein.

3) Wenn entweder p negativ oder $\frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}} < 1$, so kann die Berechnung der Größe x auf diesem Wege geschehen, wie vor Augen liegt. Man setze daher in

$x^3 + px + q = 0$,

den Werth von $x = y + \frac{1}{3} p \cdot y^{-1}$, so ist

$y^3 + q - (\frac{1}{3} p)^3 \cdot y^{-3} = 0$ und (wenn $y^3 = z$ nämlich $y = \sqrt[3]{z}$ gesetzt wird)

$z + q - (\frac{1}{3} p)^3 \cdot z^{-1} = 0$, (und mit z alle Glieder multiplicirt).

$z^2 + qz - (\frac{1}{3} p)^3 = 0$.

Um aus dieser quadratischen Gleichung z zu entwickeln, setze man (wie in II, Nr. 7. A)

$\frac{2 \cdot r\sqrt{(\frac{1}{3} p)^3}}{q} = \text{tang } \alpha$, so ist

$z = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{r}$ und

$$y = \sqrt[3]{z} = \sqrt{\tfrac{1}{3}p} \cdot \sqrt[3]{\frac{\tang \frac{1}{2}\alpha}{r}} \text{ und}$$

$$x = y - \frac{\frac{1}{3}p}{q} = \sqrt{\tfrac{1}{3}p} \times \left[\sqrt[3]{\tang \tfrac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{\sqrt[3]{\tang \frac{1}{2}\alpha}}\right]$$

Man setze $\sqrt[3]{\tang \frac{1}{2}\alpha} = \tang \delta$, so ist weil (nach §. 38. Nr. 54.) $\tang \beta - \frac{1}{\tang \beta} = -2\cot \beta$ ist,

$$x = -2 \cdot \cot 2\delta \cdot \sqrt{\tfrac{1}{3}p}$$

Wenn $x^3 + px - q = 0$, so ist $x = +2\cot 2\beta \times \sqrt{\frac{1}{3}p}$. Denn wenn hier x negativ ist, so kömmt die vorige Gleichung $x^3 + px + q = 0$ zum Vorschein

Es dient daher zur Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 + px \pm q = 0$ folgende Regel: Man setze $\frac{r \cdot p}{3q} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \tang \alpha$ und

$\sqrt[3]{r^2} \cdot \tang \alpha = \tang \beta$, so ist

$$x = \pm \frac{\cot 2\beta}{r} \times 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

wo man die nöthige Verbindungen mit r beygefügt hat.

4) Wenn die Gleichung $x^3 - px + q = 0$ gegeben so ist $x = y + \frac{\frac{1}{3}p}{y}$;

$$y^3 + q + \frac{(\frac{1}{3}p)^3}{y^3} = 0$$

und wenn $y^3 = z$ oder $y = \sqrt[3]{z}$: so ist

$$z^2 + qz + (\tfrac{1}{3}p)^3 = 0,$$

wo, wenn (nach II. Nr. 7. B.) $\frac{2r}{q}\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3} = \sin \alpha$ gesetzt wird, $z = -\tang \frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}$ und

$$y = \sqrt[3]{\ } \cdot \left[-\tang \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{(\tfrac{1}{3}p)^3}\right] \text{ oder}$$

$$y = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \times \sqrt[3]{\tang \tfrac{1}{2}\alpha} \text{ und}$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \times \left[\sqrt[3]{\tan\tfrac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{\sqrt[3]{\tan\tfrac{1}{2}\alpha}}\right]$$

Man setze $\sqrt[3]{\tan\frac{1}{2}\alpha} = \tan\beta$, so ist, weil $\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta} = \frac{2}{\sin 2\beta}$ ist, der Werth

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}p} \times \frac{2}{\sin 2\beta}.$$

Ist demnach die Gleichung $x^3 - px \pm q = 0$ vorgelegt, so setzt man

$$\frac{r.\ p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \sin\alpha \text{ und}$$

$\sqrt[3]{r^2 \tan\frac{1}{2}\alpha} = \tan\beta$, sodann ist

$$x = \mp \frac{r.\ 2}{\sin 2\beta}\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Ist aber $\frac{p}{3q}.2\sqrt{\frac{p}{3}} = \sin\alpha$ größer als 1, so muß man von den in Nr. 2 angeführten Formeln Gebrauch machen.

In folgender Tafel sind alle Fälle zusammen gestellt, welche bey Auflösung der kubischen Gleichung vorkommen können.

3) Tafel zur Auflösung der kubischen Gleichungen.

A) Wenn $x^3 \mp px \pm q = 0$ vorgelegt ist, so setze man $\frac{r.\ p}{q.\ 3} \times 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \tan\alpha$ und

$\sqrt[3]{r^2.\ \tan\frac{1}{2}\alpha} = \tan\beta$, dann ist

$$x = -\mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{\cot 2\beta}{r}$$

die beyden andern Werthe sind ungereimt.

B) Wenn $x^3 - px \pm q = 0$ vorgelegt ist, so kömmt es darauf an, ob $\frac{p}{3q}.2\sqrt{\frac{p}{3}}$ kleiner oder größer als 1, oder dessen Logarithmus kleiner oder größer als 0 ist.

Im ersten Falle setze man

$$\frac{r.\,p}{3\,q} \times 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \sin\alpha \text{ und}$$

$\sqrt[3]{r^2}.\ \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha = \text{tang}\,\beta$, so ist

$$x = \mp \frac{r.}{\sin 2\beta} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Die andern beyden Werthe finden nicht Statt.

Im zweyten Falle setze man

$$\frac{r}{\frac{p}{3p} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}} = \sin\alpha, \text{ so ist}$$

erstens $x = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{\sin\frac{1}{3}\alpha}{r}$;

zweytens $x = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{\sin(60° - \frac{1}{3}\alpha)}{r}$ und

drittens $x = \mp 2\sqrt{\frac{p}{3}} \times \frac{\sin(60° + \frac{1}{3}\alpha)}{r}$

Es sey z. B. die Gleichung

$$x^3 - 15x - 19 = 0$$

vorgelegt, so ist $p = 15$ und $q = 19$;

$L\frac{p}{3} = L5 =$	0,6989700
$L\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{1}{2} L5 =$	0,3494850
$L2 =$	0,3010300
$L2\sqrt{\frac{p}{3}} =$	0,6505150
$L\frac{p}{3} =$	0,6989700
D. E. $Lq =$	8,7212464
$L\frac{p}{3q} \cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}} =$	0,0797314

Da nun dieser letzte Logarithmus grösser als 0 ist, so muß der Werth von x nach den ganz letzten Formeln der Tafel berechnet werden. Man bringe

daher von Lr = 10 den $L\frac{p}{3q}$. $2\sqrt{\frac{p}{3}} = 0{,}0797314$

in Abzug, so erhält man Log sin $\alpha = L\frac{r}{\frac{p}{3q}\cdot 2\sqrt{\frac{p}{3}}}$

= 9,9292686, wo demnach

$\alpha = 58^\circ\ 10'\ 46''{,}9$ und $\frac{1}{3}\alpha = 19^\circ\ 23'\ 35''{,}6$;

L sin $(60 + \frac{1}{3}\alpha)$ = L sin $79^\circ\ 53'\ 35''6$ =

9,9925153;

$L\,2\sqrt{\frac{p}{3}} =$ 0,6505150 | add

Lx = 0,6430303 und

x = 4,395724.

Die übrigen beyden Werthe sind negativ.

6) Ist eine vollständige kubische Gleichung

$y^3 + ay^2 + by + c = 0$

gegeben, so setzt man bekanntlich

$y = x - \frac{1}{3}a$, sodann erhält man

$x^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)\,x + (c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3) = 0.$

Hier läßt sich nun der Werth von x nach den oben aufgestellten Formeln berechnen, wenn man $p = (b - \frac{1}{3}a^2)$ und

$q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$

setzt, wodurch man eine Gleichung von der Gestalt $x^3 \pm px \pm q = 0$ erhält.

Ist hieraus der Werth x bekannt, so ist sodann in der vorgelegten Gleichung

$y^3 + ay^2 + by + c = 0$

der Werth $y = x - \frac{1}{3}a$.

7) Auch zur kubischen Gleichung

$x^3 + ax^2 + c = 0$

kann man leicht Werthe für x angeben.

Denn man setze $x = \frac{1}{u}$, so ist

$\frac{1}{u^3} + \frac{a}{u^2} + c = 0$, oder

$1 + au + cu^3 = 0$ und

$$u^3 + \frac{au}{c} + \frac{1}{c} = 0,$$

zu welcher Formel wir auf dieselbe Art ein Werth für u angeben könnten, wie wir vorher zur Formel $x^3 + px + q = 0$ einen Werth für x angegeben haben. Ist ein Werth für $u = \frac{x}{y}$ gefunden, so ist in der vorgelegten Gleichung der Werth $x = \frac{y}{x}$.

Wir erhalten nach dieser Behandlung folgende Resultate.

A) In $x^3 \pm ax^2 \pm c = 0$ setze man

$$\frac{ra}{3} : \sqrt{\frac{3c}{4a}} = \text{tang } \alpha \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{r^2 \cdot \text{tang } \tfrac{1}{2}\alpha} = \text{tang } \beta, \text{ so ist}$$

$$x = \mp \frac{r}{\cot 2\beta} \times \sqrt{\frac{3c}{4a}}.$$

Die übrigen beyden Werthe finden nicht Statt.

B) In $x^3 + ax \mp c = 0$ wird zuvor untersucht, ob $\frac{a}{3} : \sqrt{\frac{3c}{4a}} = m$ kleiner oder größer als 1, oder dessen Logarithmus kleiner oder größer als 0 ist.

Im ersten Falle setze man

$$r \cdot m = \sin \alpha \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{r^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2}\alpha} = \text{tang } \beta, \text{ sodann ist}$$

$$x = \mp \frac{\sin 2\beta}{r} \sqrt{\frac{3c}{4a}}.$$

Die andern beyden Werthe sind abwesend.

Im zweyten Falle setze man

$$\frac{r}{m} = \sin \alpha, \text{ sodann ist}$$

erstens $x = \mp \frac{r}{\sin \frac{1}{3}\alpha} \times \sqrt{\frac{3c}{4a}}$;

zweytens $x = \mp \frac{r}{\sin(60^\circ - \frac{1}{3}\alpha)} \times \sqrt{\frac{3c}{4a}}$ und

drittens $x = \pm \frac{r^1}{\sin(60° + \frac{1}{3}\alpha)} \times \sqrt{\frac{3c}{4a}} =$ der negirten Summe der zwey ersten Werthe.

§. 42.

Berechnung der Bögen und Flächen im Kreise.

Fig. 119. I. Aufgabe. Die Länge z des Bogens IG Fig. 119. zu finden, wenn der Radius AI = AG = AE = a; AE ⊥ AI und die Abscisse AD = AG = HG = x gegeben ist.

Auflösung. Es sey AE = AK = AC = r; ∠ IAG = m°; FL = sin m° und Bogen FK = α; so ist AG : GH = AF : FL, oder

$$a : x = r : \sin m°, \text{ woher}$$

$$\sin m° = \frac{r}{a}, x.$$

Nun schlage man in der Sinustafel die Grade des Winkels KAF = m° nach und schlage nachher auch in einer andern Tafel (deren wir §. 39. XV. erwähnten) die Länge des Bogens FK = α nach, welche zum Radius AF = 1 und zum ∠ KAF gehört, so wird

IG = z = a. α seyn.

Beyspiel. AI = a = 24,83;
AD = HG = x = 19,64

Log. rx =	11,2931415	subtr.
Log a =	1,3949767	
Log sin m° =	9,8981648,	

wo m = 52° 16′ 37″,5.

Nun gehört

zu 52° die Länge des Bogens	0,907571	add.
zu 16′ — — —	0,004654	
= 37″ — — —	179	
= 0,5 — — —	2	

daher zu m° der Bogen α = 0,912406 = FK.

Man multiplicire α mit a nämlich mit 24,83, so erhält man IG = z = 22, 65504.

Be-

Beweis. Fig. 119.

Wenn (wie §. 39. X.) AF = r, der Bogen FK = α und FL = sin α = s gesetzt wird, so ist 1) die Länge des Bogens

$$\alpha = s + \frac{1.s^3}{2.3.r^2} + \frac{1.3.s^5}{2.4.5.r^4} + \frac{1.3.5.s^7}{2.4.6.7.r^6} + \text{&c.}$$

Eben so auch, wenn z statt α; x statt s und a statt r gesetzt wird,

$$2)\ z = x + \frac{1.x^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^6} + \text{&c.}$$

Man setze AG = a = nr, so ist, wegen

△ AFL ∽ △ AGH, auch x = ns.

Substituirt man nun diese Werthe für n und x in der Gleichung Nr. 2, so erhält man, nach gehöriger Reduktion

$$z = n.\left(s + \frac{1.s^3}{2.3.r^2} + \frac{1.3.s^5}{2.4.5.r^4} + \frac{1.3.5.s^7}{2.4.6.7.r^6} + \text{&c.}\right)$$

Da nun diese eingeklammerte Reihe = α, so ist auch z = nα; und wird hier r = 1 und demnach FL = $\frac{GH}{AG}$ nämlich

$$s = \frac{19,64}{24,83} = 0,790979$$

gesetzt, so erhält man, freylich etwas mühsam, für α den oben angezeigten Werth = 0,91246.

II. Folgesätze.

a) Da r : nr = α : nα

eine richtige Proportion ist, und vorhin r = AF; nr = a = AG; α = FK und nα = GI gesetzt worden ist, so verhält sich auch

AF : AG = FK : GI oder

AF : FK = AG : GI,

und es stehen Bögen FK und GI, welche zu einem gleichen Winkel IAG = KAF gehören, mit den zugehörigen Radien AF und AG im Verhältnisse.

Diesen Satz kann man auch auf folgende Art beweisen.

Fig. 120. Es sey ACD Fig. 120. ein Winkel von E Graden, ILMNH und ADEFG aus C beschriebene Vollkreise von 360 Graden; ferner sey der ∠ ACB ausserordentlich klein und z. B. der millionte oder mte Theil des Winkels ACD, nämlich ∠ ACB oder ∠ ICK $= \frac{1}{m}$ ∠ ACD oder $\frac{1}{m}$ ∠ ICL; so wird auch AB $= \frac{1}{m}$ AD und IK $= \frac{1}{m}$ IL seyn und mithin folgende Proportion Statt finden:

IK : AB = IL : AD.

Wenn aber ∠ ACB unendlich klein ist, so läuft IK zu AB parallel und es ist △ ICK ∞ △ ACB; daher auch CI : IK = CA : AB oder

IK : AB = CI : CA.

Da nun die linke Seite dieser und der vorigen Proportion gleich, so ist auch

CI : CA = IL : AD,

welches zu beweisen war.

2) Aus dieser Proportion folgt ferner, daß auch

CI : CA = ILM : ADE;
CI : CA = ILMN : ADEF und
CI : CA = ILMNHI : ADEFGA ist.

Da NI = 2CI und FA = 2CA und

CI : CA = 2.CI : 2CA = NI : FA ist, so ist auch

NI : FA = ILMNHI : ADEFGA seyn.

Man setze CI oder CM = 1, so ist der Halbkreis MNH = π = 3,14159 nach §. 39. XII. und XIV. und demnach der Vollkreis ILMNHI = 2π. Ferner sey der Radius CA = r und der zugehörige Vollkreis ADEFGA = p so ist, weil

CI : ILMNH = CA : ADEEGA oder
1 : 2π = r : p ist, auch

$$p = 2r\pi \text{ und } r = \frac{p}{2\pi}.$$

Nun sey der Durchmesser FA = d, so ist d = 2r und p = d. π, woher auch $d = \frac{p}{\pi}$.

Hieraus entspringen nun die Wahrheiten: Fig. 120.

a) die Peripherie eines Kreises ADEFGA = p wird gefunden, wenn man den Radius r mit 2π nämlich mit 6,283185 oder den Durchmesser d mit 3,141593 multiplicirt.

Da auch $r = \frac{p}{2\pi}$ und $d = \frac{p}{\pi}$, so wird b) aus der Peripherie p der Radius r gefunden, wenn man die Peripherie durch 6,283185 dividirt oder durch 0,159155 multiplicirt, weil $r = p \times \frac{1}{2\pi}$ und $\frac{1}{2\pi} =$ 0,159155 ist.

Eben so wird aus der Peripherie p der Durchmesser d gefunden, wenn man p durch π nämlich durch 3,141592 dividirt, oder p mit 0,318310 multiplicirt; weil $d = p \cdot \frac{1}{\pi}$ und $\frac{1}{3,14159} =$ 0,31831 ist.

c) Die Peripherien ILMNH und ADEFG stehen mit den zugehörigen Radien CI und CA oder Durchmessern NI und FA im Verhältnisse, wie schon oben dargethan worden ist.

3) Ist Fig. 119. zum Bogen EG der Radius AE und Tangent EM gegeben, so ist nach §. 39. XI. der Bogen Fig. 119.

$$EG = EM \times \left[1 - \frac{EM^2}{3AE^2} + \frac{EM^4}{5AE^4} - \frac{EM^6}{7AE^6} + - \right].$$

Es sey der $\angle$ MAE = m°; FC = α; AC = AF = r; CN = tang m°; so ist

AE : EM = AC : CN, nämlich

AE : EM = r : tang m, wo

$$\text{tang } m = \frac{r \cdot EM}{AE}.$$

Schlägt man nun zu diesem Tangenten den Winkel m und zu diesem Winkel den Bogen CF = α (dessen Radius = 1 ist) nach, und multiplicirt man die Länge des Bogens CF mit AE, so erhält man ebenfalls auch den Bogen EG, weil AC : CF = AE : EG oder 1 : α = AE : EG, und demnach EG = α. AE ist.

Fig. 120. III. Lehrsatz. Setzen wir Fig. 120. die Fläche eines Kreises ADEFGA = f, den Radius CA = r; den Durchmesser FA = d und die Länge des Umkreises ADEFGA = p; so ist

$$f = r^2 . \pi;$$

$$f = \frac{d^2 . \pi}{4} \text{ und}$$

$$f = \frac{p^2}{4\pi}.$$

Beweis. Man ziehe aus dem Mittelpunkte C zwey höchst nahe aneinander liegende Radien CA und CB, kann nun AB im ganzen Umkreise m mal oder millionenmal fortgetragen werden, so ist auch das Dreyeck ACB in der ganzen Kreisfläche ABDEFGA mmal oder millionmal enthalten und es ist $AB = \frac{1}{m} p$ und $\Delta ACB = \frac{1}{m} . f$ und $f = m \times \Delta ACB$. Da nun die Fläche des Dreyeckes $ABC = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{1}{m} p \times \frac{r}{2} = \frac{rp}{2m}$ und $f = m \times \Delta ACB$ ist; so wird auch $f = \frac{m \times rp}{2m} = \frac{rp}{2}$ seyn.

In dieser Gleichung

$$f = \frac{rp}{2}$$

substituire man den (weiter oben) für p gefundenen Werth $= 2r\pi$, so erhält man $f = \frac{r . 2r\pi}{2} = r^2 \pi$.

Ferner substituire man in $f = \frac{rp}{2}$ den Werth für $r = \frac{d}{2}$ und $p = d . \pi$; so erhält man $f = \frac{d}{2} . \frac{d\pi}{2} = \frac{d^2 . \pi}{4}$. Und endlich setze man in

$f = \frac{rp}{2}$ den Werth für $r = \frac{p}{2\pi}$, so findet man Fig. 102.

$$f = \frac{p}{2\pi} \times \frac{p}{2} = \frac{p^2}{4\pi}.$$

Zusatz. Ist r oder d oder p in Zollen gegeben, so erhält man f in □ Zollen, und ist r; d oder p in Fußen ausgedrückt, so erhält man f in □ Fußen. Rechnet man 12 Zolle auf den Fuß, so muß man 144 □ Zolle auf den □ Fuß rechnen, wie bekannt. Meistentheils ist der Durchmesser d oder die Peripherie p in Zollen gegeben und man verlangt die Fläche f in □ Fußen und Decimaltheile ausgedrückt. In diesem Falle muß man die obige Formeln für f durch 144 dividiren und die damit verbundenen Brüche nach Kap. XI. des ersten Theils verwandeln. Als

1) $f = \frac{d^2 \cdot \pi}{4 \cdot 144} = \frac{d^2 \cdot 3{,}14159}{576} = \frac{d^2}{100} \times \frac{314{,}159}{576} = \frac{d^2}{100} \cdot \frac{6}{11} = \frac{d^2}{100} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{22}\right) = \frac{d^2}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{d^2}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11}$. wo wenn das Resultat der Form $\frac{d^2}{100} \cdot \frac{1}{2} = A$ gesetzt wird, sodann

$$f = A + \frac{A}{11}.$$

2) $f = \frac{p^2}{4\pi \cdot 144} = \frac{p^2}{1809{,}557} = \frac{p^2}{1000} \times \frac{1000}{189{,}557} = \frac{p^2}{1000} \times \frac{21}{38} = \frac{p^2}{1000} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{19}\right)$.

Man setze $\frac{p^2}{1000} = B$, so ist $f = B\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{19}\right)$

oder $f = \frac{1}{2} B + \frac{1}{19} B$.

Beyspiele.

1) Es sey $d = 37$ Zolle, so ist (nach §. 54. Nr. 8. des B. I.) $d^2 = (37 + 3) \times (37 - 3) + 3^2$

Fig. 120. $34.40 + 9 = 1369$; $\frac{d^2}{100} = 13,69$;

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{100} = 6,845$$

$$\frac{A}{11} \cdot \cdot = 0,622$$

$$f = 7,467 \square F.$$

2) Es sey $p = 78$ Zolle, so ist $p^2 = 76\,80 + 4$

und $\frac{p^2}{1000} = 6,084 = B$

$$\frac{1}{2} B = 3,042$$

$$\frac{1}{10} B = 0,320$$

$$f = 3,362 \square F.$$

IV. Aufgabe. Die Fläche eines Kreises ist $= a \square F$, man fragt, wie groß der Durchmesser d und Peripherie p in Zollen sey.

Auflösung. Hier steht a statt f, es ist daher wie vorhin, f oder jetzt

$$a = \frac{d^2 \times 3,14159}{576} = \frac{d^2}{183,3465} \text{ und}$$

$$a = \frac{p^2}{4.\pi.144} = \frac{p^2}{1809,557}.$$

Entwickelt man nun aus diesen beyden Gleichungen den Werth d und p, so erhält man Formeln, durch welche man aus der gegebenen Fläche $= a \square F$ den zugehörigen Durchmesser d und die Peripherie p in Zollen berechnen kann. Als

$$d = \sqrt{183,3465 \times a} \text{ und}$$

$$p = \sqrt{1809,557 \times a}, \text{ wo}$$

$$\text{Log } d = 1,1316363 + \tfrac{1}{2} \text{ La und}$$

$$\text{Log } p = 1,6287862 + \tfrac{1}{2} \text{ La.}$$

Es sey z. B. $a = 1$, so ist Log d $= 1,1316363$ und Log p $= 1,6287862$ woher $d = 13,54$ Zolle und $p = 42,54$ Zolle. Man muß daher den Durchmesser eines Kreises $= 13,54$ Zolle oder die Peripherie desselben $= 42,54$ Zolle machen, wenn die Kreisfläche a gerade 1 $\square F$. enthalten soll.

Es sey ferner $a = 0,1$, so ist La $= -1$

und $\frac{1}{2}$ La = 0,5000000 — 1; Ld = 0,6316363 und Lp = 1,1287862, wo d = 4,28 und p = 13,45 Z.

Es sey a = 1,8, so ist $\frac{1}{2}$ La = 0,1276362;
+ 1,1316363
Log d = 1,2592725;
$\frac{1}{2}$ La = 0,1276362;
+ 1,6287862
Lp = 1,7564224,

wo d = 18,17 und p = 57,07 Zolle. Eben so kann man ferner nach der Ordnung a = 0,01; = 0,02; 0,03 ꝛc. 0,09; a = 0,1; = 0,2; 0,3 bis 0,9; a = 1,0; = 1,1; 1,2 ꝛc. bis 1,9; 2,0; 2,1 ꝛc. bis a = 20,0 setzen, und hierzu die Durchmesser und Peripherien berechnen und die Resultate für d und p in eine Tafel zusammen tragen. Eine solche Tafel und mehrere dergleichen findet man in Hoßfelds praktischen Stereometrie (Leipzig in der Wiedemannschen Buchhandlung. Preis 3 fl. rhn.) und da dieß Buch fast alle besitzen, welche eine schnelle Uebersicht vom praktischen Messen der (Forstlichen) Körper erhalten wollen, so verweise ich auf dasselbe.

Anmerkungen. 1) Der Durchschnitt oder die Sternfläche der runden Hölzer ist meistens sehr nahe ein Kreis, und um die Stärke oder den Durchmesser der stehenden Hölzer zu messen, dazu bedient man sich eines besonderen Werkzeuges, welches man Klupe nennt. Es besteht dieß Instrument (nach der Beschreibung meiner praktischen Sternometrie)

a) aus einem viereckigen Bälkchen AB Fig. 121. an dessen einem Ende A ein anderes Bälkchen AC rechtwinklig auf AB fest eingestempt ist, und Fig. 121.

b) aus einer Hülse DE, worauf wieder ein anderes Bälkchen FG rechtwinklig eingefügt ist, so daß Hl und FG parallel laufen. Diese Hülse umschließt nur das Bälkchen AB an der Stelle DE, und läßt sich daran sanft hin- und her schieben, so daß die Entfernung HF oder KL der beyden parallelen Bälkchen größer und kleiner gemacht werden kann.

Fig. 121. Zwischen diesen Bälkchen HI und FG wird nun der Durchmesser KL eines Baumes oder Blocks gefaßt, und da aus dem Eckpunkt H auf HB lauter Zolle aufgetragen sind, so kann man in HF die Zahl der Zolle nachlesen, welche auf den Durchmesser KL kommen. Ferner hat man, wie oben gezeigt worden, die verschiedenen Durchmesser HB; HM; HQ; HF ꝛc. zu allerley Kreisflächen berechnet und diese ebenfalls aufs Bälkchen HB in P; M; Q; F; E; B nach der Länge aufgetragen, dergestalt, daß man z. B. in F die Zahl der Quadratfuße der Kreisfläche KMLN ohne weitere Rechnung angezeigt findet.

2) Das Spannenmaaß ist ein gegen 1 Zoll breites und 12 Fuß langes Band, gewöhnlich von Pergament *), womit man die Peripherien der Blöcke oder Bäume ummißt, und worauf man nicht nur die Zolle des Umfangs, sondern auch die verschiedenen Kreisflächen, als wozu man den Umfang berechnet hat, angezeigt findet, und es dient demnach ein solches Maaß dazu, die kreisförmige Durchschnittsfläche eines jeden Baumes durch Messen seines Umfangs augenblicklich und ohne weitere Rechnung, in □ Fußen ausgedrückt, zu erkennen. Am vordern Ende ist das Spannmaaß mit einem Pfriemen, Stachel oder Häkchen versehen, damit man dasselbe an irgend einer Stelle eines starken Baumes befestigen, und so das Band um den ganzen Baum herumführen kann. Das hintere Ende des Bandes ist mit einer Walze versehen, damit man das Band nach dem Gebrauche mittelst einer Kurbel auf die Walze wickeln, und das Ganze in einem Futterale von der Form eines kleinen Hohlcylinders verbergen kann.

*) Unkundige besorgen, ein Spannenmaaß von Pergament dehne oder zöge sich durchs Naß- und wieder Trockenwerden zusammen. Mein Maaß habe ich nun schon gegen 10 Jahre in allerley Wetter gebraucht und noch keine Veränderung der Länge bemerkt.

V. Lehrsatz. Die Fläche der Kreis-Ausschnitte CABDC und CADEC Fig. 120. steht mit den zugehörigen Winkeln ACD und ACE am Mittelpunkte C oder mit den zugehörigen Bögen IL und ILM, oder mit den Grenzbögen AD und ADE im Verhältnisse, und zwar ist Ausschnitt CADC $= \frac{AD \times AC}{2}$ und Ausschnitt CADEC $=$ ADC $\times$ AC. Fig. 120.

Eben so verhält sich auch der ganze Kreis ILMNHI von 360 Graden zu den Graden des Winkels ACD, wie die ganze Kreisfläche CADEFGAC zur Fläche des Ausschnittes CADC.

Beweis. Wenn AB in AD mmal und in ADE nmal liegt, so ist auch die Fläche des Dreyeckes CAB, welche wir $=$ u setzen wollen, in der Fläche des Ausschnittes ACD mmal und im Ausschnitte ADEC nmal enthalten, und demnach ADC $=$ mu und ADEC $=$ nu.

Man setze nun AB $=$ e und AC $=$ a; so ist AD $=$ me und ADE $=$ ne; und ADE $=$ ne; $\triangle$ ACB $= u = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{e.a}{2}$; Ausschnitt ADC $= m.u = \frac{me.a}{2} = \frac{me \times a}{2} = \frac{AD \times AC}{2}$ $= \frac{AD \times DC}{2}$ und Ausschnitt ADEC $= n.u = \frac{ne.a}{2} = \frac{ADE \times CD}{2}$.

Nun ist die Proportion identisch richtig:

$$ADC : ADEC = \frac{AD \times DC}{2} : \frac{ADE \times DC}{2},$$

worin sich die gemeinschaftlichen Faktoren $\frac{DC}{2}$ in beyden letzten Gliedern heben, daher auch

ADC : ADEC $=$ AD : ADE

Da nun AD : ADE $=$ L ACD : L ACE $=$ IL : ILM; so wird auch seyn:

ADC : ADEC = L ACD : L ACE und
ADE : ADEC = IL : ILM oder
IL : ILM = ADC : ADEC.

Da nun die Kreisausschnitte mit ihren Winkeln oder Bögen am Mittelpunkte im Verhältnisse stehen, so wird auch der Umkreis HNMLI von 360° zu L ICL sich verhalten, wie die ganze Kreisfläche ADEFG zur Fläche des Ausschnitts ACD.

Es sey der Winkel ACD = $\alpha°$ und der Radius AC = a, so ist die ganze Kreisfläche = $a^2 . \pi$ nach III. und es verhält sich

$360° : a^2\pi = \alpha° :$ Abschn. ADC, woher

$$ADC = \frac{a^2 \pi \times \alpha°}{360}.$$

Sucht man den Bogen AD aus der ganzen Peripherie ADEGH = $2a\pi$ nach II. durch die Proportion

ILMNHI : IL = ADEFGA : AD oder $360° : \alpha° = 2a\pi : AD$, so findet man $AD = \frac{2a\pi . \alpha}{360}$ und da auch Abschnitt $ADC = \frac{AD \times DC}{2}$, so wird auch

$$ADC = \frac{2a\pi.}{360.} \frac{a}{2} = \frac{a^2\pi\alpha}{360}$$

wie oben seyn.

Fig. 119. VI. Aufgabe. Zu einem Kreisausschnitte GAE Fig. 119. ist der Radius AG = AE = a und die Senkrechte GD = c gegeben, man soll die Fläche GAE berechnen.

Erste Auflösung. Man setze da L GAE = α, den Gleichmesser AF = AC = r oder = 1, so ist FB = sin α und es verhält sich

AG : GD = AF : FB, nämlich
a : c = r : sin α, woher

$$\sin \alpha = \frac{c . r}{a}$$

Nun schlage man zum Resultate dieser Formel in der Sinustafel den Winkel α nach, so wird man auch den zugehörigen Bogen FC dessen Radius AF = 1

ist, in der bekannten Bögentafel nachschlagen können. Fig. 119. Ist nun dieser Bogen FC nach seiner Länge α bekannt, so sucht man GE aus der Proportion AF : FC = AG : GE oder $1 : \alpha = a : GE$ wo nun $GE = a.\alpha$ und Abschnitt $AEG = \frac{GE \times EA}{2} = \frac{a.\alpha \times a}{2} = \frac{a^2.\alpha}{2}$.

Hier ist α nach seiner Länge ausgedrückt; bedeutet aber α die Grade des Winkels FAC oder Winkels GAE, so sucht man zuerst die ganze Kreisfläche $= a^2.\pi$ und stellt für den Ausschnitt GAE folgende Proportion an:

$360 : \alpha = a^2.\pi$: Abschn. AEG, wo

alsdann $AEG = \frac{a^2\pi.\alpha}{360} = \frac{a^2.\pi.\alpha}{2.180}$.

Zweyte Auflösung. Nach I. ist die Länge des Bogens $EG = z = c + \frac{1.c^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.c^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.c^7}{2.4.6.7.a^6} + \ldots$ oder

$$z = c \times \left[1 + \frac{1.c^2}{2.3.a^2} + \frac{1.3.c^4}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.c^6}{2.4.6.7.a^6} + \ldots\right],$$

wo hier nur c statt x steht, weil jetzt $c = GD$ der Sinus des Bogens GE ist.

Da nun Ausschnitt $AEG = \frac{AE \times EG}{2} = \frac{a.z}{2}$

ist, so wird auch

$$AEG = \frac{ac.}{2}\left[1 + \frac{1.c^2}{2.3a^2} + \frac{1.3.c}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.c^6}{2.4.6.7.a^6} + \ldots\right]$$ seyn. Ist nun GD gegen AE oder c gegen a sehr klein, so erhält man durch diese Formel sehr geschwind ein sicheres Resultat, in einem andern Falle ist aber diese Formel nicht gut zu gebrauchen.

VII. Aufgabe. Zu einem Kreisabschnitte GQE Fig. 119. ist die Sehne GQ und die Höhe oder Breite DE = h gegeben, man soll hieraus die Fläche f des Abschnittes GQE berechnen.

Erste Auflösung. Man setze die halbe Sehne GD = c und den Radius AE = a so ist nach §. 33. III. der Radius $AG = AE = (DG^2 + DE^2) : 2DE = \frac{c^2 + h^2}{2h} = a$ und $AD = AE - DE = \frac{c^2 + h^2}{2h} - h = \frac{c^2 - h^2}{2h}$.

Nun suche man durch Hilfe der Sinus den ∠ GAE und die Länge des zugehörigen Bogens FC = α; so ist, wie in VI., die Fläche des Ausschnittes $AEG = \frac{a^2 . \alpha}{2} = \left(\frac{c^2 + h^2}{2h}\right)^2 . \frac{\alpha}{2}$ Zieht man nun hiervon die Fläche des Dreyeckes $ADG = \frac{AD \times DG}{2} = \frac{(c^2 - h^2)}{2h} \cdot \frac{c}{2}$ ab, so behält man die Fläche DEG übrig, welche man, um den Abschnitt GQE zu finden, mit 2 zu muktipliciren hat. Nämlich es ist die Fläche des Abschnittes $QGE = \left(\frac{c^2 + h^2}{2h}\right)^2 \times \alpha - \frac{(c^2 - h^2) . c}{2h} = f$.

Diese Behandlungsart bedarf natürlich keines Beweises.

Anmerkung. Zieht man aus Q nach E eine Sehne QE, so ist der Winkel GQE, welchen wir β nennen wollen, halb so groß als ∠ GAE. = α, weil jener ein Peripheriewinkel und dieser ein Centrumswinkel zum Bogen GE ist. Es ist demnach auch α = 2β. Beschreibt man mit den Gleichmessern TQ und AF = r = 1 die Bögen TU und FC zu diesen Winkeln, so ist auch FC = 2TU. Man ziehe den Tangenten TS zum Bogen TU oder Winkel β, so verhält sich

QD : DE = QT : TS nämlich Fig. 119.
c : h = r : tang β woher

$$\text{tang } \beta = \frac{h \cdot r}{c}.$$

Wird nun der Winkel β in der Tangenten-Tafel nachgeschlagen, so kann man alsdann auch die Länge des Bogens TU zum Radius QT = AC = 1 angeben und dann ist die Länge des Bogens FC = 2TU = der Größe α, welche zur Berechnung der Fläche

$$GQE = f = \left(\frac{c^2 + h^2}{2h}\right)^2 \times \alpha - \frac{(c^2 - h^2)\, c}{2h}$$

gebraucht wird.

Zweyte Auflösung. Wird die halbe Sehne GQ nämlich GD = c und die Höhe DE = h gesetzt, so ist die Fläche des Abschnitts

$$QGE = f = 4ch\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{1.3.5.}\left(\frac{h}{c}\right)^2 - \frac{1}{3.5.7.}\left(\frac{h}{c}\right)^4 + \frac{1}{5.7.9.}\left(\frac{h}{c}\right)^6 - \frac{1}{7.9.11.}\left[\frac{h}{c}\right]^8 + - \right].$$

Beweis. Es ist, wenn die Länge des Bogens TU = β gesetzt wird, TS = $\frac{h \cdot r}{c}$ = dem Tangenten dieses Bogens, wie vorhin schon gezeigt worden ist. Nun kann die Länge des Bogens TU aus dem Radius QT und aus dem Tangenten TS vermöge II. Nr. 3. durch folgende Formel berechnet werden.

$$TU = TS \times \left[1 - \frac{TS^2}{3.QT^2} + \frac{TS^4}{5.QT^4} - \frac{TS^6}{7QT^6} + - \right]$$

daher auch die Werthe für TU = s;
TS = $\frac{h.r}{c}$ und QT = r hieher gesetzt,

Fig. 119.

$$\beta = \frac{h.r}{c}\left(1 - \frac{h^2}{3.c^2} + \frac{h^4}{5.c^4} - \frac{h^6}{7.c^6} + \frac{h^8}{9.c^8} - +\right)$$

und $FC = \alpha = 2\beta = \frac{2hr}{c}\left(1 - \frac{h^2}{3c^2} + \frac{h^4}{5c^4} - \frac{h^6}{7.c^6} + \frac{h^8}{9c^8} - +\right)$

Setzt man nun $AC = QT = r$, so ist $FC = \alpha = \frac{2h}{c}\left[1 - \frac{h^2}{3c^2} + \frac{h^4}{5c^4} - \frac{h^6}{7.c^6} + \frac{h^8}{9c^8} - \frac{h^{10}}{11.c^{10}} + \right]$

Nun ist wie vorher gezeigt worden,

$$f = \frac{(c^2 + h^2)^2 \alpha}{4h^2} - \frac{(c^2 - h^2)\, c}{2h} \text{ oder}$$

$$f = \frac{c^4\alpha}{4h^2} + \frac{2c^2\alpha}{4} + \frac{h^2\alpha}{4} - \frac{c^3}{2h} + \frac{hc}{2}$$

daher auch wenn wir die Werthe

$$\left.\begin{array}{l} \frac{c^4\alpha}{4h} = \frac{c^3}{2h} - \frac{ch}{2.3} + \frac{h^3}{2.5c} - \frac{h^5}{2.7.c^3} + \frac{h^7}{2.9.c^5} - \\ \frac{2c^2\alpha}{4} = \ldots + \frac{2ch}{2} - \frac{2.h^3}{2.3c} + \frac{2.h^5}{2.5c^3} - \frac{2h^7}{2.7.c^5} \\ \frac{h^2\alpha}{4} = \ldots\ldots + \frac{h^3}{2c} - \frac{h^5}{2.3c^3} + \frac{h^7}{2.5c^5} \\ \frac{-c^3}{2h} = \frac{-c^3}{2h} \\ \frac{+ch}{2} = \ldots\ldots \frac{+ch}{2} \end{array}\right\}$$

addiren, wir erhalten:

$$f = \frac{4ch}{3} + \frac{4h^3}{1.3.5.c} - \frac{4h^5}{3.5.7.c^3} + \frac{4h^7}{5.7.9.c^5} -$$

oder

$$f = 4ch.\left(\frac{1}{3} + \frac{1\,h^2}{1.3.5c^2} - \frac{1\,h^4}{3.5.7c^4} + \frac{1.h^6}{5.7.9c^6} + \right)$$

oder

$$f = \frac{4ch}{3} + \frac{4ch.}{1.3.5}\left(\frac{h}{c}\right)^2 - \frac{4ch.}{3.5.7}\left(\frac{h}{c}\right)^4 + \frac{4ch}{5.7.9} \cdot \left(\frac{h}{c}\right)^6 - \text{ꝛc.}$$ Fig. 119.

Setzen wir den Bruch $\left(\frac{h}{c}\right)^2 = u$ und das erste Glied $= A$; das zweyte $= B$; und die folgenden nach der Ordnung $= C$; D; E ꝛc., so ist

$$f = \frac{4ch}{3} + \frac{Au}{5} - \frac{1.Bu}{7} + \frac{3C.u}{9} - \frac{5.Du}{11} + \text{ꝛc.}$$

Beyspiel.

Es sey GQ $= 13{,}4$ und DE $= h = 3{,}1$; so ist $\frac{1}{2}$ GQ $=$ GD $= c = 6{,}7$; $\frac{h}{c} = \frac{3{,}1}{6{,}7} = 0{,}4627$ und $u = \left(\frac{h}{c}\right)^2 = 0{,}2141$. Da nun

$$A = \frac{4ch}{3} = 27{,}693$$

$$B = \frac{A.u}{5} = 1{,}186$$

$$-C = \frac{-Bu}{7} = -0{,}036$$

$$+D = \ldots + 0{,}002$$

so ist die Summe $t = 28{,}845$

Wird die Sehne oder Grundlinie GQ des Abschnittes $= a$ gesetzt, so ist $a = 2c$ u. $c = \frac{1}{2}a$; $u = \left[\frac{h}{\frac{1}{2}a}\right]^2 = \left(\frac{2h}{a}\right)^2$ und

$$f = \frac{2ah}{3} + \frac{Au}{5} - \frac{1.Bu}{7} + \frac{3.Cu}{9} - \frac{5Du}{11} + \text{ꝛc.}$$

Es sey nun GQ gegen DE, oder a gegen h ziemlich groß und z. B. $a = 6h$, so ist $u = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ und $f = 4h^2 + \frac{A}{45} - \frac{B}{63}$ ꝛc., und man sieht aus diesem, daß wenn der Abschnitt sehr schmal ist, man im Praktischen, ohne merklichen Fehler, $f = \frac{2}{3}ah$ setzen könne.

Fig. 119. VIII. Aufgabe. Die Fläche PIGQ Fig. 119. eines paralleten Kreisausschnittes zu finden.

Auflösung. Es sey der Durchmesser PI = 2AI = 2a und die Abscisse AD = HG = b, so ist die Fläche

$$f = 2ab.\left[1 - \frac{1}{2,3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{2.4.5}\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \frac{1.3.}{2.4.6.7}\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}\left(\frac{b}{a}\right)^8 - - \right]$$

Beweis. Nach I. ist der Bogen

$$IG = b + \frac{1.b^3}{2.3.a^2} + \frac{1.3.b^5}{2.4.5.a^3} + \frac{1.3.5b^7}{2.4.6.7a^6} + \text{ꝛc.}$$

daher der Ausschnitt $IAG = \frac{IG \times IA}{2} =$

$$\frac{ab}{2} + \frac{1.b^3}{2.2.3.a} + \frac{1.3.b^5}{2.2.4.5a^3} + \frac{1.3.5.b^7}{2.2.4.6.7a^5} + \text{ꝛc.}$$

Ferner ist $DG = \sqrt{AG^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$ daher die Fläche des Dreyeckes $ADG = \frac{AD \times DG}{2}$

$$= \frac{b.}{2}\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{ab}{2} - \frac{b^3}{2.2a} - \frac{b^5}{2.2.4a^3} - \frac{1.3.b^7}{2.2.4.6a^5} - -$$

Man addire dieß Dreyeck ADG zum Ausschnitt AGI, so erhält man AIGD =

$$ab - \frac{b^3}{2.3a} + \frac{1.b^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3.b^7}{2.4.6.7a^5} + \text{ꝛc.}$$

$$= ab \times \left[1 - \frac{b^2}{2.3.a^2} - \frac{1.b^4}{2.4.5a^4} - \frac{1.3.b^6}{2.4.6.7a^6} - \text{ꝛc.}\right]$$

und es ist PIGQ = 2 × AIGD.

IX. Aufgabe. Zu einem Abschnitte QGE Fig. 119. ist die Grundlinie oder Sehne GQ = 2c = 2. GD und die Breite oder Höhe DE = h gegeben, man soll die Länge des Bogens GEQ = 2z oder des halben Bogens EG = z berechnen.

Auf-

Auflösung. Da AG = c und DE = h, Fig. 119. so ist der Bogen $GE = \frac{(c^2+h^2)}{c} \times \left(1 - \frac{1}{3}\frac{h^2}{c^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{h^4}{c^4} - \frac{1}{7}\cdot\frac{h^6}{c^6} + \ldots\right)$. oder

$GE = e\left(1 + \frac{2h^2}{3c^2} - \frac{2h^4}{3.5c^4} + \frac{2h^6}{5.7c^6} - \frac{2h^8}{7.9c^8} + \ldots\right)$.

Sucht man die Halbirungssehne $QE = \sqrt{QD^2 + DE^2} = e = \sqrt{c^2 + h^2}$, so ist der Bogen QE oder $GE = z = e.\left(1 + \frac{1}{2.3}\frac{h}{e^2} + \frac{1.3}{2.4.5}\frac{h^4}{e^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\frac{h^6}{e^6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}\frac{h^8}{e^8} + \ldots\right)$ welche Reihen sehr schnell zusammen laufen, wenn h gegen c oder e ziemlich klein ist. Ist aber DE gegen DG schon ziemlich groß, so sucht man, wie in VII., den Radius $AG = AE = \frac{c^2+h^2}{2h}$; den Winkel $DQE = \beta$ durch die Formel

$$\text{tang } \beta = \frac{h}{c},$$ wo nun

$\angle GAE = \alpha = 2\beta$, dessen Bogenlänge FC in der Bogentafel nachgeschlagen wird, und weil $AG = AC = 1$ und $AF : FC = AG : GE$ oder $1 : FC = \frac{c^2+h^2}{2h} : GE$, so ist $GE = \frac{(c^2+h^2)}{2h} \times FC$.

Beweis. Dieser Bogen FC ist (in der zweyten Auflösung VII.) $= \alpha$ gesetzt worden, und wir haben dort schon gezeigt, daß

$$\alpha = \frac{2h}{c} \times \left[1 - \frac{h^2}{3c^2} + \frac{h^4}{5c^4} - \frac{h^6}{7c^6} + \frac{h^8}{9c^8} - + \right]$$

ist. Da nun $GE = \frac{(c^2+h^2)}{2h} \times \alpha$ so ist auch

$GE = \frac{(c^2+h^2)}{c} \times \left(1 - \frac{h^2}{3c^2} + \frac{h^4}{5c^4} - \frac{1}{7}\frac{h^6}{c^6} + \frac{1}{9}\frac{h^8}{c^8} \ldots\right)$.

Oder es ist

$$GE = c.\left(1 + \frac{2h^2}{3c^2} - \frac{2.h^4}{3.5.c^4} + \frac{2.h^6}{5.7.c^6} - \frac{2.h^8}{7.9.c^8} + \right).$$

Ferner haben wir $e = \sqrt{c^2 + h^2}$ gesetzt; da nun der Radius $AE = a = \frac{c^2 + h^2}{2h}$ und $c^2 + h^2 = e^2$, so ist auch $a = \frac{e^2}{2h}$.

Setzen wir wie oben den Bogen $TU = \beta$, so ist $UV = \sin \beta$, und es verhält sich

$$QE : ED = QU : UV \text{ oder}$$
$$e : h = 1 : UV, \text{ wo}$$
$$UV = \frac{h}{e}.$$

Nun ist aber wenn der Radius $QU = 1$ und der Sinus $UV = \frac{h}{e}$ bekannt ist, vermöge I. Nr. 2. der Bogen

$$TU = \frac{h}{e} + \frac{1.h^3}{2.3.e^3} + \frac{1.3.h^5}{2.4.5.e^5} + \frac{1.3.5.h^7}{2.4.6.7e^7} + \text{ &c.}$$

und der Bogen $FC = 2TU$; und es verhält sich zugleich

$$AF : FC = AG : GE \text{ oder}$$
$$1 : 2.TU = \frac{e^2}{2h} : GE, \text{ daher auch}$$
$$GE = \frac{e^2}{h}.TU = \frac{e.e}{h}TU =$$
$$e.\left(1 + \frac{1.h^2}{2.3.e^2} + \frac{1.3.h^4}{2.4.5.e^4} + \frac{1.3.5h^6}{2.4.6.7.e^6} + \right) = z$$

Fig. 122. X. Aufgabe. Es sind drey Punkte A; I und O Fig. 122. vorgelegt, man soll einen Kreisbogen ABCDEFGILNO, obgleich der Mittelpunkt Z derselben nicht sichtbar und zugängig ist, oder zu entfernt liegt, dergestalt auspfählen, daß nicht nur der Bogen durch die vorgelegten Punkte geht, sondern jeder Stab von dem andern zugleich auch gleichweit entfernt zu stehen kömmt.

Auflösung. Man suche nach §. 35. II. zu den

vorgelegten drey Punkten die Länge a des Radius Fig. 128.
AZ durch Rechnung, halbire AO in Y; so ist YZ =
$\sqrt{AZ^2 - AY^2}$ und die in Y auf AO errichtete
Senkrechte YF = ZF — YZ, wo ZF = AZ.
Die Linie YF theilt den Bogen AFO in zwey gleiche
Theile AF und FO und da hierzu der Radius AZ =
ZF = a; der Sinus oder halbe Sehne AY oder
auch die Höhe YF, oder auch die Halbirungssehne
AF = $\sqrt{AY^2 + YF^2}$ bekannt sind, so kann man
die Länge des Bogens AF = FO nach IX. sehr
leicht berechnen. Sollen nun in diesen Bögen FA
und FO eine gewisse Anzahl gleichweit entfernte
Pfähle E; D; C ꝛc. eingesetzt werden, so muß man
dadurch den Bogen in n z. B. in 5 gleiche Theile
FE; ED; DC ꝛc. getheilt sich vorstellen, wo nun FE
= FG = $\frac{1}{5}$ FA; FED = $\frac{2}{5}$ FA; FG = $\frac{3}{5}$;
FB = FN = $\frac{4}{5}$ FA ist.

Man lege zu AO eine Parallele PU in der Entfernung YF an und denke sich aus jedem Punkte E; D; C ꝛc. der krummen Linie auf PU und ZF senkrechte Linien CR und EV; DQ und DW; CP und CX gefällt; so entsteht die Frage, wie groß die Abscisse FR und Ordinate RE zum Punkte E; die Abscisse FQ und Ordinate QD zum Punkte Q ꝛc. der krummen Linie sey, damit man in diese die verlangten Stäbe einsetzen könne. Da hier die Länge eines jeden Bogens bekannt ist, so wollen wir zeigen, wie man zu einer gegebenen Länge des Bogens FE = α die Abscisse ER = VE = x (welche ein Sinus des Bogens α ist) und die Ordinate RE = FV = v (welche der zugehörige Sinusversus ist) berechnen könne, wenn nämlich der Radius ZF = a des Bogens bekannt ist.

Nach §. 59. V. ist sin α nämlich VE = FR =

$$x = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3.a^2} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5.a^4} - \text{ꝛc. oder}$$

$$x = \alpha\left[1 - \frac{\alpha^2}{2.3a^2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.5.a^4} - \frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6.7a^6} + \right]$$

Es ist demnach auch

Fig. 122.

$$FR = FE \times \left(1 - \frac{FE^2}{2.3.ZF^2} + \frac{FE^4}{2.3.4.5.ZF^4} - + \right)$$

Ferner ist ZV, der Cosinus des Bogen EF $= \alpha$ und (nach §. 39. VI.) cos α nämich ZV $=$

$$y = a.\left[1 - \frac{a^2}{1.2a^2} + \frac{a^4}{1.2.3.4a^4} - \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6a^6} + \right]$$

daher auch RE $=$ FV $=$ ZF $-$ ZV oder

$$v = a - y = a\left(\frac{a^2}{1.2a^2} - \frac{a^4}{2.3.4a^4} + \frac{a^6}{2.3.4.5.6.a^6}\right)$$

oder $v = \frac{a^2}{2a} - \frac{a^4}{2.3.4a^3} + \frac{a^6}{2.3.4.5.6a^4} - \text{ꝛc.}$

oder $RE = \frac{FE^2}{2ZF} - \frac{FE^4}{2.3.4.ZF^3} + \frac{FE^6}{2.3.4.5.6.ZF^5} - \text{ꝛc.}$

Setzen wir das erste Glied dieser Formeln, wie immer $=$ A und die folgenden Glieder nach der Ordnung B; C; D ꝛc. und $\frac{a^2}{a^2} = q = \left[\frac{a}{a}\right]^2$

so ist

$$x = \alpha - \frac{Aq}{2.3.} + \frac{Bq}{4.5.} - \frac{Cq}{6.7.} + \text{ꝛc. und}$$

$$v = \frac{\alpha^2}{2a} - \frac{Aq}{3.4} + \frac{Bq}{5.6} - \text{ꝛc.}$$

Wird hier $\alpha = FD$ gesetzt, so wird $x = FQ$ und $v = QD$, und wenn $\alpha = FC$, so ist $x = FP$ und $v = PC$.

Daß FS $=$ FR und SG $=$ RE;

FT $=$ FQ und TI $=$ QD und so fort ist, braucht man wohl nicht zu erinnern.

Die ersten drey Stäbe E; F und G können nach den aufgestellten Formeln augenblicklich gefunden werden, weil die aufgestellten Reihen für die Abscissen und Ordinaten sehr geschwind zusammen laufen und oft schon nach Entwickelung des zweyten Gliedes ein sicheres Resultat geben. Nur die Berechnung der Abscissen und Ordinaten der folgenden Stäbe wird nach und nach mühsamer. Nehmen wir jedoch die Formeln $\sin 2\alpha = \frac{2.\cos\alpha.\sin\alpha}{a}$; $\cos 2\alpha =$

$\frac{2 \cdot co^2 \varepsilon}{a} - a$; sin 3α und cos 3α ꝛc. zu Hilfe, so Fig. 122.
können wir, wenn zum Bogen FE = ε der Sinus EV und Cosinus ZV bekannt ist, ist, sehr leicht auch zum Bogen FED = 2α, und zum Bogen FC = 3α die zugehörigen Sinus und Cosinus und mithin auch Sinusversus berechnen.

Anmerkung. Hat man schon bereits drey Stäbe als F; G und I gesetzt, so kann man den vierten Stab L auf einen praktischen Wege dadurch bestimmen, daß man FG nach H bis zur Senkrechte IH verlängert, GH und HI mißt, sodann GI nach K verlängert, IK = GH und die Senkrechte KL = HI macht, welche Arbeit man zu den folgenden Stäben N und O fortsetzt.

§. 43.

Kreise, Aus- und Abschnitte vom begehrten Flächen-gehalte zu machen.

I. Aufgabe. Einen Kreis in ein Quadrat und dieß in jenes zu verwandeln.

Auflösung. Es sey der Radius des Kreises = r und die Seite des Quadrats = a, so ist die Fläche des Kreises = $r.^2\pi$ und die Fläche des Quadrats = a^2. Man setze beyde Flächen einander gleich, als $a^2 = r^2.\pi$, so ist

$$a = r. \sqrt{\pi} \text{ und}$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}, \text{ oder}$$

$$a = r \times 1{,}772454$$

$$r = a \times 0{,}56419.$$

Es sey der Durchmesser des Kreises = d, so ist $r = \frac{d}{2}$ und die Seite des Quadrats $a = \frac{d}{2} \times 1{,}772454 = d \times 0{,}886227$. Multiplicirt man daher den Durchmesser eines Kreises mit 0,886227, so

erhält man die Seite zu einem Quadrate, dessen Fläche = der Kreisfläche ist.

Anmerkung. Hieher gehören auch die Aufgaben IV. des vorigen Paragraphen.

II. Aufgabe. Einen Kreisausschnitt ACD (Fig. 120.) = s □R. zu machen. Fig. 120.

Auflösung. Es sey der Radius CA = a R., der Radius CI = 1 und ∠ ACD = α°, so ist der Halbkreis ILMN = π und der Bogen IL = $\frac{\alpha . \pi}{180}$; der Bogen AD = a. $\frac{\alpha . \pi}{180}$ und Ausschnitt ACD = $\frac{AD \times AC}{2} = a^2 . \frac{\pi . \alpha}{360} = s$, woraus folgt, das ∠ ACD = α = $\frac{360 \times s}{a^2 \pi}$ ist. Multiplicirt man daher die hinzulegende Fläche ACD = s mit 360 Grad und dividirt man dieß Produkt durch die ganze Kreisfläche ADEFG = $a^2 . \pi$, so erhält man zur abzuschneidenden Fläche s die Grade des Winkels ACD.

Man setze den Bogen AD = β, so ist $s = \frac{\beta a}{2}$; und da CI : IL = CA : AD, oder 1 : α = a : β so ist auch $\beta = a . \alpha$ und $s = \frac{a^2 . \alpha}{2}$ und $\alpha = \frac{2s}{a^2}$. Hat man diesen Werth von α, nämlich die Länge des Bogens IL berechnet, so kann man alsdann in der Bogentafel die Grade des zugehörigen Winkels ACD nachschlagen.

III. Aufgabe. *) Es ist ein Punkt B außerhalb des Mittelpunktes A eines Voll- oder Halbkreises CDE (Fig. 123.) gegeben und man hat schon eine Linie BAC aus B durch den Mittelpunkt A gezogen, man fragt, in welchen Punkt D des Umkreises man eine zweyte Linie BD aus B ziehen müsse, wenn der Fig. 123.

*) Anfänger können diese und die folgenden Aufgaben überschlagen.

unregelmäßige Ausschnitt CBD eine gewisse Zahl s □R. Fig. 123.
enthalten soll.

Auflösung. Wäre der Bogen GH (dessen Radius AG = AH = 1 ist) zum Winkel DAC bekannt, so kann man alsdann auch in der Bogentafel die Grade des Winkels CAD selbst nachschlagen und wenn dieser Winkel berechnet und aufgetragen ist, so wird auch der Schenkel AD den Punkt D der Peripherie schneiden, wohin die begehrte Theilungslinie BD aus B gezogen werden muß. Man setze den Radius AC = a; den Abstand BA = c, den gesuchten Bogen GH = α, so ist CFD = a. α. und Ausschnitt CAD = $\frac{a^2 . \alpha}{2}$ Man ziehe zum Bogen CD = α. a den Sinus DI, so ist (nach §. 39. V.)

$$DI = \alpha\, a - \frac{\alpha^3 a^3}{2.3.a^2} + \frac{\alpha^5 . a^5}{2.3.4.5 a^4} - +.$$

oder

$$DI = a.\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2.3} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.5} - +\right)$$

und $\triangle BAD = \frac{BA \times DI}{2} =$

$$\frac{c}{2}\, a.\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2.3} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.5} - \right).$$

Da nun CBD = CAD + BAD, so ist auch

$$s = \frac{a^2.\alpha}{2} + \frac{c.a.\alpha}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2.3} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.5} - - +\right)$$

Nun entwickelt man aus dieser Gleichung den Bogen α, indem man die Glieder zuvor auf folgende Art ordnet:

$$(a + c)\,\alpha - \frac{c\alpha^3}{2.3} + \frac{c\alpha^5}{2.3.4.5} - + = \frac{2s}{a},$$

alle Glieder durch a + c dividirt:

$$\alpha - \frac{c\alpha^3}{2.3(a+c)} + \frac{c\alpha^5}{2.3.4.5(a+c)} - + = \frac{2s}{a(a+c)}$$

= u (der Kürze wegen)

und sodann

$\alpha = u + Au^3 + Bu^5 + \text{ꝛc.}$ setzt die Werthe von α^3; α^5 sucht, in die vorige Gleichung substituirt und sie auf Null reducirt, so findet man

$$A = \frac{c}{2.3(a+c)} \text{ und } B = 3A^2 - \frac{c}{2.3.4.5(a+c)}$$

$$= 3A^2 - \frac{A}{20} = A\left(3A - \frac{1}{20}\right);$$

woraus nun

$\alpha = u + Au^3 + A.(3A - 0{,}05)\,u^5 + \text{ꝛc.}$ berechnet werden kann, wenn hierin wie oben,

$u = \frac{2s}{a(a+c)}$ und $A = \frac{c}{2.3(a+c)}$ gesetzt wird. Auch kann jedes folgende Glied aus dem vorhergehenden leicht hergeleitet werden.

Soll der Ausschnitt CAB $=$ v □R. werden, so zieht man v vom Halbkreise CED ab, und schneidet wie vorher den Ueberrest CBD ab. Sollte aber FBD $=$ w □R. werden, so sucht man die Fläche CBF $=$ CAF $+ \triangle$ BAF, addirt hierzu w, setzt die Summe CBD $= s$ und berechnet GH $= \alpha$, wie vorher.

Anmerkung. Wie man dergleichen Theilungen praktisch und hinlänglich genau verrichtet, wird zu seiner Zeit in der Theilungslehre der krummlinten Figuren gezeigt werden.

IV. **Aufgabe.** Zum Durchmesser IP eines Kreises Fig. 119. soll eine parallele Sehne GQ so geführt werden, daß die abgeschnittene Fläche IPQG eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthält. Fig. 119

Auflösung. Wird der Radius AI $=$ AE $=$ a; die Abscisse AD $=$ x gesetzt, so ist, nach §. 42. VII. die Fläche PIGQ $=$

$$s = 2ax.\left[1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2.4.5}\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{1.3}{2.4.6.7}\left(\frac{x}{a}\right)^6 - \right]$$

Man dividire diese Gleichung durch $2a^2$ und setze zugleich $\frac{s}{2a^2} = v$ und $\frac{x}{a} = u$, so ist

$v = u - \frac{1}{2.3}u^3 - \frac{1}{2.4.5}u^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}u^7 - \text{ꝛc.}$ Fig. 118.

Entwickelt man nun aus dieser Gleichung den Werth von u so findet man

$u = \frac{x}{a} = v + \frac{1}{6}v^3 + \frac{13}{120}v^5 + \frac{493}{5040}v^7 + \text{ꝛc.}$

wo $x = a\left[\frac{s}{2a^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{s}{2a^2}\right)^3 + \frac{13}{120}\left(\frac{s}{2a^2}\right)^5 + \frac{493}{5040}\left(\frac{s}{2a^2}\right)^7 + \right]$ ist.

V. Aufgabe. Zu einem Kreisbogen PQEGI Fig. 119. eine Sehne GQ dergestalt zu ziehen, daß Fig. 119. der entstehende Abschnitt QGE eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthält.

Auflösung. Setzen wir den Radius AE des Kreises $= a$, die Breite DE des Abschnittes $= h$ und $\sqrt[3]{\left(\frac{3.s}{16a^2}\right)^2} = w$, so ist

$h = 2a.\left[w + \frac{1.w^3}{5} + \frac{22w^5}{5^2.7} + \frac{823w^7}{3^2.5^3.7} + \right]$

Beweis. Wird $AH = DG = x$ und $AE = a$ gesetzt, so ist, wie in IV, der parallele Halbausschnitt $AEGH = ax.\left[1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2.4.5}\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{a}\right)^6\right]$. Ziehen wir hiervon das Rechteck ADGH ab, welches $= DG \times AD = x.\sqrt{a^2 - x^2} = ax.\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 - \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{a}\right)^6 - - \right]$ ist, so behalten wir den Halbabschnitt DGE übrig welcher $= ax.\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2.5}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1.3}{2.4.7}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6.9}\left(\frac{x}{a}\right)^8\right]$ ist. Dupliren wir dieß, so erhalten wir QGE. =

Fig. 129. $s = 2ax\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2.5}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1.3}{2.4.7}\left(\frac{x}{a}\right)^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6.9}\left(\frac{x}{a}\right)^8 + \right]$

Es ist aber, wenn DE $=$ h; DG $=$ x und EA $=$ a gesetzt wird, die Ordinate DG $=$ $\sqrt{2EA \times DE - DE^2}$, vermöge §. 33. III., daher auch

$$x = \sqrt{2ah - h^2} = \sqrt{2ah} \times \sqrt{1 - \frac{h}{2a}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \times \left[1 - \frac{h}{2.2a} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{h}{2a}\right)^2 - \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{h}{2a}\right)^3 - \right]$$

und $\frac{x^2}{a^2} = \frac{2ah - h^2}{a^2} = \frac{2h}{a} - \frac{h^2}{a^2}$;

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 = \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = \ldots \frac{4h^2}{a^2} - \frac{4h^3}{a^3} + \frac{4h^4}{a^4};$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^6 \ldots = \ldots \frac{8h^3}{a^3} - \frac{12h^4}{a^4} \text{ ꝛc.}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^8 \ldots = \ldots \frac{16h^4}{a^4} \text{ ꝛc.}$$

Substituiren wir nun diese Werthe in die Gleichung für s, indem wir zuerst den Werth der Klammergröße daselbst suchen und diesen mit dem Werthe 2ax multipliciren, so erhalten wir nach gehöriger Reduktion

$$s = 2.^4 a^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a}\right) - \frac{1}{2.5}\left(\frac{h}{2a}\right)^2 - \frac{1}{2.4.7}\left(\frac{h}{2a}\right)^3 - \frac{1.3}{2.4.6.9}\left(\frac{h}{2a}\right)^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.11}\right]$$

Man dividire die beyde Seiten dieser Gleichung durch $\frac{2^4 a^2}{3}$, so erhält man

$$\frac{3s}{2^4 a^2} = \left(\frac{h}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2.5}\left(\frac{h}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.1}{2.4.7}\left(\frac{h}{2a}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{3.1.3}{2.4.6.9}\left(\frac{h}{2a}\right)^{\frac{7}{2}} - \text{ ꝛc.}$$

und wenn man der Kürze wegen $\frac{h}{2a} = u$ und $\frac{3s}{2^4a^2}$ Fig. 119.

$= v$ setzt, so ist

$$u^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2.5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{3.1}{2.4.7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{1.1.}{2.4.6}u^{\frac{9}{2}} - \ldots = v.$$

Um nun aus dieser Gleichung den Werth u zu entwickeln, setze man

$u = v^{\frac{2}{3}} + Av^{\frac{4}{3}} + Bv^{\frac{6}{3}} + Cv^{\frac{8}{3}} + \text{ꝛc.}$ so dann ist

$$u^{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} v + \frac{3}{2}Av^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}Bv^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2}Cv^{\frac{9}{3}} + \text{ꝛc.} \\ \quad + \frac{3}{2}.\frac{1}{4}A^2v^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2}.\frac{2}{4}ABv^{\frac{8}{3}} + \\ \quad - \frac{3}{8}.\frac{1}{4}\frac{1}{6}A^2v^{\frac{9}{2}} \end{array} \right.$$

$$u^{\frac{5}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} v^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{2}Av^{\frac{7}{3}} + \frac{5}{2}Bv^{\frac{9}{3}} \\ \quad + \frac{5}{2}\frac{3}{4}A^2v^{\frac{9}{3}} \end{array} \right.$$

$$u^{\frac{7}{2}} = v^{\frac{7}{3}} + \frac{7}{2}Av^{\frac{9}{3}}$$

$$u^{\frac{9}{2}} = v^{\frac{9}{3}} + \text{ꝛc.}$$

und wenn man diese Werthe in die obige gefundene unendliche Reihe substituirt und diese auf Null reducirt, so ist

$$\left\{ \begin{array}{llll} v + \frac{3}{2}Av^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}Bv^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{2}Cv^{\frac{9}{3}} & & & \\ \quad + \frac{3}{8}A^2 \ldots & + \frac{3}{8}AB \ldots & & \\ & - \frac{1}{16}A^3 \ldots & & \\ - \frac{3}{16} \ldots & - \frac{3}{4}A \ldots & - \frac{3}{4}B \ldots & \\ & & - \frac{9}{16}A^2 \ldots & \\ & - \frac{3}{10} \ldots & - \frac{3}{16}A \ldots & \\ & & - \frac{7}{43} \ldots & \\ - v \ldots & & & \end{array} \right\} = 0.$$

woraus wir erhalten: $A = \frac{1}{5}$;

$B = \frac{22}{5.5.7}$; $C = \frac{823}{3.5^2.5.7}$; ꝛc.

und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung für u, findet man u oder

$$\frac{h}{2a} = v^{\frac{3}{3}} + \frac{1}{5} v^{\frac{4}{3}} + \frac{22}{5.^2 7} v^{\frac{6}{3}} + \frac{823.}{3.^2 5.^3 7} v^{\frac{6}{3}} + \text{ꝛc.}$$

wo nun

$$h = 2a. \left(v^{\frac{3}{3}} + \frac{1.v^{\frac{4}{3}}}{5} + \frac{22\, v^{\frac{6}{3}}}{5.^2 7} + \frac{823 v}{3.^2 5^3 7} + \right)$$

und $v = \frac{3s}{16a^2}$ und $v^{\frac{2}{3}} = v^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3s}{16a^2}\right)^2 = w$ ist.

VI. Aufgabe. Es ist der Mittelpunkt C und
Fig. 124. der Radius CB = CH = a zu einem Kreise EBFGHIKD ꝛc. Fig. 124. nebst der Entfernung CA = b eines Punktes A (außerhalb des Kreises) vom Mittelpunkte gegeben, man soll aus A eine Linie AFI durch den Kreis dergestalt ziehen, daß der Abschnitt FIHG oder das innere Stück BDIF (wo BCD ein Durchmesser ist) eine vorausbestimmte Fläche s enthält.

Auflösung. Denken uns aus C eine Senkrechte CLH und eine Parallele ECK zu FI, so ist ECB = KCD und demnach DBFI = KEFI = s. Setzen wir nun CL = x, so ist (vermöge IV.)

$$x = a. \left[\frac{s}{2a^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{s}{2a^2}\right)^3 + \frac{13}{120} \left(\frac{s}{2a^2}\right)^5 + \frac{493}{5040} \left(\frac{s}{2a^2}\right)^7 + \right]$$

Da nun AC = b und CL = x zum rechtwinkligen Dreyecke CLA bekannt ist, so wird der $\angle$ CAL oder DAI = α° durch Hilfe der Sinustafel aus der Form $\sin \alpha = r \frac{x}{b}$ gefunden.

Ziehen wir aus A eine Tangente AG zum Kreise, so können wir auch den Winkel CAG = β durch die Formel $\sin \beta = \frac{ar.}{b}$ berechnen.

Soll IFH eine verlangte Zahl s □R. enthalten, so berechnet man hierzu nach V. die Senkrechte

$$LH = h = 2a. \left[w + \frac{1}{5} w^3 + \frac{22}{5.^2 7} w^3 + \right.$$

$\frac{823}{3.^2 5.^3 7} w^4 + \Big]$, wo $w = \left(\frac{3.5}{16.^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ist, sodann ist $CL = a - h$; $\sin \angle CAL = \frac{r.(a-h)}{b.}$ $= \sin \alpha$ und $\angle GAL = \angle GAC = \angle LAC = \frac{\beta - \alpha}{2}$. Bis. 184

Wäre die Fläche IHF $= s$ beynahe so groß als der Halbkreis DIHB, so zieht man s vom Halbkreise ab und legt den Ueberrest DBFI auf die zuvor gezeigte Art hin. Eben so legt man auch den Abschnitt IFH statt der Fläche DBFI hin, wenn diese beynahe so groß als der Halbkreis seyn sollte.

Siebentes Kapitel.

Von Ausmessung der Vielecke und krummlinigen Figuren.

---

§. 44.

Von regelmäßigen Vielecken.

Ein regelmäßiges Vieleck ist ein solches, worin nicht nur alle Seiten und Winkel gleich sind, sondern wozu auch noch ein Mittelpunkt und ein Radius zu einem Kreise angegeben werden kann, dessen Bogen der Peripherie durch alle Ecken des vorgelegten Vielecks geht, oder dessen Bogen alle Seiten des Vielecks berührt. Hierüber führen wir nun Nachfolgendes an.

I. Der Radius GD = GA eines Kreises ABCDEF Fig. 125. und die Seite AB = BC = CD ꝛc. eines geradlinigen regelmäßigen Sechsecks ABCDEF sind einander gleich.

Fig. 125.

Denn wenn man aus GD oder DC ein gleichseitiges (regelmäßiges) Dreyeck DGC macht, so sind, weil drey Seiten GD; GC und DC des genannten Dreyecks einander gleich sind, auch die drey Winkel CGD; GDC und DCG einander gleich und es hat demnach jeder Winkel $\frac{1}{3}$ 180 = 66 Grade. Da nun ein ∠ CGD um einen Punkt G herum sechsmal getragen werden kann, weil der ganze Kreisbogen 360 Grade enthält, so können auch sechs gleichseitige Dreyecke CGD; DGE; EGF; FGA; AGB und BGC und sechs gleiche Seiten CD; DE; EF ꝛc. im Kreise herum getragen werden, wo jede Seite CD oder DE = dem Radius GA oder GD ist.

Auch der Radius GK = GI = GH ꝛc. eines Kreises HIKNOP, der alle Seiten des Sechseckes berührt oder streift, kann gefunden werden, weil CD eine Tangente vom Bogen IKN ist und demnach GK und CD auf einander senkrecht stehen, wo nun $\triangle CGK \overset{\backsim}{=} \triangle DGK$ und $KC = KD = \frac{1}{2} CD$ ist. Setzen wir nun $GD = GC = CD = a$ und $GK = x$, so ist $CK = \frac{1}{2} a$ und $GK =$

$$\sqrt{GC^2 - CK^2} = \sqrt{a^2 - (\tfrac{1}{2} a)^2} =$$

$$\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4} a^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4} a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3} =$$

$$\frac{a.\ 1{,}732}{2} = a.\ 0{,}866 = x.$$

II. Wenn der Radius IA = IB = IC = a eines Kreises ABCDEFGH Fig. 126. und die Seite AC = CE = b eines darin beschriebenen regelmäßigen Viereckes (Quadrats) ACEG gesetzt wird, so kann wenn a gegeben ist, b durch die Formel $b = a. \sqrt{2}$, und wenn b gegeben ist, der Radius a durch die Formel $a = \frac{b}{2} \sqrt{2}$ berechnet werden.

Fig. 126.

Wird nämlich im Mittelpunkte I eines Kreises ein Fig. 126.
rechtwinkliges Kreuz AE, GC gezogen, so werden die Punkte A, C, E und G des Umfangs geschnitten, wozu man das Quadrat ACEG verzeichnen kann. Und macht man die auf AC errichtete Senkrechte CE = CA und halbirt man die Hypotenuse AE in I, so ist IA der Radius zu einem Kreise, worin AC viermal fortgetragen werden kann.

Beweis Es ist $AE = 2AI = 2a$, $AC = CE = b$, daher $AE^2 = AC^2 + CE^2$, nämlich

$$4a^2 = b^2 + b^2 \text{ oder}$$
$$2a^2 = b^2, \text{ wo nun}$$

$b = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ und $a^2 = \frac{2b^2}{4}$ und $a = \frac{b.\sqrt{2}}{2}$.

Zusatz. Der Radius $IK = c$ zu einem inwendigen Berührungskreise KLMN wird durch die Formel $c = \frac{a.\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}b$ gefunden.

Und wenn $IK = c$ gegeben ist, so findet man $AC = b$ und $IA = a$ durch $b = 2c$ und $a = c.\sqrt{2}$, wo $c = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Denn es ist $\angle$ IKC ein rechter, $\angle$ KIC $= \angle$ KIA $= \frac{1}{2}.90 = 45°$ und daher auch $\angle$ KCI $= 45°$ und $KI = KC = c = \frac{1}{2}b$. Da nun $IC^2 = KC^2 + KI^2$, so ist auch $a^2 = 2c^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{2}{4}b^2$, woraus alles Uebrige folgt.

III. Wenn ED $= b$ die Seite eines regelmäßigen Zehneckes Fig. 127. und AE $=$ AD $= a$ der Radius zum äußern Kreise EDB, AC $= c$ der Radius zum innern Kreise ist, so finden folgende Gleichungen Statt. Fig. 127.

$$a = \frac{1}{2}b.[1 + \sqrt{5}];$$
$$b = \frac{1}{2}a[-1 + \sqrt{5}];$$
$$c = \frac{1}{2}b\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}.$$

Beweis. Ist DE die Seite eines regelmäßigen Zehneckes, so kann die Sehne und der Bogen DE zehnmal im Umkreise fortgetragen werden und es muß

Fig. 147. demnach der Bogen DE und der Winkel ADE $= \frac{360}{10} = 36°$ enthalten. Da nun △ DAE gleichschenklig und demnach $\angle$ ADE $= \angle$ AED, so wird ein solcher Winkel $= \frac{180 - 36}{2} = 90 - 18 = 72°$ seyn. Man trage aus D die Seite DE nach DF, so ist auch $\angle$ DFE $=$ DEF $= 72°$ und $\angle$ FDE $= 180 - 2.72 = 36°$ und demnach △ DEF ∽ △ AED. Da nun $\angle$ ADE $= 72°$ und $\angle$ FDE $= 36°$, so ist auch $\angle$ ADF $= 36$ und demnach $=$ $\angle$ DAF, wo nun im Dreyecke AFD, wegen der gleichen Winkel in A und D auch die beyden Seiten AF und DF einander gleich seyn müssen. Hiernach ist DE $=$ DF $=$ AF $= b$; EF $=$ AE $-$ AF $= a - b$; und (im △ AED ∽ △ DEF) AE : ED $=$ DE : EF oder $a : b = b : (a - b)$ und demnach

$a^2 - ab = b^2$ oder $a^2 - ab - b^2 = 0$,

woraus folgt $a = \frac{1}{2}b + \sqrt{[(\frac{1}{2}b)^2 + b^2]} = \frac{1}{2}b.[1 + \sqrt{5}]$

und aus $b^2 + ab - a^2 = 0$ folgt

$b = -\frac{1}{2}a + \sqrt{[(\frac{1}{2}a)^2 + a^2]} = \frac{1}{2}a[-1 + \sqrt{5}]$

Ferner ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$ nämlich

$a^2 = c^2 + \frac{1}{4}b^2$ und

$c^2 = a^2 - \frac{1}{4}b^2$.

Da nun $a^2 = \frac{1}{4}b^2(6 + 2.\sqrt{5})$ und $\frac{1}{4}b^2 = (\frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{16}a^2(6 - 2\sqrt{5})$, so ist auch

1) $c^2 = \frac{1}{4}b.^2(5 + 2.\sqrt{5})$ und $c = \frac{1}{2}b\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$;

2) $c^2 = a^2 - \frac{6}{16}a^2 + \frac{2}{16}a^2\sqrt{5} = \frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5})$ und

$c = \frac{1}{4}a^2\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$

Anmerkung. Wenn AE $= a$ der Radius eines Kreises EDB ist, so kann hierzu die Seite BD $=$ AF $=$ AG eines Zehneckes durch Verzeichnung gefunden werden, wenn man in E eine Senkrechte EK $= \frac{1}{2}$ AE errichtet, die Hypothenuse AK zieht

und

und KG = KE macht. Denn es ist AE = a. Fig. 107.
EK = $\frac{1}{2}$a und AK = $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$ und AG = AK − KG = − KE + AK = − $\frac{1}{2}$a + $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}$ = b, wie oben.

Ist die Seite DE = DB = AF = b des Zehneckes gegeben, so findet man hierzu den Radius AE = AI = a, wenn man in F auf AF eine Senkrechte FH = $\frac{1}{2}$ AF = $\frac{1}{2}$ b errichtet, die Hypothenuse AHK zieht und HI = HF macht, wo AH = $\sqrt{b^2 + (\frac{1}{2}b)^2}$ und AI = IH + HA = $\frac{1}{2}$b + $\sqrt{\frac{1}{4}b^2}$ = $\frac{1}{2}$b. [1 + $\sqrt{5}$] = a, wie oben ist.

IV. Wenn die Sehne BE die Seite eines mEckes ist und der Bogen BDE in zwey gleiche Theile getheilt wird, so ist die Sehne BD oder DE die Seite eines 2. mEckes. Und wenn BD die Seite eines nEckes und der Bogen BDE = 2 Bögen BD ist, so wird die Sehne BE die Seite zu einem $\frac{1}{2}$nEcke seyn. Hier gelten nun folgende zwey Lehrsätze.

1) Ist der Radius AE = AD = AB = a zum Kreise und die Seite BE = x zu einem mEcke gegeben, so findet man die Seite DE = y zu einem 2mEcke durch die Formel

$$y = \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2}]} \text{ oder}$$

$$y = \sqrt{\frac{a(2a + x)}{2}} - \sqrt{\frac{a(2a - x)}{2}}$$

nach p. 273. Bd. II.

2.) Ist aber die Seite DE = y zu einem nEcke gegeben, so findet man die Seite BE = x zu einem $\frac{1}{2}$nEcke durch die Formel

$$x = \frac{y}{a}\sqrt{4a^2 - y^2} = \frac{y}{a}\sqrt{(2a + y)(2a - y)}.$$

Beweis. Es ist LE = $\frac{1}{2}$x, DE = y und AE = a, daher AL = $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}$ und LD = $\sqrt{y^2 - \frac{1}{4}x^2}$;
Da nun AL + LD = AD, so ist auch

$$\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{4}x^2} = a$$

Fig. 127. wovon das Quadrat:

$$a^2 + y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}x^2)(y^2 - \tfrac{1}{4}x^2)} = a^2$$

und wo $2\sqrt{(a^2 y^2 - \frac{1}{4}a^2 x^2 - \frac{1}{4}x^2 y^2 + \frac{1}{16}x^4)} = \frac{1}{2}x^2 - y^2$ iſt, deſſen Quadrat:

$$4a^2 y^2 - a^2 x^2 - x^2 y^2 + \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{1}{4}x^4 - x^2 y^2 + y^4,$$

welche Gleichung ſich auf

$$y^4 - 4a^2 y^2 + a^2 x^2 = 0$$

reducirt, woraus der Werth

$$y^2 = 2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - a^2 x^2} \text{ und}$$

$$x^2 = \frac{(4a^2 - y^2)\,y^2}{a^2} \text{ oder}$$

$$y = \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2}]} \text{ und}$$

$$x = \frac{y}{a}\sqrt{4a^2 - y^2} \text{ iſt.}$$

V. Anwendung dieſer Formeln.

Fig. 128. 1) Die Seite des Sechseckes ABCDEF Fig. 128 iſt $= CD = a$, vermöge I. Setzen wir a ſtatt y in die Gleichung $x = \frac{y}{a}\sqrt{4a^2 - y^2}$, ſo erhalten wir die Seite $CE = x = \sqrt{3a^2}$ des Dreyeckes ACE. Setzen wir aber a ſtatt x in die Gleichung $y = \sqrt{\frac{a(2a + x)}{2}} - \sqrt{\frac{a(2a - x)}{2}} =$

$\sqrt{(2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2})}$, ſo erhalten wir die Seite des Zwölfeckes $= \sqrt{\frac{3}{2}a^2} - \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{3}}$, und ſetzen wir ferner dieſen Werth ſtatt x in dieſelbe Gleichung, ſo erhalten wir die Seite des 24 Eckes $= \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{(2a^2 + a^2\sqrt{3})}]}$.

Daß im regelmäßigen Dreyecke ACE die Seite $CE = a\sqrt{3}$ iſt, erhellet auch daraus, daß $CM = \frac{1}{2}x$, und im gleichſeitigen Dreyecke GCD der Abſtand $GM = MD = \frac{1}{2}GD = \frac{1}{2}a$; im rechtwinkligen Dreyecke GMC die Cathete

$$CM = \sqrt{C^2 - GM^2} \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}x = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}a^2} \text{ und}$$

$$x = 2.\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = a.\sqrt{3} \text{ iſt.}$$

2) die Seite des Vierecks Fig. 126. ist $y = \sqrt{2a^2}$, daher die Seite x des Zweyeckes $= \frac{y}{a}\sqrt{4a^2 - y^2} = \frac{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{2a^2}}{a} = \frac{2a^2}{a}$ Fig. 126.

$= 2a =$ dem Durchmesser.

Hiernächst ist eine jede gerade Linie ein Zweyeck.

Setzt man die Seite des Vierecks $= \sqrt{2a^2}$ statt x in die Formel $y = \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2}]}$ $= \sqrt{\frac{a(2a + x)}{2}} - \sqrt{\frac{a(2a - x)}{2}}$, so erhält man die Seite des Achteckes $= \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{2}}$; und wird diese Form statt x gesetzt, so erhält man die Seite des 16 Eckes $= \sqrt{[2a^2 - a \times \sqrt{(2a^2 + a^2\sqrt{2})}]}$, und so fort.

3). Wird die Seite des Zehneckes Fig. 127. nämlich $\frac{1}{2}a[-1 + \sqrt{5}]$, statt y in die Form Fig. 127.

$x = \frac{y}{a}\sqrt{(4a^2 - y^2)} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2}(4a^2 - y^2)}$

gesetzt, so erhalten wir weil $y^2 = a^2.(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$ ist, die Seite des Fünfeckes

$x = a\sqrt{(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})} =$

$\frac{a}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{[1^2 + a^2(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})]}$.

$= \sqrt{a^2 + y^2}$. Diese Formel setzt uns in Stand, die Seite des Fünfeckes EB $= x$ durch Verzeichnung zu finden, wenn wir zuvor die Seite y des Zehneckes $=$ AG $=$ ED, wie in III., suchen, indem wir auf dem Endpunkt E des Radius AE eine Senkrechte EM errichten, EK $= \frac{1}{2}$ AE $= \frac{1}{2}a$ machen, die Hypothenuse AK ziehen, KE nach KG, und sodann AG $= y$ nach EM tragen, wo nun die Hypothenuse AM $= \sqrt{a^2 + y^2} = x =$ der Seite BE des Fünfeckes ist.

Wird die Seite des Zehneckes nämlich $\frac{1}{2}a.[-1 + \sqrt{5}]$ statt x, oder ihr Quadrat $a^2(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})$ statt x^2 in die Formel

$$y = \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{(4a^2 - x^2)}]}$$

gesetzt, so erhält man zum Resultate die Seite des

Nr. 127. Zwanzigeckes $y = \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{(\frac{5}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{5})}]}$.

Rechnen wir nach der Formel

$$y = \sqrt{\frac{a(2a+x)}{2}} - \sqrt{\frac{a(2a-x}{2}}$$ und setzen $x = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$, so finden wir die Seite des 20-Eckes $= \frac{a}{2}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{a}{2}\sqrt{5-\sqrt{5})}$

$= \frac{a}{2}[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{(5-\sqrt{5})}]$.

Eben so könnten wir ferner die Seite des 40- und 80-Eckes berechnen.

VI. Wenn die Seite x eines m-Eckes gegeben ist, so findet man die Seite z eines 4m-Eckes durch nachstehende Formel

$$z = \sqrt{\left[2a^2 - a\sqrt{\frac{a(2a+x)}{2}} - a\sqrt{\frac{a(2a-x)}{2}}\right]}$$

Denn es ist die Seite y zu einem 2m Ecke

$$= \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2}]}.$$

Wird nun hier $x = \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{4a^2 - x^2}]}$ oder $x^2 = 2a^2 - a\sqrt{(4a^2 - x^2)}$ gesetzt, so findet man die Seite zu einem 2·2m Ecke

$$= \sqrt{[2a^2 - a\sqrt{2a^2 + a\sqrt{(4a^2 - x^2)}}]} = z.$$

Da aber (nach p. 273. des Bandes II.)

$$\sqrt{2a^2 + a\sqrt{(4a^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{2a^2 + ax}{2}} + \sqrt{\frac{2a^2 - ax}{2}}$$ so ist auch

$$z = \sqrt{\left[2a^2 - a\sqrt{\frac{a(2a+x)}{2}} - a\sqrt{\frac{a(2a-x)}{2}}\right]}$$

Wird der Radius $a = 1$ gesetzt, so ist

$$z = \sqrt{\left[2 - \sqrt{\frac{2+x}{2}} - \sqrt{\frac{2-x}{2}}\right]}.$$

Es sey $x = 1 =$ der Seite eines 6-Eckes, so ist die Seite z eines 4. 6 oder 24 Eckes

$$\sqrt{[2 - \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}]}$$

Wird dieser Werth in Zahlen gesucht und derselbe statt x in die Formel z substituirt, so erhält man die

Seite des 96-Eckes. Natürlich werden jetzt die Seiten eines solchen Vieleckes fast ganz in die Peripherie eines Kreises zu liegen kommen, und ist die Seite z des 1536 Eckes bekannt, so erhält man schon ziemlich genau die Länge des Umfangs, wenn man z mit 1536 multiplicirt.

VII. Wenn Fig. 128. mit dem Radius GA ein Kreis beschrieben und innerhalb dieses Kreises die Sehne AB, welche die Seite eines Vieleckes ist, mehrmalen nach BC; CD; DE; EF ꝛc. fortgetragen wird, und wenn man sodann die Radien GC; GD; GE ꝛc. bis K; L; M verlängert und zu jeder Sehne ED eine parallele Tangente KL zieht, welche den Bogen DHC in der Mitte H berührt und die verlängerten Radien in L und K schneidet, so erhält man ein regelmäßiges Vieleck OPKLMN ꝛc., welches außerhalb des Kreises fortgeht, jedoch denselben berührt und eben so viele Seiten als das innere Vieleck ABCDEF hat. Ist der Radius GC = GD = a und die Seite CD = b des innern Vieleckes bekannt, so kann man alsdann die Seite KL = c des äußern Vieleckes durch nachstehende Formel berechnen. Fig. 128.

$$c = \frac{ab.}{(a^2 \sqrt{} - \frac{1}{4}b^2)}$$

Denn wenn man aus G auf CD den senkrechten Radius GH = a zieht so ist ID = $\frac{1}{2}$ b und GI = $\sqrt{GD^2 - ID^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$ und in △ GCD ∞ △ GKL ist GI : GD = GH : KL oder $\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2} : b = a : c$, woher $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}}$.

Entwickelt man aus dieser Gleichung die Größe $b = \frac{ac}{\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}c^2)}}$ so kann man aus dem Radius a und der Seite c des äußern Vieleckes die Seite b des innern berechnen.

Ist in der Formel $c = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}b^2)}}$ die Seite b des innern Vieleckes sehr klein, so drückt

man die Wurzelgröße durch eine unendliche Reihe aus und setzt

$$c = b.\left[1 + \frac{b^2}{2.2^2a^2} + \frac{1.3.b^4}{2.4.2.^4a^4} + \frac{1.3.5.b^6}{2.4.6.2^6a^6}\right]$$

oder wenn der Quotient $\frac{b}{2a} = u$ gesucht wird, so ist

$$c = b + \tfrac{1}{2}.Au^2 + \tfrac{3}{4}Bu^2 + \tfrac{5}{6}Cu + \text{ꝛc.}$$

welche Reihe bey einem 1636-Eck außerordentlich schnell zusammen läuft

Auch im 1556-Eck außerhalb eines Kreises liegt schon sehr nahe in der Peripherie, so wie ein dergleichen Vieleck innerhalb des Kreises. Das erste Vieleck ist etwas länger und das zweyte etwas kürzer. Nehmen wir die halbe Summe von beyden, so werden wir die Peripherie ungleich genauer als in IV. erhalten.

Wäre die Peripherie für den Radius 1 nicht schon auf einem andern Wege (§§. 39 und 42.) berechnet, so könnten wir sie jetzt aus den Vielecken finden, und dann würden wir noch einiger Rechnungsvortheile gedenken, durch deren Hilfe man außerordentlich geschwind das in VI. gedachte 4mEck entdekken kann. Hiernach ist dieß aber nicht nöthig.

VIII. Ist der Radius FA = FB = FC ꝛc. Fig. 129. = a und die Sehne AE = b oder die Seite AE eines mEckes bekannt, Fig. 129. so findet man die Sehne AB = BD = DE = x, welche dreymal im Bogen ABCDE fortgetragen werden kann, nämlich die Seite AB = x eines 3mEckes durch nachstehende kubische Formel:

$$x^3 - 3a^2x + a^2b = 0.$$

woraus der Werth von x = AB sehr leicht nach §. 191. des Bd. II. entwickelt werden kann.

Beweis. Es ist △ BFD gleichschenklig und GH ∥ BD, daher auch ∠ FDB = ∠ FBD = ∠ FHG = ∠ DHE. Ferner ist der ∠ AED am Umfange E halb so groß als der ∠ AFD am Mittelpunkte F und weil Bogen DB = ½ DBA, so ist auch ∠ BFD = ∠ AED = ∠ HED. Da nun

im Dreyecke HED zwey Winkel E und H eben so groß sind, als zwey Winkel F und D des Dreyeckes DFB, so ist auch das △ HED ∽ BFD und demnach auch das △ HED gleichschenklig, nämlich L in H = L in D und HE = DE = x. Eben so ist auch AG = AB = x und △ BAG ∽ △ BFD. Jetzt suche man die Seite GH = AE — AG — EH = b — 2x und die Seite BG durch nachstehende Proportion:

FB : BD = AB : BG, nämlich

a : x = x : BG, wo

$$BG = \frac{x^2}{a},$$

so ist $FG = FB - BG = a - \frac{x^2}{a}$ und weil

FG : GH = FB : BD, nämlich

$$\left(a - \frac{x^2}{a}\right) : (b - 2x) = a : x,$$ so wird auch

$a^2b - 2a^2x = a^2x - x^3$ und

$x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$ seyn.

Beyspiel. Es sey a = 1 und $b = \sqrt{3}$ nämlich eben so groß als die Seite eines regelmäßigen Dreyeckes, so wird in der Gleichung

$x^3 - 3x + 1{,}7320508 = 0$

der Werth von x = der Seite des Neuneckes seyn. Wir wollen x nach §. 191. II. des Bd. II. suchen, wo wir zuerst

$x^3 - 300x + 1732{,}0508 = 0$;

a = 0; b = 300; c = 1732,0508; v = 6 und

$u^3 + 1800u^2 - 192000u + 1480508 = 0$ und sodann v = 8 und

$u^3 + 2040u^2 - 1612800u + 6482800 = 0$, weiter v = 4 und

$u^3 + 120520.u^2 - 16044260.u + 64304000 = 0$ endlich v = 0,401 setzen, woher der Werth von

x = 0,6840401.

IX. Wir sehen vor Augen, daß wenn der Radius FA = BF = a und Sehne AE = b zu einem Bogen ABDE Fig. 129. gegeben ist, wir so- Fig. 129.
dann die Seite AB = x, welche dreymal im Bogen

Fig. 229. fortgetragen werden kann, durch Hilfe der Sinustafel finden können, ohne daß wir nöthig haben, den Werth von x aus der zuvor aufgestellten kubischen Gleichung $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$ entwickeln. Denn es ist $AI = \frac{1}{2}b$ und wenn $\angle AFC = \alpha$ gesetzt wird, $\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}b.r}{a}$; $\angle BFC = \frac{1}{3}\alpha$; $BK = \frac{\sin \frac{1}{3}\alpha \times a}{r}$ und $BD = 2.BK$ oder $x = \frac{2a.\ \sin \frac{1}{3}\alpha}{r}$. Es wird daher aus der Gleichung $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$, der Werth von x gefunden, wenn wir $\frac{1}{2}.\frac{b.r.}{a}$ in der Sinustafel nachschlagen, den zugehörigen Winkel α bemerken, diesen durch 3 theilen, zum Winkel $\frac{1}{3}\alpha$ wieder den Sinus nachschlagen und

$$x = \frac{2a.\ \sin \frac{1}{3}\alpha}{r}$$

setzen, auch dann wenn die Gleichung

$$x^3 - px + q = 0$$

vorgelegt ist, können wir daraus den Werth von x auf dieselbe Art finden, weil jetzt $p = 3a^2$ und $q = a^2b$ und demnach $a = \sqrt{\frac{p}{3}}$ und $b = \frac{q}{a^2}$ $= \frac{q}{\frac{1}{3}p}$ ist, wo man daher $\frac{1}{2}\frac{qr}{\frac{1}{3}p.\sqrt{\frac{1}{3}p}} = \sin \alpha$ und

$$x = \frac{\sin \frac{1}{3}\alpha}{r}.2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

zu setzen hat, welche Resultate mit den §. 41. angeführten stimmen.

X. Durchaus ist chord $\alpha = 2.\sin \frac{1}{2}\alpha$ und $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ chord 2α. Wenn zum Beyspiele die Chorde BD zum $\angle BFD = \alpha = 40°$ gesucht wird, so schlägt man den Sinus BK von $\frac{1}{2}\alpha = 20°$, (nämlich vom $\angle BFC$) nach und duplirt denselben, weil $BD = 2BK$ ist. Wird der $\angle BFC = \alpha$ gesetzt, so ist $\angle BFD = 2\alpha$; $BD =$ chord. 2α und $BK = \frac{1}{2}BD$ nämlich $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ chord. 2α.

Ist BD die Seite eines n- oder 9Eckes; so

enthält der Winkel BFD am Mittelpunkte $\frac{360}{m}$. oder Fig. 129.
$\frac{360}{9} = 40°$ und es ist sodann der Sinus von $20°$
$= \frac{1}{2}$ BD.

Verlangt man die Seite BD eines regelmäßigen $m = 13$ Eckes, dessen Radius $FB = FD = a$, so wird der Sinus des Winkels $\frac{360}{2.m} = \frac{180}{m} =$
$\frac{180}{13} = 13° 50' 46,'' 15 = \gamma$ nachgeschlagen und
$BD = \frac{2.\sin\gamma}{r} \times a$ gesetzt.

Nach III. ist, wenn der Radius $= 1$ gesetzt wird, die Seite eines regelmäßigen Zehneckes $=$
$\frac{1}{2}.[-1 + \sqrt{5}]$ und (nach V.) die Seite eines Zwölfeckes $= \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.
Halbiren wir diese Seiten, so erhalten wir $\sin 18°$
$= \frac{1}{4}[-1 + \sqrt{5}]$ und
$\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}[\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}]$.
und weil $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, so ist
$\cos 18° = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = \sin 72°$.
und $\cos 15° = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}[\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}]$.

Jetzt können wir nun auch (nach den §. 38. aufgestellten Formeln) $\sin(18 + 15°)$;
$\sin(18 - 15°)$; $\cos 33° = \sin 57$ und $\cos 3° =$
$\sin 87°$ berechnen, und wenn der Sinus von $3°$ bekannt ist, so wird auch die Sehne von $6°$ und mithin auch die Seite des 60 Eckes bekannt seyn.

Ferner ist die Seite des Fünfeckes oder die Sehne von $72° = \frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$, daher
$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$ und
$\cos 36° = \frac{1}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}[1 + \sqrt{5}]$.
Da nun $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so wird man nun auch $\sin(36 \pm 30)°$ und mithin auch die Sehne von $42°$ oder die Seite vom 30-Ecke berechnen können.

Der Leser wird hieraus absehen, wie man Aus-

drücke für sin. und cos von 3 zu 3 Graden angeben und hierüber eine Tafel anfertigen kann.

§. 45.

Berechnung der Fläche der vieleckigen und krummlinigen Figuren.

I. Die Berechnung der Fläche der vieleckigen und krummlinigen Figuren gründet sich auf die Berechnung der einfachen Figuren, worüber wir folgende schon bekannte und einige andere Ergänzungs-Sätze anführen.

1) Die Fläche eines Parallelogramms wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der senkrechten Höhe multiplicirt.

2) Die Fläche f eines Dreyeckes wird gefunden, wenn man irgend eine Seite desselben zur Grundlinie a annimmt, sodann den senkrechten Abstand h derselben vom Scheitel des gegenüberstehenden Winkels mißt und $f = \frac{ah}{2}$ setzt. Zuweilen sieht man sich genöthiget, die Grundlinie zu verlängern, oder hierzu aus dem gegenüberstehenden Scheitel eine Parallele zu ziehen, wo nun h der senkrechte Abstand dieser Paralleten ist.

2) Die Fläche f eines Trapezes ABCD Fig. 39. wird gefunden, wenn man nicht nur die beyden parallelen Seiten AB = a und DC = b, sondern auch ihren senkrechten Abstand EF = h mißt und $f = \frac{(a+b)h}{2}$ setzt. Zieht man eine mittlere Parallele GH = c, wo BG = ½ BC oder EL = ½ EF, so ist f = GH × EF = ch.

4) Die Fläche f eines Trapezoides und eines jeden Viereckes ABCD Fig. 40. wird gefunden, wenn man die Entfernung AC = a der ersten Ecke A von der dritten C mißt, hierzu eine Parallele BE aus

der zweyten oder vierten Ecke führt, die darauf aus D gefällte Senkrechte DE = h mißt und $f = \frac{ah}{2}$ setzt.

Eben so verfährt man mit dem Vierecke ADCB Fig. 41., wo man zu AC die Parallele BE zieht, hierauf die Senkrechte DE fällt und $f = \frac{AC \times DE}{2}$ setzt. Oder man zieht zu BD eine Parallele CG, mißt den senkrechten Abstand AG von A und mißt auch BD selbst, wo alsdann die Fläche aus $f = \frac{CD \times AG}{2}$ gefunden wird.

Der Beweis zu diesen Sätzen ist §§. 26 und 37. zu finden.

5) Die Fläche f eines schmalen Abschnittes DFE Fig. 32. wird gefunden, wenn man die Sehne DF = a und die größte Höhe UE = h mißt und $f = \frac{2ah}{3}$ setzt. Den Beweis hierzu findet man §. 42. VIII. Es ist jedoch zu merken, daß wenn ein Abschnitt schon ziemlich groß ist, und im Verhältnisse der Länge schon eine ansehnliche Breite hat, man ihn sodann wie eine zusammengesetzte Figur behandelt.

Anmerkung. Einen Bogen DEF, dessen Sehne DF sehr groß gegen die Breite UE des Abschnittes DFE ist, werden wir hinfort einen flachen Bogen nennen.

6) Die Fläche f eines Trapezes EABCD Fig. 130. welches einen nicht zu stark auswärts gehenden Bogen ABC zwischen den parallelen Seiten AE und CD hat, wird gefunden, wenn man zur Sehne AC eine parallele Tangente BG des Bogens zieht, hierdurch die Verlängerung DC in G schneidet und $f = \left[\frac{AE + DC}{2} + \frac{2}{3} GC\right] \times AF$ oder $f = [3AE + 4DG - DC] \frac{AF}{6}$ setzt, wo AF eine Senkrechte zu AE oder DG ist. Fig. 130.

Beweis. Es iſt Abſchnitt ACB $= \frac{2}{3}$. AC $\times$ IB, wo IB $\perp$ AC. Man ziehe aus B die Parallele BH zu GC oder CF, ſo iſt BH $=$ GC und $\angle$ BHI $=$ $\angle$ BHC $=$ HCF $=$ ACF und es ſind daher die beyden rechtwinkligen Dreyecke BFH und AFC einander ähnlich, weshalb

IB : BH $=$ FA : AC und

AC $\times$ IB $=$ AF $\times$ BH $=$ AF $\times$ GC.

Da nun AC $\times$ IB $=$ AF $\times$ GC, ſo iſt auch Abſchnitt ACB $= \frac{2}{3}$ AC $\times$ IB $= \frac{2}{3}$. AF $\times$ CG.

Man addire zum gradlinigen Trapeze EACD $=$ (EA $+$ DC) $\times \frac{AF}{2}$ die Fläche des Abſchnittes ACB, ſo erhählt man die Fläche f der vorgelegten Figur

$$EABCD = \frac{(EA + DC)}{2} \times AF + \frac{2}{3} CG \times AF = \left[\frac{EA + DC}{2} + \frac{2}{3} GC\right] \times AF =$$

$$[3EA + 3DC + 4GC] \frac{AF}{6}.$$

Subſtituire man hierher den Werth für GC $=$ DG $-$ DC, ſo findet man

$$f = \left[\frac{3EA + 4DG - DC}{6}\right]. AF$$

Fig. 131. 7) Die Fläche f eines Trapezes EABCD Fig. 131. mit einem einwärtsgehenden flachen Bogen ABC wird gefunden, wenn man zu AC die parallele Tangente BG zieht und hierdurch DC in G ſchneidet, den ſenkrechten Abſtand FH und die parallelen Seiten EA; DC und DG mißt und $f = \left[\frac{3EA + 4DG - DC}{6}\right] \times$ FH wie vorher, ſetzt.

Denn wenn man die Fläche des Abſchnittes ACB $= \frac{2}{3}$ FH $\times$ GC von der Fläche des geradlinigen Trapezes EACD $= \frac{(EA + DC)}{2} \times$ FH abzieht, ſo bleibt die begehrte Fläche EABCD $=$ f übrig, weshalb $f = \left[\frac{EA + DC}{2} - \frac{2}{3} GC\right] \times$ FH

$= \left[\frac{3EA + 3DC - 4GC}{6}\right] \times FH$ und weil $GC = DC - DG$ und $-4GC = -4DC + 4DG$, so ist $f = \frac{[3EA + 4DG - DC] \times FH}{6}$.

Anmerkung. Daß Abschnitt ACB $= \frac{2}{3} FH \times GC$ ist, kann auf dieselbe Art wie in Nr. 6. und nach demselben Text bewiesen werden, wenn man aus A eine Senkrechte auf DC und aus B eine Senkrechte auf AC und aus B eine Parallele zu GC zieht, welche AC schneidet.

8) Die Fläche f der Trapezien ABCDEFA Fig. 132; 133 u. 134. mit zwey aus- oder einwärts gehenden flachen Bögen BCD und EFA wird gefunden, wenn man zu den Sehnen BD und EA die parallelen Tangenten GH und FG zieht, hierdurch ED und BA oder deren Verlängerung in H und G schneidet, den senkrechten Abstand IK der parallelen Seiten AB und DE bemerkt und $f = \left[\frac{4(BG + EH) - (AB + DE)}{6}\right] \times IK$ setzt. Fig. 132. — 133. — 134.

Denn es ist in Fig. 132. ABCDEFA $=$ ABDE $+$ BDC $+$ AEF, daher

$f = \frac{(AB + DE)}{2} IK + \frac{2}{3} DH \times IK + \frac{2}{3} AG \times KI$

$= \left[\frac{AB + DE}{2} + \frac{2}{3}(DH + AG)\right] IK =$

$\left[\frac{3AB + 3DE + 4DH + AG}{6}\right] \cdot IK.$

und weil $DH = EH - ED$ und $AG = BG - BA$, so ist $f = \left[\frac{4EH - DE + 4BG - BA}{6}\right] \times IK.$

In Fig. 133. ist der Abschnitt BDC negativ, daher

$f = ABDE = BDC + AEF =$

$\left[\frac{AB + DF}{2} + \frac{2}{3}(AG - DH)\right] \cdot IK =$

$\left[\frac{3AB + 3DE + 4AG - 4DH}{6}\right] \times IK$ und

weil $DH = ED - EH$ und $AG = BG - BA$,

so ist $f = \left[\frac{4EH + DE + 4BG - AB}{6}\right] \times IK.$

In Fig. 134. sind beyde Abschnitte BDC und EAF oder die Seiten DH und AG negativ, daher

$$f = \left[\frac{AB + DE}{2} - \frac{2}{3}(DH + AG)\right] \times IK$$

$$= \left\{\frac{3AB + 3DE - 4DH - 4AG}{6}\right] \times IK$$

und weil $DH = DE + EH$ und $AG = AB - BG$,

so ist $f = \left[\frac{4EH - DE + 4BG - AB}{6}\right] \times IK.$

Es wird daher die Fläche aller drey Figuren nach einerley Formel $f =$

$$[4(BG + EH) - (AB + DE)] \times \frac{IK}{6}$$

berechnet.

Fig. 132. — 133. 9) Ein Dreyeck BEDC Fig. 132 und 133. mit einem aus- oder einwärts gehenden flachen Bogen DCB wird nach seiner Fläche f berechnet, wenn man irgend eine gerade Seite ED zur Grundlinie und den senkrechten Abstand IK des gegenüber stehenden Scheitels B zur Höhe annimmt, zur Sehne BD die parallele Tangente CH zieht und hierdurch ED oder dessen Verlängerung in H schneidet und

$f = [4EH - ED] \cdot \frac{IK}{6}$ setzt.

Diese Formel erhält man, wenn man das

$\triangle EDB = \frac{ED \times IK}{2}$ und den Abschnitt BDC besonders berechnet und auf dieselbe Art zu Werke geht, wie vorher. Man kann aber auch in der vorigen Formel

$$f = [4EH - DE + 4BG - AB] \times \frac{IK}{6}$$

die beyden Linien AB und BG = o setzen, wodurch man ebenfalls die vorgelegte Fläche des Dreyeckes DBCD erhält.

II. Andere Flächen, als die vorhergehenden werden gewöhnlich wie zusammengesetzte behandelt und können nicht durch eine einzige Multiplikation erhalten werden, es müßte denn eine Verwandlung vorher gehen, worüber wir nun folgendes anführen.

1) Ein m oder 6 Eck wird in ein (m — 1) oder 5 Eck, und ein 5 Eck wird in ein 4 Eck auf folgende Art sehr leicht verwandelt:

Gesetzt, es wäre das Sechseck AECDEF Fig. 135. vorgelegt und man wollte darin die Ecke in B wegbringen und sie nach G in die Verlängerung von DC dergestalt vorschieben, daß das entstehende Fünfeck AGDEF eben so groß als das vorgelegte Sechseck ABCDEF ist; so zieht man zuerst die dem Winkel B anliegenden Seiten BA und BC in Betracht und denkt sich ein △ ABC, legt an der, dem Winkel B gegenüber stehenden Seite AC ein Abschiebe-Dreyeck an und führt zu AC aus B eine Parallele BG, welche die nächste Seite DC des Vielecks oder dessen Verlängerung DCG in G schneidet, und zieht die Diagonale AG. Das jetzt entstehende Vieleck AGDEF hat nun offenbar eine Ecke weniger als das vorgelegte ABCDEF, und gleichwohl ist eins so groß als das andere, weil die Dreyecke ACB und ACG eine gleiche Grundlinie AC haben und ihre Höhe zwischen den parallelen Seiten AC und BG liegt. Da nun △ ACG eben so groß als △ ACB ist, so wird auch AFEDCB = AFDCGA seyn. Fig. 135.

Um auch die einwärtsgehende Ecke in E wegzuwerfen, ziehe man zu DF die Parallele EH und schneide dadurch die folgende Seite FA des Vieleckes in H, ziehe die Diagonale DH, so ist △ DEF = △ DHF und demnach auch Viereck AGDH = Fünfeck AGDEF = Sechseck ABCDEF.

Denn wenn man sich vom Fünfecke ABCDF einmal das △ DFE und ein andermal ein gleiches △ DFH wegdenkt, so muß in beyden Fällen eine gleiche Fläche übrig bleiben, weshalb auch ABCDEF = ABCDH.

Hat man ein Sechseck in ein Fünfeck und dieß

in ein Viereck verwandelt, so braucht man nur die Fläche dieses Viereckes nach I. Nr. 4. zu suchen, und dieß ist zugleich auch die Fläche des Fünf- oder Sechseckes.

Anmerkung. Eine einwärtsgehende Ecke E oder ein einwärtsgehendes △ DEF kann nur dann weggeworfen werden, wenn eine von den anliegenden Seiten FA oder DC lang genug ist. Wäre z. B. FA kürzer als FH, so könnte EH sie nicht schneiden und man müßte demnach mit AEI die andere Seite DC zu schneiden suchen und das △ FED nach FID schieben, und wäre auch DC zu kurz, so könnte diese Verschiebung gar nicht füglich geschehen.

Fig. 136. Zuweilen kann ein einwärtsgehendes △ BDC Fig. 136. auch nicht weggeschoben werden, wenn nämlich die folgenden Seiten BA und DD eine solche Lage haben, daß ∠ BDE oder ∠ DBA gegen 180° hat.

2) Mittelst der jetzt gezeigten Verschiebung der Dreyecke können wir nun ein jedes Vieleck FGABCDEF Fig. 136. in ein einziges Dreyeck 3C5 verwandeln, wenn wir in den Punkt F eine gerade Linie HI nach einer willkührlichen Richtung ziehen, (oder HI in GF selbst legen) G1 ∥ AF; A2 ∥ B1; B3 ∥ C2 und ferner E4 ∥ DF und D5 ∥ C4 machen, durch welche Parallelen nach und nach die Punkte 3 und 5 zum gesuchten Dreyecke 3C5 geschnitten werden.

Denn es ist △ AFG = △ AF1 und es hat jetzt die vorgelegte Figur die Gestalt F1ABC ꝛc., sodann ist △ 1BA = 1B2 und es hat jetzt die Figur die Gestalt F2BCD ꝛc. und da △ 2CB = △ 2C3, so erhalten wir jetzt die Gestalt F3CDEF. Ferner ist △ FDE = FD4, wo jetzt die Gestalt 4DC3 zum Vorschein kömmt, und endlich ist △ 4CD = 4C5, wo das gesuchte Dreyeck 5C3 zum Vorschein kömmt.

Fig. 137. 3) Hat eine Figur 137. gar zu viele Ecken, so pflegt man sie in zwey, drey und mehrere Theile oder Parthien AEDCB; AEFGH und GFIKL einzutheilen, jede Parthie besonders in ein Viereck zu verwandeln, die Fläche eines jeden Viereckes oder Parthie zu berech-

rechnen und die Fläche aller Parthien zu addiren. Bey diesen Verwandlungen der Parthien in Vierecke erfordert die Vorsicht, daß man anfangs nur die kleinen Dreyecke, nach und nach immer größere Dreyecke wegzubringen und am Ende ein wohlgestaltes Trapezoid zu erhalten sucht, das leicht und sicher nach I. Nr. 4. berechnet werden kann. Auch hat man es nicht gern, wenn eine Parthie mehr als 8 bis 9 Ecken hat, weil man sonst leicht was versehen kann, und es ist daher besser, eine Parthie zu viel, als eine zu wenig anzulegen.

4) Ein breiter auf dem Papier gegebener Abschnitt EABCDE Fig. 138. wird nach seiner Fläche f am schicklichsten berechnet, wenn man a = 10 verjüngte Ruthen mit dem Zirkel faßt, diese im Bogen als Sehnen AB; BC; CD fortträgt, den Inhalt der Abschnitte ABG; BCI; CDL und DEN und auch den Inhalt der gradlinigen Figur ABCDEA sucht und alles zusammen addirt, wobey zu merken ist, daß der Inhalt derjenigen Abschnitte, welche gleiche Grundlinie AB = BC = CD = a haben, gefunden wird, wenn man ihre Höhe FG; HI und KL addirt und $\frac{2}{3}$ der Summe (FG + HI + KL) mit a multiplicirt. Wären aber selbst auch die Höhen FG; HI und KL, wie bey einer Kreislinie AGBICLD einander gleich, so hätte man nur nöthig, einen einzigen Abschnitt ABG zu berechnen und denselben mit der Zahl 3 oder 4 dergleichen Abschnitte zu multipliciren. Und wäre ein einziger Abschnitt DEN ungleich, so müßte man ihn auch besonders berechnen. Sucht man nun auch den Inhalt der geradlinigen Figur EABCDE und addirt hierzu den Inhalt jener Abschnitte, so erhält man den Inhalt der ganzen Figur. Daß die Summe der oben genannten drey Abschnitte, welche eine gleiche Sehne AB = BC = CD = a haben, durch $\frac{2}{3}$ (FG + HI + CD) × a gefunden wird, erhellet daraus, daß die Abschnitte ABG + BCI + CDL = $\frac{2}{3}$ AB × FG + $\frac{2}{3}$. BC × HI + $\frac{2}{3}$ CD × KL = $\frac{2}{3}$. a. FG + $\frac{2}{3}$ a. HI + $\frac{2}{3}$ a. KL = $\frac{2}{3}$ a × (FG + HI + KL) ist. Fig. 138

5) Die Fläche einer viereckigen Figur ABCDEF
Fig. 139. Fig. 139., mit zwey parallelen graden Seiten AB und ED und mit zwey gegenüberstehenden weit aus- oder einwärts gehenden Bögen BCD und AFE, wird gefunden, wenn man noch eine oder mehre Parallelen CF zwischen AB und DE zieht und dadurch die ganze Figur in mehre einzelne Flächen ABCF und FCDE zerlegt deren Bögen BC; CD; EF ꝛc. flach sind, den Inhalt dieser einzelnen Flächen nach I. Nr. 8. sucht und diese addirt.

6) Die Fläche eines Dreyeckes BAEDC oder
Fig. 140. BAFDE Fig. 140., mit zwey geraden Seiten BA und BE und einem aus- oder einwärts gehenden breiten Bogen AEDC oder AFGE, wird gefunden, wenn man aus B eine oder mehre Linien BD nach den Bogen hin zieht und dadurch die vorgelegte Figur in mehre Dreyecke ABD und BDC (oder BDE) mit flachen Bögen zerlegt, diese nach I. Nr. 9. berechnet und addirt.

7) Die Fläche eines Trapezoides ABCDEF Fig.
Fig. 141. 141., mit zwey geraden und zwey krummen gegen überstehenden Seiten, wird gefunden, wenn man aus A nach B eine Diagonale zieht, jedes △ ADEF und DABC besonders nach I. Nr. 9 berechnet und beyde addirt. Ist aber ein Bogen FED nicht flach, so muß man zuvor eine gerade Linie BE ziehen, welche ungefähr die Bögen halbirt, worauf man sodann jedes Viereck ABEF und BCDE besonders berechnet und diese addirt. Daß man sodann das Viereck ABEF in zwey Dreyecke AFB und BFE, und das Viereck BEDC in zwey Dreyecke zerlegen müsse, versteht sich von selbst.

Anmerkung. Sind die Bögen FED oder ABC sehr gekrümmt und lang, so muß man die vorgelegte Figur nicht bloß in zwey, sondern in drey und vier besondere Vierecke durch gezogene Zwischenlinien BE eintheilen, so daß jeder Bogen FE; ED ꝛc. flach wird.

Fig. 142. 8) Eine Figur ABCDEF Fig. 142. wird berechnet, wenn man die Fläche des geradlinigen Dreyeckes

ACE; die Fläche der Abschnitte ACB; CED; EAF sucht und den Inhalt der ganzen Figur = △ ACE + Absch. CED + Absch. EAF — Absch. ACB setzt.

Ist aber der Abschnitt CED nicht flach, so zieht man die Sehnen CD und DE und dann werden zum gradlinigen Vierecke ACDEA die Abschnitte in CD und DE und EAF addirt und von der Summe der Abschnitt ACB subtrahirt. Wäre auch der Bogen ABC nicht flach, so müßte man auch die Sehnen AB und BC ziehen und zum geradlinigen Fünfecke ABCDE die Abschnitte an den Sehnen CD; DE und EA addiren und von der Summe die Abschnitte an den Sehnen AB und BC in Abzug bringen.

9) Haben die Bögen Fig. 143. die Gestalt ABCDE wo der Mittelpunkt des einen Stückes ABC diesseits, der Mittelpunkt des andern Stückes CDE aber jenseits oder außerhalb der Figur liegt, wo zwar beyde Bögen zusammen eine Schlange machen, aber der eine auswärts und der andere einwärts geht; so wird zuvor der sogenannte Wendepunkt, nämlich derjenige Punkt C bemerkt, wo ein einwärts und auswärts gehendes Stück Bogen zusammen hängt, [und eben so bemerkt man mehre Wendepunkte E zwischen CDE und EFG; N zwischen LMN und NOP, und P zwischen NOP und PQR in der vorgelegten Figur]; sodann zieht man mehre Sehnen EG; GI ꝛc. zu dem großen weiten Bogen EFGHIKLMN und so auch Sehnen CA; AR; RP zum stark gekrümmten Bogen; theilt, wenn man will, die ganze Figur in mehre Parthien als PCBASRQ; PCDENO und NEFGHIKLM, berechnet die Fläche der einzelnen Parthien und addirt sie zusammen. Fig. 143

Eben so haben wir auch in Fig. 144. zuerst den Wendepunkt C des Schlangenbogens ABCDE bemerkt, sodann die nöthigen Sehnen dergestalt gezogen, daß alle Abschnitte schmal genug werden, worauf wir die ganze Figur in mehre Parthien ABCHI; HCDG und GDEF zerlegt haben. Daß man zum Inhalte des geradlinigen Fünfeckes ABCHI die Abschnitte in AB und BC addiren, vom Inhalte der geradlinigen Vier- Fig. 144.

ecke HCDG und GDEF die Abschnitte in CD und DE subtrahiren müsse, braucht keiner Erinnerung.

10) Anmerkungen. 1) Viele Figuren im Felde können nicht so, wie auf dem Papiere, behandelt werden, wenn man aber erst die Kunst gelernt hat, die Figuren im Felde richtig zu Riß und zu Papier nach einem kleinen Maaßstabe zu bringen, so berechnet man die Figur auf dem Papiere nach dem kleinen Maaßstabe und dann muß die Zahl der kleinern Quadrate, welche in der Figur auf dem Papiere enthalten sind, mit der Zahl der Quadratruthen, welche in der Figur auf dem Felde enthalten sind übereinstimmen.

2) Um zu untersuchen, ob man in Berechnung der Flächen auf dem Risse sich nicht geirrt habe, theilt man ein Blatt durchsichtiges Papier in große Quadrate von 100 und 10000 □R. und ein solches Quadrat in einzelne □R. ein, und gibt sodann Achtung, wie viele große und kleine Quadrate im Risse enthalten sind, oder darin fortgetragen werden können.

III. Berechnung der geradlinigen Figuren aus den gemessenen Grenz-Linien und Winkeln.

Aufgabe. Von einer Waldfläche ABCDEFGHIA
Fig. 145. Fig. 145. hat man die Länge der äußern Grenzlinien AB = a; BC = b; CD = c; DE = d ꝛc. mit der Kette — und die Winkel nAB = α; nBC = β; nCD = γ; nDE = δ; ꝛc. [um welche Winkel die sich parallel bleibende Nordlinie An; Bn; Cn ꝛc. von den einzelnen Seiten AB; BC; CD ꝛc. abweicht,) mit der Boussole gemessen, und man nimmt diejenige Linie AR, welche senkrecht auf der Nordlinie An steht zur Abscissenlinie an; man fragt, wie groß die Abscisse AK und Ordinate KB zum Punkte B; wie groß die Abscisse und Ordinate AL und LC zum Punkte C, wie groß die Abscisse und Ordinate AN und ND; AQ und QE; AR und RF; AT und TG ꝛc. zu einem jeden folgenden Punkte D; E; F; G ꝛc. des Umfangs und wie groß die Fläche der Dreyecke und Trapezien AKB; KBCL; LCDN; NDEQ; QEFR; RFGT;

TGHVW ꝛc. und wie groß die Fläche der ganzen Fi- Fig. 145.
gur ABCDEFGHIA sey?

Auflösung.

Man denke sich zu jedem Punkte B; C; D; E ꝛc. der Figur von einer Ordinate zur andern Parallellinien BM; CO; DP; ES; FU ꝛc. zur Abscisse AR, so ist

1) im rechtwinkligen Dreyecke BKA der $\angle$ ABK $=$ $\angle$ BAn $= \alpha$, die Seite BA $= a$, folglich AK $= \frac{a \cdot \sin \alpha}{r}$ und BK $= \frac{a \cdot \cos \alpha}{r}$ und $\triangle$ AKB $= \frac{AK \times KB}{2} = \frac{a^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2r^2}$.

2) Im rechtwinkligen Dreyecke CMB ist der $\angle$ BCM $=$ $\angle$ CBn $= \beta$ und Seite CB $= b$, daher $BM = \frac{b \cdot \sin \beta}{r} = KL$ und $CM = \frac{b \cdot \cos \beta}{r}$. Ferner ist $AL = AK + KL = \frac{a \cdot \sin \alpha}{r} + \frac{b \cdot \sin \beta}{r}$, $LM = KB$ und $LC = LM + MC = \frac{a \cdot \cos \alpha}{r} + \frac{b \cdot \cos \beta}{r}$, daher Trapez $KBCL = \frac{(KB + LC) \cdot BM}{2} = \left(\frac{a \cdot \cos \alpha}{r} + \frac{1}{2} \frac{b \cdot \cos \beta}{r}\right) \times \frac{b \cdot \sin \beta}{r}$ und Fläche $ALCB = \triangle AKB + \square KBCL$.

3) $\angle$ CDO $= \gamma$; Seite DC $= c$; daher $CO = LN = \frac{c \cdot \sin \gamma}{r}$ und $DO = \frac{c \cdot \cos \gamma}{r}$; $AN = AK + KL + LN = \frac{a \cdot \sin \alpha}{r} + \frac{b \cdot \sin \beta}{r} + \frac{c \cdot \sin \gamma}{r}$; $ND = NO + OD = \frac{a \cdot \cos \alpha}{r} + \frac{b \cdot \cos \beta}{r} + \frac{c \cdot \cos \gamma}{r}$; Trapez $LCDN = \left[\frac{a \cdot \cos \alpha}{r} + \frac{b \cdot \cos \beta}{r} + \frac{1}{2} c \cdot \cos \gamma\right] \times \frac{c \cdot \sin \gamma}{r}$.

Eben so wird

4) $NQ = \frac{d \cdot \sin \delta}{r}$; $PE = \frac{d \cdot \cos \delta}{r}$;

Fig. 145. $AQ = \frac{a.\sin\alpha}{r} + \frac{b.\sin\beta}{r} + \frac{c.\sin\gamma}{r} + \frac{d.\sin\delta}{r}$ und

$QE = \frac{a.\cos\alpha}{r} + \frac{b.\cos\beta}{r} + \frac{c.\cos\gamma}{r} + \frac{d.\cos\delta}{r}$ seyn,

Da aber $\angle$ nDE $= \delta$ größer als 90 ist, so wird cos δ negativ und mithin auch das Glied $\frac{d.\cos\delta}{r}$ in der Ordinate QE negativ seyn, weshalb QE kürzer als ND. Eben so ist auch

5) $\angle$ BEF $= \varepsilon$ negativ, und zwar sind in

$AR = \frac{a.\cos\alpha}{r} + \frac{b.\cos\beta}{r} + \frac{c.\cos\gamma}{r} + \frac{d.\cos\delta}{r} + \frac{e.\cos\varepsilon}{r}$

die beyden letzten negativ werdenden Glieder größer als alle vordere positive Glieder, weshalb sich RF auf einen negativen Werth reducirt und demnach auch diese Ordinate RF eine verkehrte Stellung gegen die vorhergehenden Ordinaten annimmt, und es behalten die folgenden Ordinaten die verkehrte Stellung.

Der Sinus des Winkels PEF $= \varepsilon$ ist aber kleiner als 180° und mithin sin ε und auch $QR = \frac{e.\sin\varepsilon}{r}$ positiv, weshalb sich auch die vorige Abscisse AQ und QR vermehrt, dagegen ist

6) $\angle$ RFG, nämlich der Bogen mpq größer als 180° und kleiner als 270°, weshalb sowohl Sinus als Cosinus dieses Bogens negativ, die Abscisse AT um RT kürzer als AR wird und die vorige negative Ordinate TU = RF noch um UG vermehrt wird. Die Fläche des Trapezes RTGF ist aber positiv, weil − mit − multiplicirt ein positives Produkt gibt.

Bey dieser Behandlungsweise haben wir weiter keine als die schon längst bekannte Sätze zu merken. Als: alle Winkel oder Bögen zwischen der Nordlinie Fm und einer vorgelegten Seite FG sind in einem von der linken zur rechten gehenden Kreis mpq gemessen worden. Alle Sinus von 0 bis 180° sind positiv und die übrigen negativ, und alle Cosinus von 90 bis 270° sind negativ und die übrigen positiv.

Anmerkung. Mißt man mit einem Theodolithen von der vorgelegten Figur ABCDE ꝛc. die innern Winkel ABC $= \lambda$; BCD $= \mu$; CDE $= \nu$ ꝛc. und legt man die erste Linie AB gegen An so an, daß Winkel nAB $= \alpha^{\circ}$ ist, so kann man alsdann die vorigen Winkel nBC $= \beta$; nCD $= \gamma$; nDE $= \delta$ ꝛc. berechnen und demnach auch die Figur gerade so behandeln, wie vorhin. Nämlich es ist $\angle$ ABK $= \alpha$; $\angle$ CBK $= \angle$ CBA $- \angle$ ABK $= \lambda - \alpha$ und $\angle$ nBC $= 180^{\circ} - \angle$ CBK, daher auch $\beta = 180^{\circ} + \alpha - \lambda = \angle$ BCM. Eben so ist $\angle$ DCM $= \angle$ DCB $- \angle$ BCM $= \mu - \beta$, und $\angle$ nCD $= 180 - \angle$ DCM $= 180 + \beta - \mu = \gamma$, und auf diesem Wege finden wir ferner $\delta = 180 + \gamma - \nu$, u. s. f. Wenn wir daher irgend einen Winkel nCD $= \gamma$ begehren, so müssen wir den vorhergehenden $\angle$ nBC $= \beta$ zu 180° addiren und von der Summe der innern $\angle$ BCD $= \mu$ subtrahiren, und β selbst ist $= 180 + \alpha - \lambda$; dagegen $\alpha =$ einen beobachteten oder auch willkührlichen $\angle$ nAB. Fig. 145.

Zweyte Anmerkung. Daß alle innere Winkel eines unregelmäßigen m Eckes zusammen $m \times 180 - 2 \cdot 180^{\circ} = (m - 2) \times 180^{\circ}$ betragen, das kann sich jeder selbst überzeugen, wenn er in der Mitte der Figur einen Punkt macht, aus demselben in jede Ecke der Figur eine Linie zieht und dadurch die ganze Figur in so viele Dreyecke zerfällt als die Figur Seiten hat, wo nun die Winkel aller m Dreyecke zusammen $m \cdot 180^{\circ}$ ausmachen, wovon jedoch die 360 oder 2×180 abgehen, die um den innern Punkt herum liegen. Hat man daher alle innere Winkel des vorgezeichneten Neuneckes IABCDE ꝛc. gemessen, so müssen diese zusammen $7 \cdot 180 = 1260^{\circ}$ betragen, außerdem hat man fehlerhaft beobachtet.

§. 46.

Erster Unterricht im Aufnehmen einer Figur im Felde und zwar durchs Kreuzmaaß.

Wenn man zu einer großen Figur im Felde eine ganz kleine, vollkommen ähnliche, Figur auf dem Papiere verzeichnet, woraus man zugleich die Größe aller Winkel und Linien der Figur im Felde erkennen kann, so wird die große Figur im Felde aufgenommen, und die dazu gefertigte kleine Figur heißt Riß.

Hierher gehören nun folgende Aufgaben.

I. Aufgabe. Zu einer Figur ABCDEF Fig. 146. im Felde, welche sich vorzüglich in die Länge aber wenig in die Breite zieht, einen Riß abcdef dergestalt zu fertigen, daß man daraus die Lage und Entfernung aller Punkte im Felde erkennen kann.

Fig. 146.

Auflösung. Man lege eine gerade Linie GO im Felde so an, daß alle Punkte A; B; C; D; E und F der Figur nicht sehr fern von derselben, (manche links, manche rechts) zu liegen kommen, welche günstige Lage hier bedungen wird, außerdem muß die Figur auf eine andere, nachher zu erzählende Art behandelt werden; sodann bemerke man in der geraden Linie GO die Punkte H; I; K; L; M; N, worauf die aus den Ecken A; B; C; D; E; F gefällten Senkrechten AH; BI; CK; DL; EM; FN fallen, welches meistens nach dem Augenmaaße, oder wenn die Punkte zu entfernt liegen, durch Hilfe eines Kreuzmaßes oder Winkelspiegels §. 18. II. geschehen kann; lasse sogleich die Abscisse GH und Ordinate HA zum Punkte A; die Abscisse GI und Ordinate IB zum Punkte B, und sofort GK und KC; GL und LD; GM und ME; GN und NF messen und trage die gefundene Länge einer jeden Linie nach Ruthen und Fußen in ein Register, wo man denjenigen Ordinaten HA; LD; ME, welche rechts gehen, ein R oder ein + vorsetzt, die andern IB; KC; NF, aber welche links gehen, durch ein vorgesetztes L oder — bezeichnet;

Die Messung der Figur ABCDEF im Felde ist nun Fig. 246.
zu Ende, und jetzt schreitet man zum Auftragen derselben aufs Papier, wo man die dazu gehörige kleine Figur abcdef auf folgende Art erhält.

Man ziehe auf dem Papiere eine gerade Linie go, welche die Stelle der Linie GO im Felde vertritt; fasse sodann mit einem guten Zirkel von dem im §. 32. V. beschriebenen verjüngten Maaßstabe eben so viele kleine Theile, als wie viel Ruthen in GH enthalten sind, und trage diese Abmessung des Zirkels in gh auf der geraden Linie go ein, oder mit andern Worten, man mache gh verjüngt = GH. Ferner fasse man auch mit dem Zirkel eben so viele kleine Theile und Zehntel derselben, als wie viel Ruthen und Fuße in GK enthalten sind, und trage diese Theile, welche verjüngte Ruthen und Fuße heißen, in gi ein, und so fahre man fort die Abscisse gk verjüngt = GK; gl verjüngt = GL; gm verjüngt = GM; gn verj. = GN zu machen, wo man nun im Punkte h die rechts oder niederwärts gehende Senkrechte ha auf go errichtet, in den Punkten i und k die links oder aufwärts gehenden Senkrechten ib und kc, in l und m die niederwärts und in n die aufwärts gehenden Senkrechten auf go errichtet, ha verjüngt = HA; ib verj. = IB; kc verj. = KC; ld verj. = LD; me verj. = ME und nf verj. = NF macht und zuletzt von a nach b; von b nach c; von c nach d ꝛc. die geraden Linien ab; bc; cd; de und ef zieht.

Daß nun die kleine Figur abcdef der ABCDEF vollkommen ähnlich, und zwar *L* abc = *L* ABC; *L* bcd = *L* BCD; *L* cde = *L* CDE; u. s. f. und ab : AB = bc : BC = cd : CD ꝛc. ist, hieran wird wohl niemand zweifeln, wir können dieß jedoch auch auf folgende Art beweisen:

Man ziehe aus A; B und C die Parallen AP; BQ und CR zu GO, welche die nächsten Ordinaten BI; CK und DL in P, Q und R schneiden, so ist AP = HI; BQ = IK und CR = KL. Auf dieselbe Art ziehe man aus a; b und c die Parallelen ap; bq und cr zu go, wo nun auch ap = hi;

bq = ik und qr = kl ist. Wenn nun HI = u Ruthen und IK = v Ruthen groß gefunden worden ist, so hat man auch hi = u (verjüngte Maaßstabs-Theilchen und ik = v Theilchen gemacht. Eben so wird auch bp so viele Theilchen enthalten als Ruthen in BP oder in BI + HA enthalten sind, und wenn BP = s Ruthen und CQ = t R. ist so ist bp = s Theile und cq = t Theile.

Berechnen wir nun in den rechtwinligen Dreyecken BPA und bpa den Winkel in B und b, so finden wir tang L PBA $= \frac{PA}{BP} = \frac{uR}{sR} = \frac{u}{s}$ und auch tang L pba $= \frac{pa}{bp} = \frac{uTh.}{sTh.} = \frac{u}{s}$, wo nun, weil die Tangenten gleich sind, auch die zugehörigen L ABP und abp einander gleich seyn müssen. Auf dieselbe Art können wir auch beweisen, daß in den rechtwinkligen Dreyecken CBQ und cbq die Winkel in B und b einander, und mithin auch L ABC = L ABP + L BPQ + L QBC = L abp + L bpq + L qbc = L abc ist. Beweisen wir nun ferner, daß L RCD = L rcd, so ist auch L BCD = L BCQ + L QCR − L RCD = L bcq + L qcr − L rcd = L bcd u. s. f. Endlich ist AB = $\sqrt{(AP^2 + PB^2)} = \sqrt{(u^2R^2 + s^2R^2)} = \sqrt{R^2(u^2 + s^2)}$ = R. $\sqrt{u^2 + s^2}$ und ab = Th. $\sqrt{u^2 + s^2}$, daher auch ab eben so viele Theile zählt als in AB Ruthen enthalten sind, und so finden wir ferner, daß auch bc verjüngt = BC ist.

II. Aufgabe. Es ist eine krummlinige Grenze ABCDEFGHIKLM Fig. 147. die sich in die Länge zieht, vorgelegt, man soll sie gehörig zu Riß bringen. Fig. 147.

Auflösung. Man lege, wie in voriger Aufgabe, eine gerade Linie NY so an, daß diese nicht fern von den Punkten A; C; G; I; L, welche am meisten zur Seite liegen, zu stehen kommt; bemerke die entferntesten und nächsten Punkte C; E; G; I; L der aus- und einwärts gehenden Krümmungen, und auch die sogenannten Wendepunkte B; D; F; H; K,

wo eine gerade Linie AD mit einer krummen BCD und eine auswärts gehende krumme mit einer einwärts gehenden zusammen stößt, oder bemerke auch noch die Punkte P, H ꝛc. wo die Gerade NY die aufzunehmende Figur durchschneidet; sodann messe man, wie in voriger Aufgabe, die Abscissen und Ordinaten für alle hier genannte Punkte, wo jedoch die Ordinaten für die Punkte P, H und K = Null sind, ziehe auf dem Papiere eine Gerade NY, und trage in dieselbe zuvor alle Abscissen NO; NP; NR ꝛc. und dann auch die Ordinaten OA; QB; RC; SD ꝛc. verjüngt auf, und ziehe endlich über die Punkte A; P; B; C; D; E, F, G, H, I, K, L, M die begehrte krumme Linie auf dem Papiere, welches sehr leicht geschehen kann, weil alle Wendepunkte zu den einzelnen Bögen, und zu jedem einzelnen kurzen Bogen wieder drey Punkte gegeben sind. Uebrigens versteht sichs von selbst, daß die Form der Bögen auf dem Papiere nach der Form der Bögen im Felde sehr treffend gezogen werden müssen.

III. Es ist eine übersichtliche Figur ABCDEFGHIKLMNOPQA Fig. 148. im Felde vorgelegt, man soll hierzu einen Riß fertigen. Fig. 148.

Auflösung. Man lege zuerst eine gerade Linie ST an, welche dem einen Theil ABCD der Grenze nahe genug zu liegen kömmt und mittelst welcher man auch diese Grenze zu Papier bringen kann, sodann errichte man in zwey wohlgewählten Punkten S und T senkrechte Linien SV und TU auf die Gerade ST, dergestalt, daß SV dem Grenz-Theil AQPO, und TU den Grenzpunkten E und F nahe genug zu liegen kömmt; wähle in diesen Senkrechten einen solchen Punkt V und U, so, daß eine gezogene Gerade VU wieder vielen Grenzpunkten, als O, N, M, H; G und F nahe genug zu liegen kömmt; so wird man, wenn ST; TU; UV und VS wirklich mit der Kette gemessen und unterwegs die nöthigen Abscissen und Ordinaten zu den nächsten Grenzpunkten bemerkt worden, das Trapez VSTU und mithin auch die nächsten

Fig. 148. Grenzpunkte auf folgende Art richtig zu Papier bringen können.

Man trage zuerst ST verjüngt aufs Papier, errichte in S und T die Senkrechten SV und TU und gebe ihnen nach dem verjüngten Maaßstabe die zugehörige Länge, so wird man auf dem Papier auch die Linie VU ziehen können, deren Länge nach dem verjüngten Maaßstabe gemessen mit der Ruthenzahl derselben Linie UV im Felde übereinstimmen muß. Die Grenzpunkte B; C und D können, wie oben in I. u. II., mittelst der Linie ST, und wenn man TS etwas nach e hin verlängert, auch der Grenzpunkt A durch eine dazu gezogene Ordinate genommen worden, indem man nur die rückwärts gehende Verlängerung mit der zugehörigen Ordinate im Meßregister besonders zu bemerken hat. Eben so können auch durch die Linie TU (welche man nöthigen Falls verlängert) die Grenzpunkte E und F, durch die Linie UV die Grenzpunkte F, G, H, M, N und O und durch die Linie US die Grenzpunkte P; Q und A richtig zu Papier gebracht werden, und es bleiben uns nur noch wenige Punkte als L, K, I oder auch H übrig, welche noch zu Riß gebracht werden müssen. Damit wir nun auch noch diese Punkte gewinnen können, so bereite man sich beym ausphälen des Trapezes STUV sogleich auf eine Linie YX vor, welche einigen gesuchten Punkten als K und L nahe genug zu liegen kömmt und deren Verlängerung die Seiten VU und ST des Trapezes in X und W durchschneidet, lassen in W und X kleine Pfählchen einschlagen, bemerke beym Messen des Trapezes die Ruthen in SW und in UX oder VX, trage diese Linien verjüngt aufs Papier an die zugehörige Stelle des Trapezes, verlängere im Felde und auf dem Papiere die Linie WX bis Y, lasse XY im Felde messen und während dieser Messung die nöthigen Abscissen und Ordinaten zu den Punkten L und K oder auch zu M nehmen, so wird man ebenfalls auch diese Punkte auf dieselbe Art wie vorher zu Riß bringen können. Die noch übrigen Punkte I; H oder auch K werden auf ähnliche Art

und zwar dadurch gewonnen, wenn man entweder ein Fig. 148.
Stäbchen b in die Seite UV des Trapezes setzt, Ub mißt und zu Riß bringt, Tb verlängert und beym Messen der Linie bK die gehörigen Abschläge (das heißt, Abscissen und Ordinaten) zu den Punkten H; I und K nimmt und alle diese gehörig zu Riß bringt; oder man legt, jenachdem diese gesuchten Punkte liegen, zwey Punkte a und Z im Trapeze fest, verlängert die Linie aZ und bestimmt dadurch die Punkte H und I oder K, oder auch D wenn nämlich der letzte Punkt D fern von ST liegen sollte. Auch ein Punkt R innerhalb der Figur kann gewonnen werden, wenn man dem Punkte C gegenüber ein Stäbchen z in UV setzt, UZ mißt und aufträgt, die Gerade CZ zieht und IR oder CR mißt und aufträgt. Ein solcher Punkt R innerhalb der Figur dient zugleich auch dazu, um sich von der Richtigkeit der ganzen Messung zu überzeugen, wenn man noch eine zweyte Linie cd zieht, welche QZ in R beynahe rechtwinklig durchkreuzet, die Punkte in TU und SV durch Stäbchen schon zu Anfang der Messung bey der Ausphählung bemerkt, welche durch cd geschnitten werden, und während man TU und VS mißt, auch zugleich die Größen der Linien Td und Vc aufschreibt, welche man verjüngt in die zugehörigen Linien TU und VS des Risses aufträgt, wo alsdann die auf dem Risse gezogene Linie cd genau den Punkt R treffen muß.

Anmerkung. Das Ausphählen einer geraden Linie ist schon der Hauptsache nach §. 13. beschrieben worden. Wir erinnern und bemerken nur noch:

1) Ein Stab W kann zwar durchs Abrichten eines Gehilfen in die gerade Linie ST eingesetzt werden, es ist aber oft besser, wenn man diesen Gehilfen dadurch entbehrlich macht, daß man zuvor ein Stäbchen e in die Verlängerung TS, und dann ein Stäbchen W in die Verlängerung eS setzt. Eben so kann man auch ein Stäbchen x in VU einsetzen, wenn man zuvor f in die Verlängerung UV gesetzt hat. Man sieht hieraus, wie leicht man eine Linie YXW ausphählen könne, daß nicht nur XY

sehr nahe an M, L und K, sondern auch X und W genau in die Linien VU und ST zu stehen kommen.

2) Man hat es nicht gern, wenn die Verlängerung XY der Linie WX um vieles größer als WX selbst ist, weil hieraus leicht Unrichtigkeiten entstehen können, indem ein kleiner Fehler im Anlegen der Punkte W oder X den Punkt Y schon um ein Merkliches oder gar Beträchtliches vorrückt.

3) Eine Linie VZ kann bis U verlängert werden, wenn man auch nicht aus V nach U sehen kann, wenn man zuvor einen Zwischenstab in X an eine solche Stelle einsetzen läßt, wo man alsdan aus X über Z nach U sehen kann. — Wie man eine gerade Linie durch ein Thal oder über einen Berg weg ausphählen könne, ist in §. 13. hinlänglich gezeigt worden.

IV. Fortsetzung. Die einfache geradlinige
Fig. 148. Figur STUV Fig. 148., durch deren Hilfe man die zusammengesetzte vorgelegte Figur ABCDEFGHIKLMNOPQ zu Riß brachte, nennt man Netz und die einzelnen Seiten ST; TU; UV und VS desselben heißen Netzlinien. Die Linien XY und Kb, welche die Netzlinien in WX und Tb durchschneiden und wodurch man auch noch den fehlenden Theil MLKIH der Figur gewinnen kan, sind eine Fortsetzung des Netzes. Eben so ist auch CZ eine Fortsetzung oder Ergänzung des Netzes, weil hierdurch der Punkt R gewonnen wurde.

Nicht immer ist es zweckmäßig, ein einziges Tra-
Fig. 149. pez als Netz anzulegen, zuweilen ist es Fig. 149. vortheilhafter, zwey und mehre Trapeze ORKN und PRKH neben einander und zwar dergestalt anzulegen, daß man durch das eine den Theil ABCDKLMA und durch das andere den Theil DEFGHIK der vorgelegten Figur ABCDEFGHIKLM richtig zu Papier bringen kann. Beym Anlegen eines solchen Netzes hat man weiter nichts zu thun, als zuerst eine gerade Linie OP auszuphählen auf dieselbe drey und mehre

Senkrechten ON; DRK und PQ an schicklichen Orten durch Hilfe eines guten Kreuzmaaßes zu errichten und sodann in dessen Senkrechten solche Punkte N; K; H anzunehmen, daß man durch gezogene gerade Linien NK und KH den Grenzlinien MLK und KIH daselbst sehr nahe zu liegen kommt. Die Messung der vorgelegten Figur und das Auftragen derselben aufs Papier geschieht übrigens wie vorher. Man kann aber auch, nachdem das Kreuz OKH; DRK auf dem Papiere gezogen ist, aus K nach S und R und D von D nach V; und so fort die Linien VO; ON; NK; KQ; QP; PW und WD mit der Kette messen lassen, und sodann die Figur dadurch zu Riß bringen, daß man zuerst RK und RD verjüngt aufträgt; sodann die Gerade DV auf dem verjüngten Maaßstabe mit dem Zirkel faßt, den einen Fuß des Zirkel in D setzt und mit dem andern Fuße die Netzlinien RO in V schneidet, auf dieselbe Art auch die verjüngte Linie DW mit dem Zirkel faßt und aus D den Punkt W in RP schneidet, worauf man die verjüngten Linien VO und WP einträgt, in O und P die Senkrechten ON und PQ errichtet und denselben die zugehörige Länge auf dem Papiere gibt. NK und KH müssen jetzt auf dem Papiere und dem Felde zu einander stimmen. Auch kann man, zur bessern Ueberzeugung einer richtigen Messung, die in §. beschriebene Kreuzprobe VST und QSU anstellen, wo U, T, Q, N andere Punkte im Netze sind, und worauf man sich schon beym Anlegen des Netzes vorbereitet und in U und T Stäbchen eingeschlagen hatte, damit man beym Messen des Netzes zugleich auch die Abstände VU und QT bemerken konnte.

V. Auch können wir, wenn ein ziemlich großes Feld ABCDEFHA Fig. 150. in mehre besondere Parthien AHGW; WKLMB; BMLEDC und KEFG abgetheilt und eine solche Parthie wieder in einzelne Grundstücke, welche verschiedene Eigenthümer haben, getheilet ist, alle diese einzelne Grundstücke sehr leicht zu Riß bringen; wenn wir zuvor ein wohlgewähltes Netz AHON der ganzen Figur anlegen, die Punkte I Fig. 150.

Fig. 150. und Q; T und P in den äußern Meßlinien bemerken, wohin die Linien EK und DM zielen, wovon die letzte eine solche künstlich gezogene Linie ist, welche die Bögen CDE und BML ungefähr halbirt oder durch die in D und M gesetzte Grenzsteine geht; wo wir sodann schon beym Aufnehmen des Netzes die Punkte A; W; B; N; C; P; Q; F; O; G; H; I und T auf die gewöhnliche Art messen und zu Riß bringen können, worauf wir die Linie QI ziehen, durch diese ebenfalls auch die Punkte X; Z; L; K gewinnen; die Geraden KG und EF ziehen und die Zwischenpunkte U und V bemerken. Alle Linien, als z. B. AB; BC; FG; VU; WK rc. welche gerad sind, können sogleich gezogen werden; um aber auch die Krummen CDE; XYZ rc. zu ziehen, messe man CE und PT und bemerke unterwegs die Zwischenpunkte D; Y; M rc. bringe alle diese Punkte gehörig zu Riß und führe dazu die Bögen CDE; XYZ rc. bis BML, nach der Lage und Form, wie sie in der Natur gegeben sind. Wem jedoch die Form noch bedenklich ist, der merke folgendes: Es ist nicht nöthig, daß man, um die Abweichung RD der Krummen von der Geraden CE zu finden, eine Linie PT durch alle genannte Bögen zieht, sondern man läßt in der Mitte R oder sonst an einem Orte, wo die Abweichung RD am größten ist, einen Stab in die Gerade CE setzen und die darauf gefällte Senkrechte DR messen, welche man sogleich auch zu Riß bringen kann. Auf dieselbe Art kann man auch den Punkt M des Bogens BML zur Geraden BSL bestimmen, und wenn S und D eingetragen sind, so wird man auch Y und andere Zwischenpunkte abmessen und eintragen können. Sollte die Abweichung RD des Bogens CDE nicht in der Mitte am größten seyn, so theilt man die Sehne CE nach Gutdünken in Drittel, Viertel, Fünftel oder Sechstel ein, und wenn man erachtet, daß CR = $\frac{1}{3}$ CE sey, so macht man auch auf dem Risse CR = $\frac{1}{3}$ CE und errichtet daselbst die Senkrechte RD. Wir haben vorhin gesagt, daß der Bogen CDE auf dem Risse der Form im Felde getreu gezogen werden müsse, wer

dieß

dieß nicht kann, darf, nachdem der Punkt D eingetragen ist, nur noch die Abweichung der kurzen Bögen CD und DE von den zugehörigen Sehnen auf die jetzt gezeigte Art untersuchen, so wird er auch diese Bögen ziehen können.

Anmerkung. Nicht immer ist die Anlegung eines Netzes von der Trapez-Form vortheilhaft, sondern wir finden oft für gut, eine andere Form und Verfahrungsart zu wählen, welche im folgenden Paragraphen beschrieben werden soll.

§. 47.

Zweyter Unterricht im Aufnehmen einer Figur im Felde und zwar durch den Meßtisch.

I. Aufgabe. Die Lage und Entfernung, welche zwey und mehre Orte A, B und C Fig. 151. gegen einander haben, auch dann richtig zu Papiere zu bringen, wenn man keinen dieser Orte mit den Meßinstrumenten besucht. Fig. 151.

Auflösung. Dieß geschieht durch Hilfe zwey anderer (willkührlicher) Orte M und N, wo man zuerst den Meßtisch in den einen Standort M aufstellt, aus einem wohlgewählten Punkt m des Tisches nach den im zweyten Standorte N ausgesetzten Stab und nach den zu Riß bringenden Orten A, B und C visiret; die Visirlinien mn; ma; mb und mc zieht; den Punkt M der Erde, welcher vertikal unter m steht, bemerkt; die Entfernung MN der gewählten Standorte mißt, und diese verjüngt in die Visirlinie mn aufträgt, wo der Punkt n auf dem Papiere den zweyten Standort N vorstellt; sodann setzt man in dem genannten Punkte M der Erde einen vertikalen Stab, trägt den Meßtisch in den zweyten Standort N und stellt ihn über N horizontal und zugleich so auf, daß nm vertikal über NM zu stehen kömmt, richtet nun genau zurück nach M, indem man die Visirregel ge-

Fig. 151. man an die schon vorgezogene Visirlinie nm anlegt und den horizontalen Meßtisch anfangs mit freyer Hand und zuletzt durch die Chordenschraube so dreht, daß man durchs Perspektiv oder durch die Dioptern wieder den Stab M, aus n visirt, erblickt; worauf man untersucht, ob der Punkt n des Tisches vertikal über den Punkt N der Erde steht, und wenn man findet, daß diese beyden Punkte nicht über einander zu liegen kommen, so muß der Punkt n in der Linie nm um eben so viele verjüngte Fuße links oder rechts verrückt werden, als um wie viel Fuße der Punkt n der Erde links oder rechts vom Punkte N absteht, und wenn am Ende der Punkt n berichtigtiget ist, so legt man an demselben die Visirregel an, visirt aus n nach den umliegenden Orten A; B; C, zieht die Visirlinien na, nb und nc; so werden die jetzigen Visirstrahlen die vorher im Standorte M gezogenen ma, mb, mc in den gesuchten Punkten a, b und c des Papieres dergestalt durchschneiden, daß in ab; ac und bc eben so viele verjüngte Ruthen enthalten sind, als in AB; AC und BC wirkliche Meßruthen enthalten sind.

Beweis. Es ist △ mna ∽ △ MNA, weil diese Dreyecke zwey Winkel mit einander gemein haben. Ist nun mn verjüngt = MN, so ist auch ma verjüngt = MA und na verjüngt = NA. Dieselbe Aehnlichkeit findet auch zwischen den Dreyecken mnb und MNB und zwischen mnc und MNC Statt. Es ist aber auch ∠ anb = ∠ ANB und und na verjüngt = NA und nb verjüngt = NB, daher auch △ anb ∽ △ ANB und ab verjüngt = AB. Eben so kann man auch beweisen, daß ac verjüngt = AC und bc verjüngt = BC ist.

Wir bemerken hier den wichtigen praktischen Satz:

Wenn man aus zwey Orten M und N, deren Entfernung MN bekannt ist, nach mehren umliegenden Orten A, B und C visirt, so kann man dadurch nicht nur die Lage und Entfernung dieser Orte A, B und

C von den Orten M und N, sondern auch die Lage und Entfernung dieser drey Orte A, B und C unter sich, nämlich das Dreyeck ABC, und mithin auch die einzelnen Seiten und Winkel desselben finden. Fig. 151.

Anmerkungen. 1) Hat man zuerst in einem Standorte M den Tisch aufgestellt und daselbst aus m noch irgend einen Stab N visirt und die Visirlinie mn gezogen, und stellt man alsdann den Meßtisch in diesen Ort N ebenfalls horizontal und zwar so auf, daß die vorige Visirlinie mn wieder zurück nach den ausgesetzten Stab in M zielt, so heißt man diese letzte Arbeit das Zurückrichten des Meßtisches. Dieß geschieht am sichersten, wenn man den horizontal gestellten Tisch an seiner vertikalen Axe zuerst mit freyer Hand so weit herumdreht, daß nm beynahe nach M zielt, sodann die Visirregel genau an nm legt und mittelst der Chordenschraube (§. 20. Nr. 8.) den Tisch in seiner horizontalen Lage vollends so weit links oder rechts sanft herumdreht, daß alsdann der Stab M genau ins Fadenkreuz des Fernrohres kömmt. Natürlich muß man, das Fernrohr, das sich in vertikaler Fläche auf- und ab bewegen läßt, auch so hoch oder so tief richten, als der Abdachungswinkel der Linie MN gegen die zugehörige Horizontale mit sich bringt.

2) Sollte die Visirlinie nm nicht genau vertikal über der zugehörigen Linie NM, sondern etwas weiter links oder rechts darneben zu stehen kommen, so muß man auch den Meßtisch so zurückrichten, daß nm um eben so viel links oder rechts neben M weggeht, *) dergestalt, daß nm eine parallele Lage zu MN erhält. Haben die ausgesetzten Stäbe fast einerley Dicke, so wird auf dem Tische oder auf der Erde der Abstand der beyden Linien mn und MN aus der Stärke der ausgesetzten Stäbe beurtheilt oder nach der Stärke dieser Stäbe gemessen

*) Das Fernrohr zeigt es bekanntlich verkehrt.

Uebrigens macht man, wie vorher, mn verjüngt = der horizontalen Entfernung MN, oder wenn n nicht über N liegen sollte, so macht man mn verjüngt = MN ± Nn; setzt aber den Punkt n um eben so viele verjüngte Fuße rechts oder links neben n, als um wie viele Meßfuße mn neben MN zu liegen kam. Aus diesem nun berichtigten Punkt n wird alsdann wie vorher nach allen umliegenden Orten A, B und C visirt und durch die gezogenen Visirstrahlen na, nb und nc die begehrten Punkte a, b und c auf dem Papier geschnitten.

Noch haben wir

3) zu merken, daß das Zurückstellen des Meßtisches und das Berichtigen des Punktes n auch das Orientiren des Punktes n zu dem zugehörigen Punkt N der Erde genannt wird, wo alsdann mb ∥ MB; ma ∥ MA und zuletzt ab ∥ AB; cb ∥ CB ꝛc. ist.

II. Aufgabe. Es ist die Entfernung AB Fig. 152. Fig. 152. des Ortes A von B bekannt und man will nur die Orte B und C mit dem Meßtisch besuchen und aus denselben auf die Orte A und D visiren; man fragt, wie man die Punkte C und D mit den Punkten A und B richtig verbinden und zu Papier bringen könne?

Auflösung. Man stelle den Meßtisch zuerst in dem einen Orte B auf, wähle einen solchen Punkt b auf dem Tische daß man beym Visiren aus b nach A, C D hinlänglich lange Visirlinien ba, bc und bd ziehen kann, trage im Visirstrahlen ba die Entfernung BA verjüngt auf und bestimme dadurch den Punkt a des Tisches, bemerke den Punkt b der Erde, nehme den Tisch weg und setze an seine Stelle einen vertikalen Stab in b; verfüge sich mit dem Tische in den Standort C und stelle ihn daselbst horizontal und zugleich so auf daß, cb vertikal über CB zu liegen kömmt und cb wieder zurück nach den Stab B zielt; halte im Punkte a eine Nadel an, lege die Visirregel an diese Nadel oder an den Punkt a visire aus a

nach A, ziehe die Visirlinie ac rückwärts und schneide dadurch den Punkt c des Visirstrahles bc, wo nun △ abc ähnl. △ ABC und demnach auch bc verjüngt = BC ist. Endlich visire man aus dem gefundenen Punkte c nach D und schneide mit dem gezogenen Visirstrahle cd die Linie bd auf dem Papiere, so wird auch △ cbd dem Dreyecke CBD ähnlich, und mithin auch ad verjüngt = CD und bd verjüngt = BD und ad verjüngt = AD seyn.

Folgesatz. Ist die Entfernung AB zweyer Orte bekannt und hat man aus einem dieser Orte B nach einem dritten Ort C visirt, so kann dieser Ort C durch Rückwärtseinschneiden zu Papier gebracht werden, wenn man aus C nach A sehen und den Winkel acb aufnehmen kann. Das Rückwärtsschneiden besteht bloß darin, daß man zuvor die Linie ba statt BA aufträgt, den Tisch in G gehörig orientirt, sodann aus a nach A visirt und durch die rückwärts gezogene Visirlinie ac den Ort c in der Linie bc schneidet.

Anmerkung. Natürlich ist der Nebenwinkel EAF so groß als die Summe der Winkel ABC + ∠ BCA. Legt man daher an die Endpunkte der Linie AB die Winkel ABC und EAF, so wird der Punkt G geradezu geschnitten.

III. Aufgabe. Man hat zuerst aus A nach C und B Fig. 153. visirt und auf dem Meßtische die Visirlinien ac und ab gezogen, sodann hat man auch aus B nach A und C visirt und daselbst die Visirlinien ba und bc gezogen; es ist aber das △ ABC so groß daß es nach dem gewählten verjüngten Maaßstabe nicht auf den Tisch geht; man fragt daher, wie man gleichwohl dieß △ ABC auf ein großes Blatt Papier richtig verzeichnen könne? Fig. 153.

Auflösung. Eine Hauptvorsicht ist, daß man beym Visiren aus A nach B und C die Visirstrahlen ab und ac — und beym Visiren aus B nach A und C die Visirstrahlen ba und bc auf dem Meßtische so lang als möglich, nämlich über den ganzen Tisch weg, zieht. Hat man dieß gethan, so löse man das Blatt

Fig. 153 vom Tische mit Vorsicht ab; ziehe auf einem großen Blatte Papier (welches man nöthigen Falls aus mehreren Blättern zusammen setzen kann) eine Linie AB; lege auf diese Linie das Meßtischblatt in A so, daß ab genau über AB zu liegen kommt und durchsteche daselbst die Endpunkte der Visirlinie ac mit einer feinen vertikal gehaltenen Nadel; nehme das Blatt in A weg und ziehe die durchstochene Linie ac hinlänglich lang bis C; bemerke den Durchschnitt A der beyden Visirlinien ab und ac; ertheile der Linie AB nach dem verjüngten Maaßstabe die ihr zukommende Länge AB; ziehe zu dem nunmehr festgelegten Punkt B eine hinlänglich lange Linie IE, welche AB in B senkrecht durchschneidet; ziehe zugleich auch auf dem Meßtischblatte durch den Scheitel b des $\angle$ cba eine solche Linie ei, welche ab in b senkrecht durchschneidet; lege dieß Meßtischblatt über den Punkt B des großen Blattes so, daß nicht nur ba genau in BA, sondern auch ei genau in EI zu liegen kommt, so wird auch b über B zu liegen kommen; in welcher Lage des Meßtischblattes man die beyden Endpunkte der Visirlinie bc durchstechen und dann bc so weit verlängern muß, bis bcC die zuvor gezogene Linie acC in C durchschneidet, wodurch das begehrte Dreyeck ABC in dem Falle sehr richtig zu Papiere gebracht wird, wenn AC und BC nicht über drey bis viermal so groß, als ac und bc sind.

Anmerkungen. 1) Zieht man keine Senkrechte be zu ba (des Winkels cba) genau über BA und sticht man die Endpunkte des Schenkels bc durch, so kann man alsdann, wenn das Meßtischblatt in B weggenommen ist, den Schenkel bc durchs parallele Aufschieben ebenfalls in den Punkt B bringen.

2) Wäre die Seite AC des Dreyeckes BAC bekannt und aufgetragen, und hätte man, wie vorher die Winkel in A und B aufgenommen, so wird das Dreyeck ACB richtig zu Papiere gebracht, wenn man zuerst in A den $\angle$ cba anlegt und ab bis B verlängert, sodann auch an einem nach Gutdünken angenommenen Orte B den $\angle$ abc, wie vorher, an-

lege, und wenn die Verlängerung bc den Punkt C nicht treffen sollte, so wird bc parallel fort nach C geschoben und dadurch der wahre Punkt B des Schenkels AB geschnitten.

IV. Aufgabe. Zwey Orte A und B Fig. 154. deren Entfernung AB man zu wissen begehrt, sind zwar aus den Standorten C und H sichtbar, man kann aber aus C nach H weder sehen, noch weniger (wegen allerley Hindernisse) messen; dagegen kann man aus einem dritten Standorte D nach C und auch nach H sehen, aber nur von C nach D, aber nicht von D nach H mit der Kette messen, sondern man sieht sich genöthiget, einen Stab E zur Seite zu setzen und von D nach E und von E nach H die Messung fortzusetzen. Man fragt nun, wie man mittelst der gebrochenen Standlinie CDEH die Entfernung AB entdecken können? Fig. 154.

Auflösung. Man stelle zuerst den Meßtisch im Punkte D gehörig auf und visire aus einem wohlgewählten Punkte d des Tisches nach den sichtbaren Gräben in C, E und H und ziehe die Visirlinien dc, de und dh; sodann stelle man den Meßtisch im Standorte C zurück nach D, nämlich so auf, daß cd über CD zu liegen kömmt und zurück nach D zielt, mache dc verjüngt = DC, visire aus dem gefundenen Punkte c des Tisches nach A und nach B und ziehe die Visirlinien ca und cb; so wird man auf dem Meßtische sowohl die vorher gezogenen visirlinien dc, de und dh, als die jetzt gezogenen ca und cb vorfinden. Jetzt stelle man den Meßtisch im Standorte H auf, daß die schon vorgezogene Visirlinie dh wieder zurück nach D zielt, mache de verjüngt = DE, lege die Visirregel an jetzt bestimmten Punkt e des Tisches an, visire aus e nach E und schneide durch die rückwärts gezogene Visirlinie eh den Strahl ch in h; wo man zugleich eh verjüngt = EH, setzen muß. Endlich visire man aus h nach A und nach B; so wird der jetzige Visirstrahl ha den vorher gezogenen ca in a, und den Visirstrahl hb den vorher gezogenen cb in b schneiden, wo nun ab nicht nur paral-

tel zu AB, sondern zugleich auch ab vergnügt = AB ist.

Die Vorsicht erfordert, daß man auch aus D nach A visirt, damit man sich von der Richtigkeit der Linie CD überzeugen kann.

V. Aufgabe. Ein im Felde ausgepfähltes Fig. 155. Netz ABCDEF Fig. 155 *), welches von einer beliebigen Form seyn darf, durch Hilfe des Meßtisches GHIK gehörig aufzunehmen, und hierzu auf dem Meßtische einen Riß oder eine Figur abcdef zu fertigen.

Auflösung. Man stelle den Meßtisch in einem beliebigen, jedoch in einem solchen Standorte O auf, daß man aus O alle ausgesetzten Pfähle A, B, C, D ꝛc. sehen kann; richte die obere Platte GHIK des Meßtisches auf dem Stative horizontal, wähle auf dem Papiere (welches auf dem Tische am Rande befestiget und gut ausgespannt ist) ein Punkt O an einer solchen Stelle, daß wenn der Standort O des Tisches etwas näher an D als an F, und näher an E als an AC liegt, auch sodann proportionsmäßig der Punkt O des Tisches etwas näher an HI als an AG, und näher an KI als an GH zu liegen kömmt, halte im gewählten Punkte O des Tisches eine feine spitzige Stahlnadel (Anschlagnadel) an, lege die Visirregel an die Nadel, visire nach allen ausgesetzten Stäben A, B, G, C, E und F des Netzes und ziehe bey einem jedesmaligen Visiren die zugehörigen Visirlinien oa, ob, oc, od, oa, of; sehe nach, ob sich nicht der Tisch während der Arbeit verrückt hat, wozu ein Sicherheitsrohr dient, das an der untern Fläche des Tisches angebracht ist und im Voraus auf einen gewissen Gegenstand gerichtet wird. In Ermangelung dessen muß man die Visirregel zuletzt wieder in oa anlegen und zusehen, ob die Dioptern oder das Fernrohr wieder nach A zielen. Nachdem man sich überzeugt hat, daß keine Verrückung Statt fand, so muß man noch un-

*) Was man unter Netz versteht, ist im vorigen Paragraphen gezeigt worden.

versuchen, ob alle Visirlinien aO, bO, cO ꝛc. so gezogen sind, daß sie sämmtlich genau in den Punkt O gehen. Ist dieß bey einer oder der andern nicht der Fall, so muß eine solche Fehllinie parallel fortgeschoben und dadurch genau in Punkt O gebracht werden; trifft's jedoch nur ein kaum merkliches an, so kann man sich beym nachherigen Auftragen danach richten und die fehlerhaft gezogene Linie um dieß kaum Merkliche fortgeschoben denken. Sind endlich die Visirlinien in einem Punkt o zusammen gebracht, so wird der Punkt O der Erde gesucht, der vertikal unter dem Punkte o des Tisches steht, daselbst ein Zeichen gemacht, und indem man den Tisch wegnimmt, daselbst ein Stäbchen eingesetzt. Die Kettenzieher haben schon während des Visirens die einzelnen Seiten BC, CD, DE, EF, FA und AB des Netzes auf die bekannte Art horizontal gemessen, und jetzt messen sie auch noch vom nächsten Pfahle B nach dem Pfahle in O und, zur mehren Sicherheit der Messung, auch noch von O nach E, nämlich nach einem solchen Pfahle E hin, wo die äußere Seite DE beynahe rechtwinklig auf den Strahl OE steht, oder wo E am nächsten an O liegt. Nachdem nun die Längen dieser genannten Linien in einem Register bemerkt sind und darin nachgesehen werden können, so schreitet man zum Auftragen der verjüngten Figur abcdef, welches auf nachstehende Art geschieht. Fig. 155

Zuerst sehe man im Register die Ruthen in OB nach und trage sie verjüngt aufs Papier in ob; sodann fasse man auf dem verjüngten Maaßstabe eben so viele Theile mit dem Zirkel, als Meßruthen in BC enthalten sind, setze den einen Fuß des Zirkels in b und schneide mit dem andern Fuße den Strahl oc in c, so ist das △ obc ∽ △ OBC und oc = dem verjüngten OC. Ferner fasse man auch die Ruthen in CD nämlich cd auf dem verjüngten Maaßstabe mit dem Zirkel, setze den einen Fuß in c und schneide mit dem andern Fuße den Strahl od in d, und so kann man fortfahren, de statt DE auf dem verjüngten Maaßstabe mit dem Zirkel zu fassen und damit

Fig. 133. aus d den Strahl od in o zu schneiden, es ist aber weit rathsamer, wenn man zuerst aus o die Ruthen der Linie OE verjüngt in oe und aus dem Punkte e die zur Seite ED zugehörige verjüngte Linie ed aufträgt, wo nun der Punkt d mit dem schon vorhin gefundenen Punkte d zusammen treffen muß. Nachdem nun der Theil obcdeo der Figur so aufgetragen ist, daß alle Punkte treffen, oder mit andern Worten, nachdem die Figur obcdeo gehörig zum Schlusse gebracht worden ist, so schreitet man zum Auftragen der Figur bafe; faßt die Ruthen in BA auf dem verjüngten Maaßstabe und schneidet mit ba aus b den Punkt a in oa; trägt ferner auch ef statt EF auf und sieht alsdann zu, ob af mit den Ruthen in AF übereinstimmt, wo nicht, so hat man einen Fehler beym Abmessen auf dem verjüngten Maaßstabe oder beym Messen mit der Kette im Felde gemacht, welchen man sogleich untersuchen muß. Hat die Figur obcdeo gehörig geschlossen, so liegt natürlich der Fehler im bafe oder in Messung der Figur BAFE.

Anmerkung. Wenn man die äußere Seite ef schon bereits aufgetragen hat und man nun ferner auch die Seite fa dadurch auftragen will, daß man den einen Fuß des Zirkels in f setzt und mit dem andern Fuße den Strahl oa schneidet, so kann bekanntlich dieß schneiden nicht nur in a, sondern auch in m geschehen. Dieser Schnitt wird allezeit zweydeutig und schlecht, wenn FA auf OA und folglich auch fa und oa beynahe rechtwinklig steht. Weiß man jedoch, daß ∠ FAO größer als ein rechter ist, so weiß man auch, daß der Schnitt nicht in m sondern in a geschehen müsse. Um den Punkt a im Risse ganz genau zu bestimmen, verfährt man lieber, wie vorher gezeigt worden, und trägt vorher die Seiten ob und ba auf, weil bey diesem Auftragen der Punkt a sehr gut geschnitten werden kann. Die Seite fa muß alsdann zu FA stimmen. N:5G

VI. Zusätze. Ein Punkt N innerhalb (oder auch außerhalb) der Figur kann zu Papier gebracht werden, wenn man aus O auf denselben visirt, die

Entfernung ON mißt und den Bürstrahl on verjüngt = ON macht; oder wenn man durch den Punkt N zwey Linien LO und PQ kreuzweise zieht, die Punkte O, L, P, Q, welche vom Kreuze im Netze geschnitten werden durch Stäbchen bezeichnet, beym Messen der Linien EF, FA und AB auch zugleich die Ruthen in BQ; FL und AP bemerkt und sodann EQ verjüngt nach eq in die Seite ef; FL verjüngt nach fl in fs und AP nach ap in ab aufträgt, wo alsdann die kreuzweise gezogenen Linien lo und pq den gesuchten Punkt n auf dem Papiere schneiden.

Würde man zur Fig. 148. das Netz STUV ziehen und dieß durch Hilfe des Meßtisches auf die vorhin gezeigte Art aufnehmen, so würde man ebenfalls dadurch, wie im vorigen Paragraphen Nr. III. beschrieben worden ist, die ganze Figur ABCDEFGHIKLMNOPQ mit den innern Linien CRM zu Riß bringen können. Fig. 148.

Eben so können wir auch das Netz zu den Figuren 149 und 150. durch den Meßtisch aufnehmen und, was übrigens die Figuren selbst betrifft, diese auf die Art des vorigen Paragraphen zu Riß bringen. Was alles hier als Hauptsache bemerkt zu werden verdient, ist, daß man das Netz durch den Meßtisch viel zweckmäßiger und wirksamer, als durch das bloße Kreuzmaß anlegen kann, wovon man sich aus Nachfolgendem überzeugen wird. Fig. 149. — 150.

Es sey ein ziemlich weitläuftiges Feld ABCDEFHP Fig. 156. vorgelegt, welches ganz die Form wie Fig. 150. hat, auch wie jenes aus mehren einzelnen Grundstücken besteht und mit allen diesen Einzelnheiten, wie im vorigen Paragraphen Nr. V., gehörig zu Riß gebracht werden soll; so kann man mit dem Meßtische einen solchen Standort im C wählen, der in der Verlängerung von FE und in der Linie DN liegt, welche die Bögen CDE und BML ungefähr halbirt. Aus diesem Standorte O wird nun nach den in A; B; C, D, E, F, H, N ausgesetzten Netzpfählen visirt, wodurch man die Strahlen OD; OEF; OH; ON, OA, OB und OC erhält; sodann mißt man OD; DE; EF,

FH, HN, NA, AB, BC, CD und ON; bemerkt während der Messung der Geraden DE die Abweichung des Bogens DE, bemerkt ferner in EF den Punkt Q, in FH den Punkt G, nimmt beym Messen der Linien HN und HA die Abschläge auf I und P; und bemerkt während AB, BC und ON gemessen wird, die zwischen fallenden Punkte; bringt die beyden Theile der Figur ODFHNO und NABCD, wie vorhin in Vs, zu Riß und verfährt übrigens, um die noch fehlenden Punkte zu den einzelnen Grundstücken und Bögen aufs Papier zu bringen, wie im vorigen Paragraphen Nr. V.

Anmerkung. Sollte der Punkt H aus dem Standorte O nicht sichtbar seyn, so läßt man, von O nach der Gegend H hingesehen, einen noch sichtbaren Stab S aussetzen, verlängert OS bis zu einem Punkt G der Netzlinie FH, visirt aus O nach S, statt nach G, und wenn alsdann wie vorher die Visirlinien OD, OE, OG und ON gezogen und die Seiten OD; DE, EF; FG nebst FH oder GH; HN und NO gemessen worden sind; so kann das Auftragen der Figur ODEFHNO dadurch geschehen, daß man zuerst OD; DE; EF wie vorhin verjüngt aufträgt, sodann die verjüngte FG mit dem Zirkel faßt und damit aus F den Strahl OG in G schneidet (wodurch der Punkt G auf dem Papiere bestimmt wird), worauf man FG um die verjüngte GH verlängert oder FH in die verlängerte FG trägt, endlich auch ON verjüngt aufträgt, wo nun NH auf dem Papiere und auf dem Felde stimmen muß.

VII. Fortsetzung. Das Netz NOPRKN Fig. 149., welches zu einer vorliegenden Fläche ABCDEFGHIKLMA, um sie zu Papier zu bringen, angelegt wird, ist, sobald man den Meßtisch zu Hilfe nimmt, ganz willkührlich. Man legt es am besten so an, daß die einzelnen Netzlinien den Grenzlinien der vorgelegten Figur so nahe zu liegen kommen, daß man durchs Netz die vorgelegte Figur sicher und leicht zu Papier bringen kann; sieht aber beym Anlegen des Netzes zugleich auch darauf, daß dasselbe möglichst

einfach wird, und daß man, wie in Fig. 148., ein Fig. 148.
solches einfaches Netz STUV auch noch wirksam auf entlegene und innere Theile HIKL, und CRM der vorgelegten Figur durch Ziehung und Verlängerung gewisser Linien WXY; ZaD; CRZ machen könne, deren Lage durchs Netz bestimmt werden kann. Es besteht daher die Hauptkunst einer praktischen Messung in Anlegung eines wirksamen, jedoch möglichst einfachen Netzes und man kann schon einen Meßkünstler aus dem geschickten Auspfählen seines Netzes erkennen. Da ein Netz willkührlich ist und nur dazu dienen soll, eine weitläuftige Figur ABCDEFGHI ꝛc. richtig zu Papiere zu bringen, so wird das Netz STUV selbst mit seinen Ergänzungen WXY, TbK ꝛc. bloß durch blinde Linien ST; TU ꝛc. (welche mit einer Nadel- oder Zirkelspitze gezogen werden) auf dem Papiere sichtbar gemacht, und wenn endlich die wahren Grenzpunkte A, B, C, D ꝛc. der Figur eingetragen sind, so zieht man die Grenzlinien AB, BC, CD ꝛc. mit Tuschtinte aus.

Schneidet man das Papier, worauf ein Riß z. B. die Figur 156. oder 150. mit allen einzelnen Grundstücken steht, vom Meßtische ab und legt man dasselbe auf ein anderes ebenes Blatt und befestiget man am Rande beyde Blätter durch nadelförmige Nägelchen oder durch feine Oblatenstückchen so auf einander, daß sie sich nicht verrücken können, so wird man, durchs senkrechte durchstechen der einzelnen Punkte A, W, B, X, C, D, Y, M, K, L, Z, E, V, U, F, G, H ꝛc. der Fig. 150. mittelst einer feinen Nadel, alle diese Punkte auch auf dem untergelegten Papiere erhalten und man kann alsdann, wenn das obere Blatt weggenommen wird, auf dem untern Blatte alle Linien AH; AB; BC; HGF; WKG, KE ꝛc. und alle Bögen BML, CDE, XYZ ꝛc. (wo man zu jedem Bogen fünf Punkte durchstechen konnte) ziehen. Natürlich bleiben die künstlich gezogenen Linien BSL und die künstlich angelegten Netzpunkte und Netzlinien NPQO, RT, I ꝛc. weg. Fig. 156. — 150. Fig. 150.

Auf einen jeden Riß trägt man zugleich die Länge

des verjüngten Maaßstabes von 10; 50 oder 100 Ruthen; oder von so viel Fußen, wenn es nämlich ein Bauriß ist. Oft sagt man auch bloß, daß 10 oder 20; 30 verjüngte Ruthen einen Wiener oder Rheinländischen, natürlichen Zoll ausmachen, in welchem Falle man die Länge der verjüngten Maaßstabes nicht auf den Riß zu zeichnen braucht, wenn nämlich nicht zu besorgen ist, daß das Papier sich einziehe oder ausdehne. Da jedoch Papier, was vorher naß aufgespannt worden ist, sich nach dem Abschneiden wieder etwas zusammenzieht, so darf man nur Risse auf schon aufgespannt gewesenen und längst abgeschnittenen Papier verzeichnen, welches beym nachherigen Auflegen nicht wieder naß gemacht wird. Das Bestreichen oder Uebertünchen mit geschlagenen Eyweißschaume sichert das Papier vors Ausdehnen und Zusammenziehen, wie bekannt. Ist der Riß fertig, so wählt man eine leere Stelle des Papiers, zeichnet daselbst ein Schild (Kartusche) und schreibt in dieß Schild den Namen des Grundstückes, seinen Flächengehalt, die Fläche der einzelnen Theile, zeichnet auf einen schicklichen Ort die Lage der Mittagslinie (worauf wir zurückkommen werden) bemerkt die Länge der gewählten Meßruthen, (welche in Dreyßigacker 14 Nürnberger Fuße groß ist) und führt zuletzt den Namen des Meßkünstlers mit Datum und Jahrszahl an.

VIII. Aufgabe. Eine Fläche

Fig. 157. ABCDEFGHIKLMN Fig. 157. welche, wie z. B. ein Teich oder ein Moor, wegen Schilf oder Gebüsche oder wegen eintretender Landbuchten zwar nicht vom Rande, aber doch von einer gewissen Anhöhe O so ziemlich übersichtlich ist, richtig zu Papier zu bringen.

Auflösung. Wir sehen ein, daß, wenn wir ein am Umfange ausgepfähltes Netz PQRSTU richtig zu Papier bringen können, wir sodann auch den Umfang des Teiches selbst durch Anschläge (nämlich durch Abscissen und Ordinaten) gewinnen können, wo beym Auspfählen des Netzes bedungen wird, daß wir von einem Pfahl zum andern sehen und mit der Kette messen können. Ist nun aus einer nicht zu fern lie-

genden Anhöhe O der Teich ziemlich übersichtlich, so setze man die Pfähle P, Q, R, S, T, U zum Netze so, daß man wenigstens vom ersten, dritten, fünften ꝛc. oder vom zweyten, vierten, sechsten Pfahl den in O ausgesetzten Stab sehen kann. (Sollte dieß aber auch nicht möglich seyn so muß man an manchen Orten zugleich auch Gebrauch von der Behandlungsweise der folgenden Aufgabe machen). Nachdem nun die Auspfählung auf die begehrte Art geschehen ist, kann man alsdann das Netz PQRSTU Fig. 158., welches dasselbe wie in Fig. 157. mit dem zugehörigen Stab Q ist, auf folgende Weise zu Riß bringen. Fig. 158.

Man messe zuvor die Seiten PQ; QR; RS; ST; TU und UP des Netzes mit der Kette und stelle den Tisch in O horizontal auf, visire aus O nach Q, nach S und U (wo ein Stab um den andern übersprungen ist), und ziehe die Visirlinien oq; os; ou; setze sodann den Tisch in Q horizontal auf und drehe die oberste Platte so, daß die in O gezogene Visirlinie qo wieder aus Q zurück nach O zielt, wähle in der Virlinie qo einen Punkt q so, daß man überzeugt seyn kann, es werde die ganze Figur PQRSTU verjüngt füglich auf den Tisch getragen werden können; visire aus diesem Punkte q nach P und nach R und ziehe die Visirlinien qp und qr; trage die Ruthen der Seite QP verjüngt in qp, und QR verjüngt in qr auf; nehme den Tisch in Q weg und stelle ihn in S horizontal und so auf, daß die in O gezogene Visirlinie so wieder zurück nach O zielt, lege, weil schon ein Theil pqr der verjüngten Figur auf dem Blatte steht, die Visirregel im Punkte r an, visire aus r nach R, ziehe die Visirlinie rs nach sich zu (rückwärts), mache rs nach dem verjüngten Maaßstabe = RS; lege sodann die Regel im gefundenen Punkte s an, visire aus s nach T und mache die Visirlinie st verjüngt = ST, so wird auch der Punkt t im Risse bestimmt seyn. Endlich stelle man auch den Meßtisch in U und zwar so auf, daß uo zurück nach O zielt, lege die Visirregel im gefundenen Punkte t des Risses an, visire aus t nach T und mache die rückwärts gezogene Visirlinie

ta verjüngt = TU; visire endlich auch aus dem gefundenen Punkte u nach P, so wird die gezogene Visirlinie up nicht nur den ersten Punkt p der Figur pqrstu wieder treffen, sondern auch up verjüngt = UP seyn müssen.

Der Beweis zur richtigen Verfahrungsart gründet sich auf folgende Sätze.

IX. Lehrsätze. 1) Hat man zuerst den Meßtisch ABCD Fig. 159. in O aufgestellt, aus O nach R visirt und in O die Visirlinie IK gezogen, und trägt man alsdann den Meßtisch ABCD nach EFGH, (wo LM die schon vorgezogene Visirlinie IK bedeutet) und stellt daselbst den Meßtisch EFGH in R so auf, daß ML genau über R zu liegen kömmt und auch ML genau zurück nach O zielt; so steht jetzt der Tisch EFGH gegen seine vorige Lage ABCD pparallel, nämlich es ist ∠ IKD = ∠ LMH; KM eine gerade Linie und demnach auch KD ∥ MH oder CD ∥ GH; BC ∥ FG; BA ∥ FE und AD ∥ EH. Fig. 159.

2) Ist die Linie IO gegen die Linie DC eben so gelegt, wie die Linie LR gegen HG, und ist ferner auch die Linie OP oder NP gegen DC eben so gelegt, wie die Linie RS oder QS gegen HG; so wird auch IO oder IK gegen OP oder NP eben so liegen, wie LR oder LM gegen RS oder QS.

Da die Lage einer Linie IO gegen einer andere PDC durch den Winkel IKP bestimmt wird, den beyde Linien am Durchschnittspunkte K einschließen, so kann man den jetzt genannten Satz auf folgende Art ausdrücken:

Sind die Winkel IKP und LMS gleichgroß, ingleichen auch die Winkel OPK und RSM gleichgroß, so wird auch ∠ IOP = LRS seyn.

Denn es sey ∠ IOP = IKP = α°, und ∠ RSM = ∠ OPK = β, so ist ∠ POK = $180^{\circ} - \alpha - \beta$ und auch SRM = $180 - \alpha - \beta$ und der Nebenwinkel LRS = $\alpha + \beta$ und IOP = $\alpha + \beta$, woher auch ∠ LRS = IOP.

3) Liegt unter diesen Umständen PDC parallel

zu

zu SHG, so wird auch IO # zu LK, oder IK # LM und OP # RS seyn.

Denn wenn man PC und HG aneinander legt, so muß z. B. OK zu RM parallel laufen, weil ∠ PKO = ∠ SMR ist.

Aus diesen Sätzen wollen wir nun beweisen, daß die Verfahrungsart in VII. ganz richtig ist.

Was die einzelnen Seiten pq; qr, rs, st der kleinen Fig. 158 betrifft, so sind diese verjüngt = PQ, QR, RS, ST ꝛc.; ferner sind auch die Winkel pqr = ∠ PQR; ∠ rst = RST und ∠ tup = TUP. Kann nun bewiesen werden, daß auch ∠ qrs = ∠ QRS ist, so wird eben so auch bewiesen werden, daß ∠ stu = ∠ STU und ∠ upq = ∠ UPQ ist, und es werden daher alle Winkel der verjüngten Figur den Winkeln der vorgelegten Figur gleich, und alle Seiten dieser und jener Figur im Verhälnisse stehen, weshalb auch die verjüngte Figur der vorgelegten ähnlich ist. Daß nun ∠ qrs = ∠ QRS ist, leuchtet daraus hervor, daß der Meßtisch in Q und in S zurück nach O gestellt worden ist, weshalb auch die eine Seite ab des Meßtisches an diesen drey Orten parallel läuft. Da nun QR und RS gegen ab eben so gelegt sind, als qr und rs gegen ab, so ist auch ∠ qrs = QRS vermöge Nr. 2.

X. Aufgabe. Ein am Umfange einer Figur Nr. 160. ausgepfähltes Netz ABCDEF, wo man aus dem Standorte eines jeden Stabes den vorhergehenden und nachfolgenden Stab sehen kann, richtig zu Papier zu bringen. Fig. 160.

Auflösung. Man lasse die einzelnen Seiten AB, BC, CD, DE ꝛc. des Netzes mittelst der Kette nach §. 40. 1. messen, wo, wir immer, entweder die Kettenzieher selbst die horizontale Entfernung eines Stabes vom andern suchen, oder wo die schiefliegende Entfernung gemessen, hierzu der Abdachungswinkel beobachtet und die gemessene Schiefe auf die zugehörige Horizontale reducirt wird; stelle sodann den Meßtisch zuerst in einem Eckpunkt B des Netzes auf, wähle einen zugehörigen Punkt b auf dem Tische so, daß man überzeugt seyn kann, es werde die verjüngte Fi-

gur abcdef füglich darauf getragen werden können;
Fig. 160. viſire aus b nach A und nach C, bemerke jedesmal den Abdachungswinkel, ziehe die Viſirlinien ba und bc, reducire die gemeſſenen Schiefen AB und BC auf die zugehörigen Horizontalen und mache ba und bc = den horizontalen AB und BC. Jetzt ſtelle man in C den Meßtiſch horizontal und zurück nach B, nämlich ſo auf, daß cb zurück nach B zielt oder wenigſtens cb zu CB parallel zu liegen kömmt; viſire aus c nach D, bemerke den Abdachungswinkel und mache die gezogene Viſirlinie cd = der verjüngten Horizontalen CD. Eben ſo ſtelle man ferner den Tiſch in D horizontal und zugleich ſo auf, daß dc zurück nach C zielt, viſire aus d nach E und mache de = der verjüngten Horizontalen DE. Und ſo fahre man fort, nach und nach alle Eckpunkte des Netzes mit dem Meßtiſche zu beſuchen, in einem folgenden Standorte E den Meßtiſch auf den vorhergehenden D zurück zu richten, aus e nach F, und nachher aus f nach A zu viſiren, die Viſirlinien ef und fa verjüngt = den horizontalen EF und FA zu machen, wo der letzte Punkt a in den erſten a fallen muß. Will man ſich von der Richtigkeit der Meſſung noch mehr überzeugen, ſo muß man den Tiſch zuletzt auch noch in A aufſtellen und daſelbſt nnterſuchen, ob der ∠ fab genau dem ∠ FAB gleich iſt. Trifft dieß nicht ein, ſo iſt ein Fehler im Winkelmeſſen nämlich im Zurückrichten oder Vorwärtsviſiren gemacht werden, der ſogleich unterſucht werden muß. Iſt jedoch der genannte Winkel richtig, und ſchließt die verjüngte Figur dennoch nicht, ſo iſt ein Fehler im Auftragen oder Meſſen der Netzlinien eingeſchlichen, der ebenfalls ſogleich unterſucht werden muß. Der Ort oder die Stelle, wo ein Fehler gemacht worden iſt, kann jedoch, wenn das Netz nicht zu vielſeitig iſt, leicht errathen werden. Geſetzt, man ſey beym Auftragen der letzten Linie fa nicht nach a, ſondern nach m gekommen (ſiehe die verjüngte Figur auf dem Meßtiſchblatte im Standorte A), wo demnach m eigentlich in a liegen müßte, ſo ſieht man, indem man ſich die Linie ma gezogen denkt,

sogleich ein, daß nur diejenigen Linien ab und de, welche eine beynahe parallele Lage zu ma haben, fehlerhaft aufgetragen oder AB und DE gar fehlerhaft gemessen seyn können. Man muß daher sogleich ab und de revidiren, und wenn hier kein Fehler gefunden wird, AB und DE im Felde nachmessen lassen. Es ist nicht leicht möglich, daß wir bey unserer Behandlungsart auch Fehler im Aufnehmen der Winkel im Felde machen sollen. Wäre aber dennoch einer vorhanden, so müßte die Lage einer solchen Linie bc oder cd; ef oder fa falsch beobachtet worden seyn, welche mit fa oder fm fast parallel läuft.

XI. Aufgabe. Es ist ABCD Fig. 161. der obere Rand und EFGHI der untere Rand einer Bergwand ABCDIHGFEA und der Wand gegen über liegt ein ziemlich erhabener Punkt O, aus welchem man wenigstens zwey ziemlich weit von einander ausgesetzte Stäbe B und D des obern Randes und auch zwey solcher Stäbe E und G des untern Randes sehen kann. Man fragt, wie man den obern und den untern Rand aufs Meßtischblatt in gehörige Lage und Entfernung bringen könne, wenn auch nicht die steilen oder unzugänglichen Abhänge AE und DI der Bergwand gemessen werden. Fig. 161.

Auflösung. Man pfähle zuerst den obern Rand ABCD aus und bezeichne zwey oder mehre Stäbe B und D, welche ziemlich entfernt von einander stehen und aus welchen man nach O sehen kann, durch angehängte weiße Tücher oder zweyfarbige Fahnen; sodann pfähle man auch den untern Rand EFGHI aus und zeichne daselbst ebenfalls auch zwey solcher Stäbe E und G; lasse sogleich die Seiten AB, BC, CD des obern Randes und auch die Seiten EF, FG, GH, HI des untern Randes messen; stelle den Meßtisch zuerst in O horizontal auf, visire aus einem wohlgewählten Punkte o des Tisches nach den genannten Pfählen B und D; E und G am obern und untern Rande und ziehe die Visirlinien ob, od, oe und og; suche zum Punkte o des Tisches den zugehörigen Punkt O der Erde, nehme den Tisch weg, setze an

Fig. 161. deſſen Stelle einen Stab O. und zeichne auch dieſen mit einem zweyfarbigen Tuche; ſtelle ſodann den Tiſch in G zurück nach O (wo G nicht zu nahe an O liegen muß), viſire aus einem willkührlichen Punkte g (der zurück gerichteten Linie go) nach F und nach H, und wenns ſeyn kann, auch nach I oder E und bringe den untern Rand EFGHI auf die VIII. oder X beſchriebene Art zu Riß, wo man nöthigen Falls auch den Tiſch in H und F zurück nach G, und in E zurück nach O ſtellen muß. Hat man die Seiten des untern Randes nach ihrer Lage und Länge gehörig zu Papier gebracht, ſo ſtellt man alsdann den Meßtiſch auch in B zurück nach O, viſirt aus einem willkührlichen Punkte b (der zurückgerichteten Linie bo) nach A und C, und wenns ſeyn kann, auch nach D, zieht die Viſirlinien ba, bc und bd, und bringt den obern Rand ebenfalls auch auf die bekannte Art und zwar dadurch zu Riß abcd, daß man ba verjüngt = BA; bc verjüngt = BC macht, cd ſtatt CD mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maaßſtabe faßt, den einen Fuß deſſelben in c ſetzt und mit dem andern Fuße den Strahl bd in d ſchneidet.

Da wir auf dem Papiere die Punkte g und b in den Viſirſtrahlen og und oh willkührlich angenommen haben, ſo werden wir offenbar auch nicht die wahre Entfernung der Punkte G und B vom Punkte O, und mithin auch nicht die wahre Entfernung des obern Randes vom untern auf dem Papiere getroffen haben, und es entſteht nun die Frage, wie man den Riß des obern Randes ABCD und den Riß des untern EFGHI in gehöriger Entfernung vom Punkte O, und demnach auch beyde Ränder in gehöriger Entfernung von einander bringen könne? Alles kömmt hier darauf an, daß wir im Stande ſind, irgend einen Rand z. B. den obern ABCD in gehörige Lage und Entfernung, oder in gehörige Verbindung mit dem Punkte O zu bringen, ſodann werden wir auch den untern Rand EFGHI auf dieſelbe Art behandeln können, und es wird nachher alles in Ordnung ſeyn. Um nun zu zeigen, wie man den Rand ABCD auf dem Papiere

in gehörige Entfernung vom Punkte O bringen könne, wollen wir annehmen, daß dieser Rand nicht an die zugehörige Stelle, sondern nach ABCD gesetzt sey; so erkennt man sogleich, daß zwar die Visirlinie bo auch in B zurück nach O gestellt worden ist und daß demnach der Visirstrahl ob oder OB durch B geht, man wird aber zugleich auch gewahr, daß ABCD nicht die gehörige Entfernung von O hat, weil der Visirstrahl od oder OD nicht durch den Punkt D geht. Damit nun ABCD an die zugehörige Stelle ABGD komme, so ziehe man zu BB oder OB aus A, C und D die Parallelen AA; CC; DD; schneide mit der letzten Parallelen DD den Strahl OD in D, fasse DD mit dem Zirkel und mache alle übrigen Parallelen CC, BB und AA eben so groß als DD. Zieht man nun jetzt die Linien AB, BC, CD, so ist die erhaltene Figur ABCD der vorigen ABCD in allen Stücken gleich und zwar auch $\angle$ ABO $=$ $\angle$ ABO und es geht auch der in O gezogene Visirstrahl od durch den verlangten Punkt D. Eben so könnten wir auch die Figur EFGHI verschieben, wenn sie nicht schon an ihrem richtigen Flecke läge und die in O gezogenen Visirstrahlen oe und og nicht schon durch die begehrten Punkte E und G gingen.

XII. Aufgabe. Ein zu messendes Feld ABKQOPIEFH Fig. 162. wird von einem ziemlich breiten Flusse BCDEIPNMLK durchschnitten. Man fragt, wie man beyde Felder diesseits und jenseits des Flusses mit dem Flusse selbst gehörig zu Riß bringen könne. Fig. 162.

Auflösung. Man schlage eine gerade Linie HC durch das eine Feld, deren Verlängerung HCLO sowohl den Fluß als das andere Feld durchschneidet; stelle den Meßtisch über diese grade Linie und zwar über einen solchen günstigen Punkt H, daß man aus dem zugehörigen Punkt h des Tisches ein zum Felde HABCDEF ausgepfähltes Netz ABCGEFH und mithin auch dieß Feld selbst mit dem einen Rande (Ufer) BCDEI des Flusses nach V und VI. gehörig zu Papier bringen kann, wo man zugleich die eine Netzlinie

Fig. 162. FE so anlegt, daß man durch deren Verlängerung auch das Ufer EI gewinnen kann. Hat man nun die Figur bbcdef von dem einen Felde aufgetragen und aus h auch nach O visirt und die Visirlinie ho gezogen, so lasse man sich mit dem Tische ins andere Feld überschiffen, stelle nun jetzt auch den Tisch in diesem zweyten Felde über der durchgeschlagenen Linie HO und zwar über einen solchen günstigen Punkt O auf, daß man den Stab in H und auch alle Pfähle des anzulegenden Netzes KLMNPOQ sehen und leicht zu Papier bringen kann; richte den Meßtisch in O horizontal und zugleich so, daß die zuvor gezogene Visirlinie oh wieder genau zurück nach H zielt, oder wenigstens doch oh zu OH parallel läuft; lege die Visirregel an einem vorhin schon gewonnenen günstig liegenden Punkt b an, visire aus demselben nach den zugehörigen Stab B, ziehe die Visirlinie bo rückwärts und schneide dadurch die vorgezogene Linie ho in o; so wird man dadurch den Punkt o des Tisches finden, der zum Standorte O desselben gehört, und aus welchem man sodann auch das Netz zum zweyten Felde KQOPM mit dem anliegenden Ufer KLMNO gehörig aufnehmen und dazu die Figur klmnpoq fertigen kann, wo man den Riß bcdeipnmlk zum Flusse von selbst erhält, weil seine beyden Ufer gehörig aufgenommen worden sind.

Bey der jetzt beschriebenen Behandlungsweise hat man aber vorzüglich darauf zu sehen, daß oh im Standorte O höchst genau nach dem Pfahle in H zurück gestellt und der Punkt o des Tisches mit dem zugehörigen Punkt O der Erde genau bestimmt und nirgends ein Fehler im Messen begangen wird. Will man sich von der Richtigkeit der Behandlung ganz überzeugen, so muß man die Visirregel auch am Punkte e und andern Punkten, welche im Standorte H genommen worden sind, anhalten, aus e nach dem zugehörigen Pfahl E visiren, die Visirlinie eo rückwärts ziehen und dann Achtung geben, ob dadurch derselbe Punkt o des Tisches, der schon vorher gefunden war, geschnitten wird. Ueberhaupt dient hier zur Nachricht

einer richtigen Messung, daß wenn man aus e nach A, F oder G visirt, sodann auch diese Visirlinien über a, f oder g weggehen müssen. Eben so wird auch, wenn aus H nach Q visirt worden wäre, der gezogene Visirstrahl durch die Punkte h und q auf dem Risse gehen müssen.

VIII. Anmerkung. Anderer Gebrauch des Meßtisch wird noch dann vorkommen, wenn von Aufnehmung ganzer Fluren, Wälder, Städte und Dörfer, und von Anfertigen eines Situationsplanes die Rede seyn wird, vor der Hand haben wir nur den Hauptgebrauch und die richtige Behandlung desselben beschreiben wollen.

§. 48.

Messung mit der Scheibe und dem Tische in Verbindung der Magnetnadel.

I. Aufgabe. Ein ausgepfähltes Netz ABCDE Fig. 163., das nur am äußern Umfange zugängig ist, mittelst der §. 20. Nr. 4 beschriebenen Scheibe richtig zu Papier zu bringen. Fig. 163.

Auflösung. Man stelle zuerst die Scheibe im zweyten Eckpunkte B horizontal und zwar so auf, daß der Zapfen im Mittelpunkte der Scheibe vertikal über dem zugehörigen Punkte B der Erde zu stehen kömmt, visire nach dem Pfahle A im ersten, und nach dem Pfahle C im dritten Eckpunkte und ziehe an der Visirregel, welche am Zapfen im Mittelpunkte B der Scheibe liegt, die Visirlinien 1..2 und 3...2., wo man schon zufrieden ist, wenn diese Visirlinien nur nahe am Rande der Scheibe sichtbar sind; sodann stelle man auch die Scheibe über dem dritten Eckpunkte C gehörig auf, lege die Visirregel an die zuvorgezogene Visirlinien 3..2 und drehe die Scheibe in horizontaler Fläche so, daß im Fadenkreuze des Fernrohrs oder in den Dioptern der Regel der in B aufgesetzte Stab

wieder erscheint, schraube oder halte die Scheibe in dieser Lage fest, öffne die Schraube am Zapfen der Visirregel, drehe die Regel nach D hin und visire aus C nach den vierten Pfahl D, ziehe die Visirlinie 4..3 und setze wieder an die Stelle der Scheibe einen Stab in C. Ferner stelle man die Scheibe im vierten Eckpunkte D horizontal auf, lege die Regel an der zuvor gezogenen Visirlinie 4..3 fest an und drehe und stelle die Scheibe so zurück, daß man durchs Fernrohr wieder den Stab C erblickt, wo demnach 4..3 wieder zurück nach C zielt, mache die Regel wieder los und visire damit aus D nach E, ziehe die Visirlinie 5..4 und setze wie vorher einen Stab in D an die Stelle der Scheibe. Auf dieselbe Art fahre man fort, die Scheibe in einem jeden Eckpunkte E so aufzustellen, daß die zuvor gezogene Visirlinie 5..4 wieder zurück nach dem vorhergehenden Pfahl D zielt, worauf man sodann nach den folgenden Pfahl A visirt und die Visirlinie 5..1 zieht. Gelangt man am Ende in der ersten Ecke A an und stellt man daselbst die Scheibe so zurück, daß 1..5 nach E zielt, so muß auch, wenn kein Fehler im Aufnehmen der Winkel eingeschlichen ist, die ganz zuerst im Standorte B gezogene Visirlinie 1..2 wieder genau nach den Pfahl B zielen.

Was die einzelnen Seiten AB; BC; CD ꝛc. des Netzes betrifft, so werden diese auch hier mit der Kette entweder horizontal oder nach der schiefen Lage gemessen und im letzten Falle durch Hilfe des Cosinus, der zum beobachteten Abdachungswinkel gehört, reducirt. Ist aber kein vertikaler Gradbogen mit der Regel verbunden, so muß jede Seite horizontal gemessen werden.

Nachdem nun die Länge einer jeden Seite gemessen und reducirt ist, so hebt man das Blatt Papier Fig. 164., was auf die Scheibe gelegt war und worauf man die Lage oder Richtung einer jeden Linie 1..2; 2..3; 3..4 ꝛc. angezeigt findet, von der Scheibe ab, legt es auf eine ebene Fläche, und schreitet nun

Fig. 164.

zum Auftragen der Figur abcde, welches auf folgende Art geschieht.

Zuerst nehme man den Punkt b an einer solchen Stelle des Blattes an, daß man überzeugt seyn kann, es werde die Figur abcde füglich aufs Blatt gehen, sodann suche man die Visirlinie 2..1 auf, *) schiebe diese parallel fort in den Punkt b, ziehe daselbst ba ∥ 2..1, mache ba verjüngt = BA; schiebe ferner auch die Visirlinie 2..3 parallel nach b und ziehe demnach bc ∥ zu 2..3 und mache bc verjüngt = BC, so werden die drey Punkte a, b und c auf dem Papiere bestimmt seyn. Jetzt ziehe man in den Punkt c zu 3..4 die Parallele cd und mache diese verjüngt = CD, und ziehe ferner in den gefundenen Punkt d zu 4..5 die Parallele de und mache diese verjüngt = DE; so wird, wenn man so fortfährt, auch in den Punkt e zu 5..1 eine Parallele ea zu ziehen und ea verjüngt = EA zu machen, die Figur zuletzt richtig zum Schlusse gebracht werden, es müßte denn ein Fehler im Auftragen oder im Messen gemacht worden seyn, den man jedoch sogleich nach den in X. des vorigen Paragraph gegebenen Regeln aufsuchen und verbessern muß.

Anmerkung. Muß man in Sorgen stehen, es würde die Figur abcde nicht auf die Scheibe gehen, so befestiget man die Scheibe auf ein größeres Blatt Papier, trägt nöthigen Falls ein Theil der Figur über die Scheibe hinaus aufs untergelegte Papier, sticht alle Punkte der Figur auf der Scheibe durch und bringt dadurch die ganze Figur aufs untergelegte Papier.

II. Aufgabe. Ein Umfangsnetz ABCDE Fig. 165. durch Hilfe eines Meßtisches, wo an der untern Fläche der obersten Platte desselben ein Kästchen mit einer freyschwebenden Magnetnadel eingeschoben und Fig. 165.

*) Sämmtliche Visirlinien 1..2; 2..3; 3..4 ꝛc. gehen nämlich durch den Mittelpunkt o der Scheibe.

befeſtiget iſt, mit weniger Arbeit richtig zu Papier zu bringen. Fig. 165.

Auflöſung. Man ſtelle den Meßtiſch zuerſt im zweyten Eckpunkte B horizontal auf und drehe ihn in ſeiner horizontalen Lage (anfangs mit freyer Hand und zuletzt mittelſt der Chordenſchraube) ſo, daß die Nadel im Käſtchen nn auf einen am Rande vorgezogenen Strich n einſpielt, viſire aus einem willkührlichen Punkt B des Tiſches nach den erſten Eckpunkt A und nach den dritten C, ziehe die Viſirlinien 1..2 und 3..2, bemerke den Durchſchnittspunkt B dieſer Viſirlinien und ſetze vertikal unter demſelben (nach Wegnahme des Tiſches) einen Stab in die Erde. Jetzt überſpringe man den dritten Eckpunkt C, ſetze nämlich den Tiſch nicht in demſelben, ſondern im vierten Eckpunkt D horizontal und zugleich ſo auf, daß die Nadel auf den ihr vorgeſchriebenen Strich in n einſpielt, viſire aus einem willkührlichen Punkte D deſſelben nach C und E und ziehe die Viſirlinien 3..4 und 5 4, bemerke den Durchſchnittspunkt D dieſer Viſirlinien und ſetze dazu einen vertikalen Stab. Eben ſo überſpringe man allezeit einen Zwiſchenpunkt E und ſtelle den Tiſch allezeit in einem folgenden F horizontal und nach der Magnetnadel richtig auf, viſire aus einem willkührlichen Punkt F nach E und A, ziehe die Viſirlinien 5 — 6 und 1..6 und ſetze zum Durchſchnittspunkte derſelben einen vertikalen Stab in F. Und ſo fährt man fort, bis man alle Seiten der Figur nach ihrer Lage ab viſirt hat, und ſollte ſie aus zehn und mehre Seiten beſtehen. Enthält die Figur eine ungerade Zahl Seiten, ſo muß man auch dieſer einzigen Seite wegen den Meßtiſch in einem dieſer Seite anliegenden Eckpunkt aufſtellen.

Indem der Geometer mit dem Meßtiſche vorausgeht und die Lage aller Seiten abviſirt, ſo folgen ſobald die Kettenzieher nach und meſſen die Seiten AB, BC; CD ꝛc. auf die bekannte Art und wenn alle Lagen und Längen gemeſſen ſind, ſo ſchreitet man zum Auftragen der Figur abcdef auf dem Tiſche Fig. 166., welches auf folgende Art geſchieht. Fig. 166.

Zuerst wird ein Punkt b auf dem Tische, worauf alle Visirlinien 1..2; 2..3; 3..4; 4..5 ꝛc. stehen, so angenommen, daß man hoffen kann, es werde die Figur aufs Blatt gehen, sodann schiebt man die Visirlinie 2..1 in den Punkt b parallel nach ba und macht ba verjüngt = BA; ferner schiebt man auch in den Punkt b die Visirlinie 2..3 parallel nach bc und macht bc verjüngt = BC. Eben so schiebt man nun in den gefundenen Punkt c die Linie 3..4 parallel fort nach cd und macht diese verjüngt = CD und so fährt man fort de # 4..5 und verjüngt = DE, ef # 5..6 und verjüngt = EF und zuletzt fa # 6..1 und verjüngt = FA zu machen, wo der letzte Punkt a wieder in den ersten a fallen muß, wenn nämlich die Magnetnadel gut oder sehr empfindlich ist und die Messung und das Auftragen mit gehöriger Aufmerksamkeit geschehen ist. Da aber eine Magnetnadel fast niemals scharf genug zeigt, so wird auch die Figur nicht immer genau schließen, doch kann man einen kleinen Fehler dadurch unschädlich machen, daß man ihn nach denselben Gründen, wie in X. des vor. Par. zu verbessern sucht, wo ebenfalls auch angenommen wurde, daß die Figur abcdefm auf dem Meßtischblatte in A Fig. 160. nicht schließt und der letzte Punkt m eigentlich in a liegen sollte. Man untersucht nämlich, ob die Seite ab nicht um eine Kleinigkeit zu kurz und die Seite de zu lang ist; ob nicht beym Anlegen der Seiten bc und cd die Punkte c und d um etwas zu tief — und beym Anlegen der Seiten ef und fm die Punkte f und m um etwas zu tief gekommen sind. Helfen diese kleinen Verbesserungen den Punkt m in a bringen, so mag man mit der erhaltenen Figur zufrieden seyn, wo nicht, so taugt entweder die Magnetnadel oder die Spitze mit dem Huthe, worin sie läuft, nichts, oder es sind wirklich bedeutende Fehler im Messen gemacht worden, welche man sogleich zu untersuchen hat. Fig. 166. Fig. 160.

Vorhin wurde angenommen, daß der Punkt m (siehe den Meßtisch A in Fig. 160.) eigentlich in a liegen sollte, und wir haben dadurch die Figur zum

Schluſſe zu bringen geſucht, daß wir einen und mehre Punkte b, c, d ꝛc. oder e, ꝛc. welche etwa zu tief angelegt ſeyn ſollten, nach der Richtung ma um etwas höher ſetzten; ſollte aber umgekehrt der Punkt a in m liegen, ſo müßten wir natürlicher Weiſe diejenigen Punkte, welche etwa zu hoch angelegt wären, nach der Richtung am etwas tiefer ſetzen, wenn die Figur zum Schluſſe kommen ſoll.

Wir haben vorhin ſchon bemerkt, daß eine Meſſung, wobey man ſich auf die Magnetnadel verläßt, nicht ſcharf genug ſey, und ob wir gleich eine Figur auf die jetzt gezeigte Art zum Schluſſe bringen können, ſo iſt doch eine ſolche Meſſung bey theuren Grundſtücken, wo es auf eine Furche ankömmt; nicht zu empfehlen. Nur bey Meſſung kleiner Waldbezirke, Huthraſen und Moorgründe, wo es nicht auf einen halben oder ganzen Fuß ankömmt, mag die Magnetnadel vom wirkſamen und unnachtheilgen Gebrauche ſeyn.

III. Anmerkungen. 1) Verbindet man mit der Scheibe ein Käſtchen, worin eine Magnetnadel ſchwebt, ſo kann man auch beym Meſſen mit der Scheibe einen Stand um den andern überſpringen. Fig. 163. Denn es ſey das Umfangsnetz ABCDE Fig. 163. mittelſt der Scheibe aufzunehmen und man habe zuerſt im Eckpunkte B die Scheibe ſo aufgeſtellt, daß die Nadel auf einen vorgezogenen Strich n einſpielt, und habe daſelbſt auch die Viſirlinien 2..1 und 2..3 nach den vorhergehenden und folgenden Stab A und C gezogen; ſo wird man, wenn nachher der Eckpunkt C überſprungen und in D die Scheibe ſo aufgeſtellt wird, daß die Nadel wieder auf demſelben Punkt n des Käſtchens einſpielt, beym Viſiren aus D nach C und E die Viſirlinien 4..3 und 4..1 erhalten und es wird zugleich Dn ∥ Bn und 2D1 auf der Scheibe in D parallel zur Seite BA, und 2D3 ∥ zu BC ſeyn.

2) Man kann auch ein Umfangsnetz ABCDEF Fig. 160. Fig. 160. mit dem Tiſche (woran ein Magnetnadelkäſtchen befeſtiget iſt) ſo aufnehmen, daß man wie vorher einen Stand um den andern überſpringt, aber

dennoch die Figur abcdef schon während des Messens auf dem Papiere erhält, wenn man die Seiten AB; BC; CD ꝛc. im Voraus nach ihrer Länge mißt, den Tisch zuerst im Standorte B horizontal und nach der Magnetnadel richtig aufstellt, aus einem wohlgewählten Punkt b des Tisches nach A und C visirt und die Visirlinien ba und bc verjüngt = BA und BC macht, sodann den Tisch in D horizontal und nach der Magnetnadel richtig aufstellt, den Punkt c mit einer Anschlagnadel faßt, und aus c nach C visirt, und die rückwärts gezogene Visirlinie cd verjüngt = CD macht, aus dem gefundenen Punkte d nach E visirt und die Visirlinie de verjüngt = DE macht; ferner den Tisch in F richtig aufstellt, aus e nach E visirt, ef verjüngt = EF macht, aus f nach A visirt und fa verjüngt = FA macht, wo jetzt die Figur schließen muß. Hier ist aber wohl zu merken, daß man beym Ziehen einer jeden Visirlinie darauf Achtung geben muß ob der Punkt woraus man visirt, auch vertikal über der zugehörigen Linie im Felde liegt oder nicht. Liegt dieser Punkt um etwas links oder rechts darneben, so muß man auch um eben so viel links oder rechts neben dem ausgesetzten Stabe weg visiren, wie schon im vor. Parag. Nr. I. Anmerk. 2. bemerkt worden. Auch darf nicht vergessen werden, daß das Fernrohr an unserm Visirinstrumente die Gegenstände verkehrt, nämlich, was links liegt, rechts — und was rechts liegt, links zeigt.

IV. Aufgabe. Man hat schon im Standorte A Fig. 167. den Meßtisch nach der Magnetnadel richtig aufgestellt, aus dem zugehörigen Punkt a des Tisches nach B visirt und die Visirlinie ab verjüngt = AB gemacht. Wenn nun die beyden Orte A und B nach ihrer wahren Lage und Entfernung auf dem Tische durch die Punkte a und b angezeit sind, wie kann man hierzu einen dritten Ort C, aus welchem man nach A und B sehen kann, richtig zu Papier bringen. Fig. 167.

Auflösung. Man stelle den Meßtisch, worauf

die Linie ab ſteht, auch in C nach der Magnetnadel mn richtig auf, viſire daſelbſt aus a nach A und aus b nach B, ſo werden ſich die beyden rückwärts gezogenen Viſirlinien ac und bc in dem begehrten Punkte c des Tiſches ſchneiden, der nun zum dritten Orte C gehört.

§. 49.

Was zu thun ſey, wenn eine Figur nicht aufs Blatt geht.

1) Ein ſolcher Fall iſt bereits ſchon im vorigen Paragraphen Nr. I. in der Anmerkung beſchrieben worden, welcher daſelbſt nachgeſehen werden kann. Fig. 170. Geht nämlich eine Figur abcdefghi Fig. 170. nicht auf den Tiſch ABCD, ſo kann man das Blatt in dem Falle vom Tiſche ſchneiden, wenn die Meſſung auf die Art II. des vor. Par. geſchehen iſt, und man legt alsdann dieß Blatt auf ein größeres, worauf die Figur abcdefghi gewiß geht und worauf man den Theil ghiabc der Figur, der auf dem Meßtiſchblatt ſteht, durchs Abſtechen copiren kann. Man wünſcht aber

2) auch oft zu wiſſen, ob die Figur abcdefghi richtig ſchließt und demnach auch richtig aufgenommen iſt bevor man das Blatt ABCD vom Tiſche abſchneidet. In dieſem Falle trägt man zwar die erſten Seiten ab, und bc nach der gewöhnlichen Art auf, wenn man aber merkt, daß die folgenden Seiten cd, de, ef ꝛc. der Figur über das Meßtiſchblatt hinweg fallen, ſo ſetzt man den Punkt c beliebig, jedoch ſo weit zurück nach c^z, daß man Platz genug für die Figur $c^z d^z e^z f^z g^z$ findet, welche ſtatt der Figur cdefg aufgetragen wird, ſchiebt die Seite, welche im Felde zu cd gehört, parallel nach $c^z d^z$, trägt mit einem Worte $c^z d^z$ ſtatt cd auf, trägt ferner auch $d^z e^z$ ſtatt de; $e^z f^z$ ſtatt ef und $f^z g^z$ ſtatt fg auf, und wenn man vor Augen ſieht, daß der zuletzt aufgetragene Punkt g^z wieder ſo liegt, daß $c^z g^z$ parallel fort in den Punkt

c nämlich nach cg geschoben werden kann, so macht Fig. 170.
macht man diese Parallele cg = $c^z g^z$ und trägt alsdann aus diesem Punkte g den übrigen Theil ghia der Figur nach der gewöhnlichen Art vollends auf, wo man sogleich wird gewahr werden, ob die ganze Figur schließt.

Will man alsdann die beyden Theile ghiabc und gcdef der Figur abcdefghi gehörig mit einander verbinden, so schneidet man zu Hause das Meßtischblatt ABCD ab, legt es auf ein größeres Blatt, bringt zuerst durchs Abstechen die Figur ghiabc aufs untere Blatt, zieht durch c und c^z parallele Linien kl und $k^z l^z$ zur Lage der Magnetnadel oder zur Seite CD des Tisches, copirt die Lage kl auf dem untergelegten großen Blatte, nimmt das Meßtischblatt weg und legt es sodann so über das große Blatt, daß $k^z l^z$ und kl sich decken und auch zugleich der Punkt c^z genau über c zu liegen kömmt, wo nun der Theil $c^z d^z e^z f^z g^z$ der Figur in cdefg zu liegen kömmt und daselbst copirt werden kann. Um den Punkt c^z genau über c zu bringen, macht man c^z durch einen Tropfen Oel durchsichtig, oder schneidet zu c^z einen Spitzwinkel $b^z c^z k^z$ aus dem Papiere, oder zieht zu c^z und c ein Kreuz, wie §. 47. III.

3) Die jetzt beschriebene Verfahrungsart läßt sich auch in dem Falle anwenden, wenn am Meßtische kein Kästchen mit einer spielenden Magnetnadel befestiget ist, wo man demnach den Tisch in einem jeden folgenden Standorte nach dem vorhergehenden zurückstellen muß. Denn gesetzt, man habe schon bereits die Seiten ab und bc aufgetragen und man wolle nun auch die Seite cd der Figur auftragen welche aber nicht aufs Blatt geht, so stellt man zwar ebenfalls die Seite cb zurück nach den vorhergehenden Stab b man visirt aber nicht aus c nach den folgenden Stab d im Felde, sondern setzt, wie vorher, den Punkt c nach c^z, visirt aus c^z nach den genannten folgenden Stab d^z im Felde, nimmt Rücksicht auf das, was §. 47. I. in Anmerk. 2. und was §. 48. Nr. 2. über das Zurückstellen und Vorwärtsvisiren gesagt ist, macht $c^z d^z$

verjüngt = der zugehörigen Seitenlinie im Felde, stellt im folgenden Standorte d^z die Visirlenie $d^z.^z$ zurück nach den vorhergehenden Stab c^z, visirt aus d^z nach den folgenden Stab e^z, und verfährt übrigens wie in Nr. 2.

Noch haben wir anzuführen, daß wir auch ohne Abschiebewerkzeuge zu $c^z g^z$ eine Parallele cg auf dem Tische führen können, wenn wir an die Linie $c^z g^z$ die Visirregel anlegen, den Tisch so drehen, daß $c^z g^z$ auf einen sehr weit entfernten Gegenstand zielt, sodann die Visirregel in c anlegen, aus c nach denselben entfernten Gegenstand (oder hart darneben) visiren und die Visirlinie cg ziehen, welche nach der in Nr. 2. beschriebenen Verfahrungsart = $c^z g^z$ zu machen ist.

4) Gesetzt, man wolle aus zwey Standorten L und M Fig. 171. die Fläche ABCDEFGH aufnehmen und man bereite sich auch im Standorte L auf den zweyten M vor, indem man aus l nach m oder M visirt, man finde aber beym Aufnehmen des Theils der Fläche ABCDIH, welche in der Nähe des Standorts L liegt, daß die dazu gefertigte Figur abcdih beynahe schon das Meßtischblatt ausfüllt und daß demnach der übrige Theil nicht aufgetragen werden kann; in dieser Verlegenheit sieht man sich genöthiget, aus d zu irgend einer Seite np des Meßtisches eine Parallele dk zu ziehen und darauf aus h eine Senkrechte hk zu fällen, das vorher in L aufgelegte Blatt abzuschneiden und dagegen ein anderes im zweyten Standorte M aufzulegen; sodann paßt man das abgeschnittene Blatt aufs neue so, daß die Seite np beyder Blätter sich deckt oder wenigstens doch parallel läuft, copirt in dieser Lage die Visirlinie lm aufs neue Blatt, nimmt das obere Blatt wieder weg und zieht auf dem neuen Blatte zu np nahe an der gegenüber stehenden Seite eine Parallele dk, bemerkt den Durchschnitt o der beyden Linien lm und dk, trägt mit dem Zirkel od, ok, kh vom ersten Blatte aufs zweyte, wo demnach auch dk und dh auf beyden Blättern zu einander stimmen; richtet jetzt (wie im §. 47. XIII.) im Standorte M die Visirlinie ml zu-

Fig. 171.

zurück nach den vorigen Standort L, legt die Visir- Fig. 171.
regel in d und nachher auch in h an, visirt nach den zugehörigen Stäben in D und H, zieht die Visirlinien dm und hm rückwärts und schneidet dadurch den Punkt m in lm; so wird m der Punkt auf dem Papiere seyn, der zum Standorte M gehört, aus welchem man nun ferner auch die Figur defgh zum zweyten Theil der Fläche im Felde DEFGH aufnehmen kann.

Will man nun beyde Figuren habcd und defgh gehörig an einander stoßen, so copirt man zuerst auf ein großes Blatt die Figur habcdi mit der Linie dk, legt sodann das zweyte Meßtischblatt so aufs große Blatt, daß dk beyder Blätter sich decken, so wird man in dieser Lage auch die zweyte Figur defgh copiren und mit der ersten aufs große Blatt in eine richtige Verbindung bringen können.

5) Es sey ABCDIH Fig. 171. ein Umfangsnetz, das man schon bereits zu Papier abcdih gebracht hat; soll man nun mit demselben noch ein angrenzendes Netz DEFGH in Verbindung bringen, dessen Figur defgh aber nicht auf dasselbe Meßtischblatt geht, so muß man, wie vorher, die Linien dk und kh ziehen und diese von einem Blatte aufs andere bringen, damit man sodann an den Punkt d des zweyten Blattes die Messung des Netzes DEFGH anbinden und die erhaltene Figur defgh im Punkte h beschließen könne. Diese Verfahrungsart läßt sich aber nur in dem Falle am besten anwenden, wenn mit dem Meßtische eine Magnetnadel verbunden ist und man ihn demnach an allen Orten parallel aufstellen und einen Stand um den andern überspringen kann; ist aber am Tische keine Magnetnadel oder verläßt man sich nicht auf die Nadel, weil sie nicht genau genug zeigt, so nimmt man zwar beyde Netze nach Anleitung des §. 47. X. auf, man muß aber ebenfalls auch die Linien dk und kh von einem Blatte aufs andere bringen und außerdem wenn das erste Netz IHABCD aufgenommen wird, aus D (oder H) nach einem entfernten Gegenstand visiren, die Visirlinie dahin ziehen

und damit man sich nachher, wenn das zweyte Netz aufgenommen wird, auf denselben entfernten Gegenstand wieder zurückrichten könne, so muß die dahin gezogene Visirlinie von ersten Blatte aufs zweyte durchs Copiren dergestalt gebracht werden, daß ihre Lage gegen dk oder np auf beyden Blättern vollkommen übereinstimmt.

§. 50.

Messung mit der Bousole und dem Theodoliten.

I. Aufgabe. Es ist ein Umfangsnetz ABCDEF Fig. 168. Fig. 168. im Felde vorgelegt, man soll dessen Winkel mittelst der rechtläufigen Bousole oder, welches einerley ist, mittelst eines Theodoliten messen, wo an der untern Fläche seiner horizontalen Gradscheibe ein Kästchen mit einer Magnetnadel eingeschoben ist.

Auflösung. Man stelle zuerst den Theodoliten in der zweyten Ecke B so auf, daß die Mitte der horizontalen Gradscheibe vertikal über den zugehörigen Punkt B der Erde zu stehen kömmt, richte die genannte Gradscheibe horizontal und drehe sie so, daß die Nadel im Kästchen auf den ihr vorgezeichneten Strich einspielt; visire aus D nach den Stäben in A und C, so wird man, wenn die Gradeintheilung im Punkte N des Kreisringes anfängt und von der Rechten zur Linken geht, beym Visiren aus D nach A oder bey der jetzigen Lage Ba der Visirregel, im Punkte a die Grade des Bogens Na, und beym Visiren aus B nach c die Grade des Bogens Nc im Punkte c angezeigt finden. Jetzt überspringe man den Stab C und setze den Theodoliten an die Stelle des Stabes D, horizontal und nach der Magnetnadel richtig, wo demnach DN ∥ zu BN wird, visire aus D nach C und bemerke in e die Grade des Bogens Ne, visire auch aus D nach E und bemerke in e die Grade des Bogens Ne und setze nachher wieder den Stab D an den zugehörigen Ort der Erde. Eben so stelle

man ferner den Thodoliten in F gehörig auf, viſire aus F nach E und nach A, bemerke in e die Grade des Bogens NPQae und in a die Grade des Bogens NPQa und laſſe alle einzelne Seiten AB, BC, CD, DE ꝛc. des Netzes mit der Kette meſſen, ſo kann alsdann zum Netze ABCDEF der Riß abcdef Fig. 169. durch Hilfe eines in Grade eingetheilten Reißbretes auf folgende Art aufgetragen werden. Fig. 168. — 169.

Vorausgeſetzt, daß man aus dem Mittelpunkte m des Reißbretes Fig. 169. einen großen Kreis beſchrieben, denſelben, aus dem Punkte n angefangen, von der Rechten zur Linken in 360 Grade eingetheilt und dieſe Grade durch gezogene Sekanten auf den Rand des Reißbretes gebracht habe, ſo wird man, wenn das Reißbret die Form eines Quadrats hat, auf der linken obern Ecke 45°, auf der untern 135°, auf der untern rechten Ecke 225 Grade ꝛc. in der Mitte der linken Seite 90°, in der Mitte der untern Seite 180, in der Mitte der rechten Seite 270° und in der Mitte n der obern Seite 0 Grade angezeigt finden. Natürlich kann man alle einzelne Grade auf dem Rande des Reißbretes leicht finden, weil man auch hier, wie beym Kreisringe, die Zahlen zu 10; 20; 30 ꝛc. Graden beygeſchrieben hat. Beſitzt man nun ein ſolches eingetheiltes Reißbret und will man auf demſelben die begehrte Figur abcdef vorzeichen, ſo muß man zuerſt den Punkt b an einer ſolchen Stelle annehmen, daß man glauben kann, es werde die Figur füglich aufs Blatt gehen; ſodann ſucht man den Mittelpunkt m des aufgeſpannten Papiers dadurch, daß man über n und 180° und nachher auch über 90 und 270° ein Linial legt und in m ein Kreuz zieht; nimmt das Meßprotokoll zur Hand und ſieht darin die Lage der Linie BA nämlich die Grade des Bogens Nca nach, welche Grade man im Punkte a am Rande des Reißbretes vorfindet, weil $\angle$ NBa $=$ $\angle$ nma iſt; legt an dieſen Punkt a und an den Mittelpunkt m ein Abſchiebedreyeck an und ſchiebt ma parallel fort nach ba und macht ba verjüngt $=$ BA; ſieht ferner die Lage der Seite BC nämlich die

Grade des Bogens Nc im Protokolle nach und ſucht dieſelben Grade auf dem Rande des Reißbretes im Punkte β nach indem $\angle$ NBC $=\angle$ $nm\beta$ iſt, legt an $m\beta$ das Abſchiebedreyeck an, ſchiebt $m\beta$ parallel nach bc und macht bc verjüngt $=$ BC. Eben ſo ſieht man ferner die Grade des Bogens Nec für die Seite DC im Protokolle nach, ſucht dieſe Grade in γ am Rande des Reißbretes auf, ſchiebt γm parallel nach cd und macht cd verjüngt $=$ CD, und ſo fährt man fort zur Seite DE die Grade des Bogens Ne auf dem Reißbrete in δ aufzuſuchen und $m\delta$ nach de fortzuſchieben; zur Seite FE die Grade des Bogens NPQae auf dem Reißbrete in ε aufzuſuchen und εm parallel nach ef zu bringen und endlich auch die Grade des Bogens NPQa in ε des Reißbretes aufzuſuchen, $m\varepsilon$ parallel nach fa zu bringen und dieſe verjüngt $=$ FA zu machen, wo nun die Figur abcdef ſchließen muß.

Anmerkung. Mittelſt eines in Grade eingetheilten Reißbretes Fig. 169. kann man auch einen auf dem Papiere gegebenen Winkel cba meſſen, und umgekehrt auch zu cb eine ſolche Linie ab ziehen, daß der entſtehende Winkel cba eine gewiſſe Zahl Grade enthält. Denn wenn der Winkel cba gemeſſen werden ſoll, ſo hat man weiter nichts zu thun, als beyde Schenkel bc und ba in den Mittelpunkt m parallel nach $m\beta$ und $m\alpha$ zu ſchieben und die Grade in β und α von einander abzuziehen. Soll aber ein Winkel cba von einer gewiſſen Anzahl, z. B. von λ Graden hingelegt werden, ſo ſchiebt man zuerſt bc $\#$ nach $m\beta$, addirt zu den Graden in β die Grade λ des hinzulegenden Winkels, ſucht die erhaltene Summe $\beta + \lambda$ am Rande des Reißbretes auf und wenn dieſe Summe von Graden in α gefunden wird, ſo legt man das Abſchiebedreyeck an $m\alpha$ an und ſchiebt dieſe Linie parallel fort nach ba in den Punkt b.

II. Aufgabe. Das vorige Netz ABCDEF im Felde Fig. 168. mittelſt einer verkehrtläufigen Bouſſole (pag. 71 und 72.) aufzunehmen, wo demnach die

Fig. 168.

Dioptern oder der vertikale Bogen, worin ſich das Fig. 168.
Perſpektiv bewegt, feſt auf dem horizontalen Grad-
ringe (nämlich über den Theilſtrichen 0° und 180°)
ſtehen und wo demnach die Nadel im ganzen Grad-
ringe frey herumlaufen kann.

Auflöſung. Da die Magnetnadel in jedem Standorte B, D oder F eine parallele Lage BN, DN und FN annimmt und wenn in B die Bouſſole aufgeſtellt und aus B nach A viſirt wird, das Fernrohr Ba über dem Nullpunkt a des Kreiſes acNST ſteht, ſo erhält man für die Seite BA den Bogen acN, wo nun die Nadel auf die Grade in N dieſes Bogens hinweiſt. Eben ſo erhält man die Grade des Bogens cN, wenn man aus B nach C viſirt, weil jetzt das Fernrohr und der Mittelpunkt der Gradeintheilung in c ſteht, und es werden daher jederzeit die Grade der Bögen cN und acN von der Linken zur Rechten (nämlich von den Punkten c oder a angefangen bis zur Spitze N der Magnetnadel fortgegangen) abgezählt, wo dagegen die Seiten BC und BA gegen BN von der Rechten zur Linken liegen und man ſieht hieraus ab, warum das Reißbret Fig. 169., das zum Auftragen der Figur abcdef gebraucht wird, von der Rechten zur Linken in Grade eingetheilt ſeyn muß, wenn die Grade auf der Bouſſole acNST Fig. 168. von den Linken zur Rechten laufen. — Nachdem man nun aus B nach A und nach C viſirt hat, ſo ſtellt man die Bouſſole in D auf, viſirt aus D nach den vorhergehenden und folgenden Stab C und E, bemerkt die Grade des Bogens ceLN und des Bogens eLN, und ſetzt endlich auch die Bouſſole in F, viſirt nach E und A und bemerkt die Grade der Bögen eaQPN und aQPN. Da nun im Standorte B der Bogen cN = Nc und acN = Nca; im Standorte D der Bogen ceLN = NLec und eLN = NLe, u. ſ. f., ſo wird die Figur abcdef aufs Reißbret 169 auf dieſelbe Art getragen werden können, wie zuvor in I beſchrieben worden iſt.

III. Aufgabe. Man hat mit dem Theodoliten alle innere Winkel des Netzes ABCDEF Fig. 168,

Fig. 168. aufgenommen und zwar im Standorte B den innern ∠ ABC, nämlich den Bogen ac zwischen den beyden Seiten BA und BC; im Standorte C den innern Bogen KIHG zwischen den Seiten CB und CD; im Standorte D den Bogen ce zwischen CD und DE; im Standorte E den Bogen RUO; in F den Bogen ea und in A den Bogen VNW, und mit der Kette alle einzelne Seiten AB; BC; CD ꝛc. gemessen; man fragt, wenn zu irgend einer Seite BC die Lage der Magnetnadel BN, nämlich der Winkel NBc, beobachtet worden ist, wie groß in C der ∠ NCG der Seite CD gegen die Nadel oder Nordlinie CN; in D der ∠ NDe der Seite DE gegen die Nordlinie DN und so fort in E der Bogen NMO zwischen EF und EN sey, denn wenn diese Abweichungen der Seiten von der Nordlinie bekannt sind, so kann man alsdann die Figur auch auf dieselbe Art zu Papier bringen, wie wir in I. gethan haben.

Auflosung. Man setze den Winkel NBc, unter welchem die Seite BC gegen die Nordlinie BN geneigt ist, = k° und den in C beobachteten innern Winkel, nämlich den Bogen KIHG = λ°, so ist der ∠ NCG oder Bogen NG, unter welchem Seite CD gegen die Nordlinie CN geneigt ist, = 180° + k° − λ°, und wir finden daher den gesuchten Winkel NCG, wenn wir den vorhergehenden Winkel NBc zu 180° addiren und von der Summe 180 + k die Grade λ des innern Bogens KIHG subtrahiren. Denn wenn wir BC bis H verlängern, so ist ∠ cBN = HCN = k, Bogen KIH = 180°, Bogen HN = k° und Bogen KIHN = 180° + k° und Bogen NG = Bogen KIHN − Bog. KIHG = (180 + k) − λ.

Setzt man diesen Bogen NG = 180 + k − λ = μ und den innern Winkel in D, nämlich den Bogen ec = ν, so ist, wenn CD bis L verlängert wird, ∠ NDL = ∠ NCG = μ = Bog. NL; Bogen Lec = 180; Bogen ceLN = ceL + LN = 180 + μ und ∠ NDe oder Bogen NLe = Bog. NLec − ce = (180 + μ) − ν = 180 + NG − ce.

Eben so kann auch bewiesen werden, daß in E der Bogen NMO = 180 + *L* NDE — *L* REO, und so fort, ist.

IV. Anmerkung. Viele andere Aufgaben, welche durch Hilfe des Theodoliten oder der Bouſſole aufgelöst werden, findet man in §. 40. und zwar von Nr. 12. bis zu Ende dieses Paraphen. Auch können die Sätze zu Ende des 45sten Parag. nachgesehen werden.

§. 51.

Von Aufnehmen großer Felder mit den darin liegenden einzelnen Grundstücken.

I. Aufgabe. Ein großes Feld Fig. 172., was eben nicht sehr breit liegt, aber sich von A nach E und von E nach H hin sehr weit fort in die Länge zieht, richtig mit allen einzelnen Grundstücken zu messen und zu Papier zu bringen. Fig. 172.

Auflösung. Man theile das große Feld in mehre einzelne kleine Felder, als

I) ins kleine Feld ALMNIK;
II) — — — IMOR;
III) — — — QOSU;
IV) — — — RQUWV;
V) — — — WUTaX;
VI) — — — XZY;

und so fort dergestalt ein, daß man jedes kleine Feld mit allen darin befindlichen einzelnen Grundstükken füglich mit dem Meßtische auf die Art, wie in §. 47. von V bis VII. beschrieben worden ist, aufnehmen und zu Papier bringen kann; siehe bey dieser Eintheilung in kleine Felder vorzüglich auf zweyerley,

1) darauf, daß die Figur von einem solchen kleinen Felde aufs Meßtischblatt gehe und wenn ein kleines Feld ROSUWV noch immer zu groß scheinen sollte, so theile man es in zwey Felder QUSO und QUWVR ein;

Fig. 172. 2) sehe man bey dieser Eintheilung zugleich auch darauf, daß die Grenze von einem Felde zum andern so viel als thunlich ist, eine natürliche Grenze, z. B. ein Weg, ein Rain, oder eine politische Grenze werde, welche die Grundstücke verschiedener Eigenthümer scheidet; wenn jedoch eine solche Grenze nicht vortheilhaft anzubringen ist, so zieht man eine künstliche Grenzlinie MI, welche ein kleines Feld I vom andern II scheidet, und es wird die Folge lehren, daß es auch im geringsten nicht nachtheilig ist, wenn die gezogene Linie MI über manche Grundstücke weggeht, wovon ein Theil in I und ein anderer Theil in II liegt, weil nachher die Risse von beyden Feldern IMLAK und IMOR so an einander gestoßen werden, daß das Ganze ALMORIK als ein einziger Riß erscheint.

Nachdem man nun das große Feld in lauter kleine leicht zu messende Felder abgetheilt hat, so pfählt man, noch ehe man die Messung selbst beginnt, eine gerade Linie ABCDE aus, welche viele kleine Felder I, II, III ꝛc. (und durch Verlängerung selbst auch das Feld VI) durchschneidet, und wenn man sieht, daß noch mehre Felder als VII, VIII, IX, welche hinter einander liegen, undurchschnitten bleiben, so pfählt man noch eine zweyte gerade Linie EFGH auch zu diesen Feldern aus, bemerkt den Durchschnittspunkt E der beyden geraden Linien AE und EH, nimmt den ∠ AEH genau auf, trägt ihn zu Hause auf ein großes Blatt Papier (welches man nöthigen Falls aus mehren Blättern zusammen setzen kann); mißt aus E nach A und aus E nach H sehr vorsichtig mit einer guteingetheilten Kette, läßt alle 50 oder alle 100 Ruthen kleine Stäbchen D; C, B, A in die Linie EA und dergleichen Stäbchen F, G, H auch in die Linie EH einsetzen; bringt alle diese Punkte A, B, C, D, E, F, G, H auch zu Papier; pfählt sodann zuerst ein Feld ALMIK mit den Punkten A und N aus, wo die Hauptlinie AE ein- und austritt, bringt dieß Feld mit allen inliegenden einzelnen Grundstücken, mit der Durchschnittslinie AN und mit dem darin befindlichen Punkt B nach §. 46 oder 47 zu Riß,

schneidet das Blatt mit dem Risse vom Tische ab und verwahrt es gehörig; legt wieder ein anderes Blatt auf, pfählt das zweyte Feld IMQR mit der Durchschnittslinie NP und dem Punkte C aus und bringt dasselbe ebenfalls zu Riß, und so fährt man fort das Feld III und IV mit der Durchschnittslinie PD, und alle folgenden Felder V und VI aufzunehmen und die einzelnen Risse gehörig aufzuwahren, bis man endlich auch diese Felder wodurch die Linie EFGH geht, gemessen hat. Fig. 172.

Endlich schreitet man zum Zusammentragen der einzelnen Risse auf ein einziges großes Blatt Papier, worauf wir schon oben den Winkel AEH mit den einzelnen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H eingetragen hatten; legt nämlich den Riß I auf das große Blatt so, daß nicht nur die Linie AN des Risses genau über die Linie AB des großen Blattes zu liegen kömmt, sondern auch der Punkt B beyder Blätter sich deckt (wo man vorher eine Linie auf beyden Blättern zieht, welche AN oder AE in B senkrecht durchschneidet und wo nun auch diese Senkrechte beyder Blätter sich decken muß), copirt in dieser Lage den Riß I aufs untere Blatt; legt sodann den Riß II so aufs große Blatt, daß nicht nur die Linie NP des Risses genau über oder in AE des großen Blattes zu liegen kömmt, sondern auch der Punkt C beyder Blätter sich deckt, in welcher Lage sich auch die gemeinschaftliche Grenze MI dieses und des vorigen Risses sich decken muß und in welcher Lage auch der Riß MQRI copirt werden kann. Eben so trage man auch die Risse III und IV so ein, daß PD in AE liegt und der Punkt D beyder Risse den Punkt D des großen Blattes deckt, und so fahre man fort, den Riß V nach den Punkten E und D richtig, den Riß VI in die Verlängerung von AE, VII in E und F richtig einzutragen, bis endlich alle einzelne Risse auf dem großen Blatt gehörig beysammen stehen, wo nun überall die gemeinschaftliche Grenze von einem Felde zum andern sich decken muß.

Anmerkung. Daß es hier einerley ist, nach wel-

cher Ordnung man die einzelne Felder mißt, aufträgt und copirt, leuchtet von ſelbſt ein, am liebſten fängt man mit der Parthie V an, worin der Winkel AEH liegt, und ſchreitet ſodann zu den zunächſt anliegenden Parthien III, IV, VI, VII, wo man endlich mit den Parthien II und I oder mit VIII und IX ſchließt. Auch iſt klar, daß wenn ein Feld nur aus den Parthien I, II, III, IV, V und VI beſtänd, man auch nur eine einzige Durchſchnittslinie nöthig hätte; und iſt AE nicht ſehr lang, ſo iſt auch das Meſſen der Linie EA mit den von 50 zu 50 Ruthen eingeſchlagenen Stäben E, D, C, B, A unnöthig.

Fig. 173. II. Iſt ein großes Feld, Fig. 173. nicht nur lang, ſondern auch breit, und beſteht daſſelbe aus vielen beſondern Feldern oder Bezirken, wovon ein jedes Feld, wie vorher, in viele einzelne Grundſtücke geſpaltet iſt und mit dem Meßtiſche aufgenommen zu werden verdient und auch das Blatt deſſelben ausfüllt; ſo legt man zuerſt eine Hauptlinie ABCDE an, welche faſt unter allen Durchſchnittslinien die längſte ſeyn mag, zieht ſodann noch mehre dergleichen Durchſchnittslinien, als LBFG und NDHG, welche ebenfalls auch ziemlich lang werden und nicht gar zu nahe an der Grenze UTSR und OPQR zu liegen kommen; bemerkt die Durchſchnittspunkte B, D und G der vorgezogenen Linien AE, LG und NG, mißt die Seite BD des Dreyeckes BDG nebſt den anliegenden Winkeln in B und D ſehr genau, trägt die Seite BD dieſes Dreyeckes verjüngt auf ein großes Blatt Papier, legt daſelbſt in B und D die Winkel DBG und BDG an; mißt die Seiten BG und DG des Dreyeckes BDG im Felde und ſieht nach, ob dieſe Seiten auf dem Papiere richtig zutreffen; laſſe, während die Linien BD, BG oder DG im Felde gemeſſen werden, alle 20; 40 oder 50 Ruthen Stäbchen einſchlagen und zeige den Ort dieſer Stäbchen durch Punkte C, F, H ꝛc. auch auf dem Papiere an, vervollſtändige das Netz des Dreyeckes BDG theils dadurch, daß man die Seiten BD, DG, BG rückwärts und vorwärts nach A

und E, L und N hin verlängert, theils dadurch, daß man aus B durch H eine gerade Linie HP und so auch aus D nach F und aus G nach C dergleichen Linien zieht, und endlich dadurch, daß man die Linien FC, CH oder HF verlängert, doch werden dergleichen Durchschnittslinien nur an solchen Orten nöthig, wo viele Meßbezirke hinter einander liegen, welche von keiner andern Netzlinie durchschnitten werden, und sollten ja manche Bezirke, welche zwischen andern liegen, auch nicht durchschnitten werden, so macht dieß auch nichts aus, weil sie in die Grenze der anliegenden Bezirke passen müssen. Fig. 173.

Sind am Ende so viele Netzlinien auf dem Felde und auf dem Papiere gezogen, daß dadurch die Lage eines jeden Bezirks bestimmt werden kann und hat man auch die 20, 40 oder 50 Ruthen weit von einander gesetzten Stäbchen aufs Papier getragen; so theilt man, nach denselben Regeln wie vorhin in I, die große Fläche in lauter kleine Bezirke ein, mißt jeden Bezirk besonders, bringt denselben mit allen einzelnen Grundstücken, Rainen und Wegen gehörig zu Riß und bemerkt vorzüglich die Punkte, wo Durchschnittslinien ein- und austreten und wo ein 40 oder 50 Ruthenstab eingeschlagen ist, sammelt alle Risse und trägt sie auf dieselbe Art zusammen, wie vorher in I beschrieben worden ist, und zwar fängt man mit denjenigen Bezirken zu reihen an, welche in oder an der Linie AE liegen, fährt sodann mit den Bezirken an den Netzlinien NG und LG fort und beschließt diese Arbeit mit den Bezirken, welche an Nebenlinien des Netzes liegen.

Anmerkung. Versteht man sich mit einem leicht zu führenden Winkelinstrumente (Spiegelsextanten), welches Winkel von 60 Graden genau angibt und eine ähnliche Einrichtung wie der §. 18. II beschriebenen Winkelspiegel hat, und macht man mit diesem Instrumente den ∠ EBG = 60°, pfählt die Linen BDE und BFG gehörig aus, und macht man sodann in der Linie BE das Stück BC = 40 Ruthen und den ∠ BCF ebenfalls = 60°, wo nun

der Schenkel CF den Schenkel BF in F schneidet, so sind auch diese Schenkel = BC = 40 Ruthen. Eben so wird auch, wenn ∠ BDG = 60° gemacht wird, sowohl DG als BG = BD seyn und man hat daher niemals nöthig, die Stücke BG und DG mit der Ruthe zu messen, es muß aber BD genau gemessen, und der Spiegelsextant vollkommen richtig seyn. Macht man BF und DH = ½ BD = BC so ist auch FH = ½ BD.

Fig. 173. III., Statt eines Dreyeckes BDG Fig. 173. legt man in ebenen Gegenden oft viel vortheilhafter ein ziemlich großes Quadrat oder ein Rechteck an, verlängert ebenfalls auch seine Seiten, schlägt darin alle 40 Ruthen Stäbchen und theilt dadurch das große Quadrat in kleinere ein, macht das Netz durch gezogene Parallelen oder Querlinien immer vollständiger und verfährt übrigens wie vorher.

Auch ist zuweilen ein Netz von der Form eines Fig. 148. Trapezes VSTU Fig. 148., welches wir §. 46. III. IV. ꝛc. beschrieben haben, sehr sachdienlich, nur dürfen die Linien ST, SV, TU nicht zu nahe an der Grenze liegen. Uebrigens kann man auch hier das Netz durch Verlängerung der Seiten und durch gezogene Grenzlinien WXY; TGK ꝛc. vollständiger machen, wie §. 46.

In Gebirggegenden sieht man sich oft genöthiget, Fig. 173. auf hohen Punkten B, D oder auch G Fig. 173. Stangen mit farbigen Fahnen zu errichten, den Meßtisch in B aufzustellen, aus B nach den Stangen D und G und nach Stäben A, L, I, F, welche in die zunächst umliegende Gegend ausgesetzt werden, zu visiren, auf dem Meßtischblatte die Visirlinien BD, BG, BI, BA, BL ꝛc. recht lang zu ziehen, den erhaltenen Stern von Visirlinien auf ein großes Blatt Papier, worauf die ganze Figur 173 getragen werden kann, zu copiren, die Entfernung BD der Stangen B und D nach Ruthen zu messen und aufs Papier verjüngt aufzutragen, in D ebenfalls nach den übrigen Stangen B und G und nach Stäben N, E, K, H, welche in die zunächst umliegende Gegend gesetzt werden, zu visiren

und den erhaltenen Stern von langen Visirlinien in den Punkt D des großen Papierblattes so einzutragen, daß der Visirstrahl DB genau über die schon vorgezogene Linie BD zu liegen kömmt, wo nun durchs Schneiden der Visirstrahlen BG und DG auf dem Papiere der Punkt G zum Vorschein kömmt, und wo man zur Probe die Seite BG oder DG und den ∠ BGD in G ebenfalls mißt. Auch hier werden beym Messen der Linien BD und BG und der übrigen Linien alle 40 Ruthen Stäbchen eingeschlagen, damit man nachher die Risse von den einzelnen Feldern oder Bezirken genau auf die zugehörige Stelle des großen Risses bringen könne. Fig. 173.

IV. Zuweilen liegt ein Bezirk ganz in einer Schlucht und ist deshalb von keinem Hauptorte des großen Netzes sichtbar. Wenn nun der Bezirk XIII. Fig. 173. ein solcher ist, so sucht man zwey partiale Netzlinien EH und DK so anzubringen, daß diese sich in einem Punkt W des Bezirks XIII. durchschneiden. Sind nämlich die Punkte E und H schon im Netze bestimmt, so kann man auch auf dem großen Blatte Papier die Linie EH geradezu ziehen, und ist zwar der Punkt D aber nicht der Punkt K fest, der aus D jenseits der Schlucht W sichtbar ist, so muß man wenigstens aus D nach K visirt und diese Visirlinie DK oder den ∠ BDK aufgetragen haben. Nachdem nun die Linien EH und DK auf dem großen Blatte gezogen sind, so pfähle man sie im Felde dergestalt aus, daß man ihren Durchschnittspunkt W und auch diejenigen Punkte im Felde erkennen kann, wo diese Linien den Bezirk XIII durchschneiden, (daselbst ein- und austreten); hierauf messe man diesen Bezirk auf die gewöhnliche Art, bringe ihn auf ein besonderes Meßtischblatt mit den durchschneidenden Linien und mit dem Punkte W zu Riß, und passe alsdann diesen Riß aufs Hauptblatt so, daß der Punkt W und die Durchschnittslinien beyder Blätter sich decken.

Liegen die Distrikte von I bis XIV auf der obern Ebene, die Distrikte XV bis XVIII an der Bergwand und die Distrikte XIX bis XXI ganz unten im Thale

und hat man für die obere Ebene die Netzpfähle A, B, C, D, E, I, F, H, K mit außerordentlicher Genauheit gesetzt und zu Papier gebracht; so verlängert man zwey solche Linien DH und BF die sich in einem Punkte G des untern Thales durchschneiden und bindet nun die Messung der Distrikte im Thale an diesen Punkt G und an die Verlängerung der Linien BFG und DHG an. Bringt man gewisse Hauptpunkte am obern Rande der Bergwand durch Hilfe des Netzes, das auf der obern Ebene ausgepfählt ist, — und gewisse Hauptpunkte am untern Rande der Bergwand durch Hilfe des Netzes, das im Thale ausgepfählt ist, gehörig zu Riß; so wird man sodann auch die einzelnen Bezirke XV, XVI; XVII und XVIII, welche an der Bergwand liegen, nach allen ihren Bestandtheilen sehr leicht zu Riß bringen können.

Sehr oft ziehen schmale Wiesgründe mit anlieliegenden Aeckern in Schlüchten, von beyden Seiten mit Wald umgeben, fort, und es ist daher die freye Fig. 172. Aussicht sehr versperrt. Wenn nun die Fig. 172. ein solches Land ist, das zwar ebenfalls aus verschiedenen Meßbezirken als I, II, III, IV, V ꝛc. besteht, aber von Wald umgeben ist, so können wir nur einfache Netzlinien AE, EH, so lang anlegen, als es die Aussicht erlaubt und an dem Orte E, wo eine Linie AE aufhört, die andere EA anbinden, wo man nun, wenn die Schlucht sich noch weiter ziehen sollte, ferner an den Punkt H noch eine dritte Linie anbinden kann. Wie wir nun die beyden Netzlinien AE und EH durch Hilfe des aufgenommenen Winkels AEH aufs Papier tragen sollen, ist schon zu Anfang dieses Paragraphen gezeigt worden, und auf dieselbe Art, wie wir dort die beyden Netzlinien AE und EH auf dem großen Blatte Papier in Verbindung gebracht haben, werden wir auch eine dritte Netzlinie mit der zweyten EH in Verbindung bringen können. Werden aber viele dergleichen folgende Netzlinien mit den vorhergehenden auf die jetzt gezeigte Art in Verbindung gebracht; so läuft man Gefahr, daß die letzten Netzlinien nicht ganz richtig gelegt worden: um dieser Ge-

fahr vorzubeugen, verbindet man ein Boussolenkästchen mit dem Meßtische, nimmt jeden Winkel durch lang gezogene Visirlinien auf, überspringt zwar keinen Stand, man sieht aber, um sich gegen Fehler, die sich fortpflanzen, zu verwahren, in allen Standorten die Richtung der Magnetnadel nach. Noch sicherer geht man, wenn man ein Stück Netz ABCDE Fig. 160., das in einer Schlucht fortlauft, durch gezogene Fig. 160.
Linien EF und FA im angrenzenden Walde vollends zum Schlusse bringt und alsdann die Richtigkeit des gezogenen Umfangsnetzes ABCDEFA auf die §. 47 und 48 gezeigte Art prüft. Natürlich geht das Umfangsnetz nicht aufs Meßtischblatt, und man stellt daher den Tisch zwar in einem jeden folgenden Stande auf den vorhergehenden zurück, man zieht aber die Visirlinien an einen beliebigen Ort des Tisches recht lang, trägt die Figur selbst auf ein großes Blatt Papier, und transportirt die auf dem Meßtische angezeigten Winkel an den zugehörigen Ort des großen Blattes.

Sollte jedoch die Schlucht nicht gar zu eng seyn, so kann man ein Netz, was aus lauter Dreyecken zusammen gesetzt ist, für die daselbst liegenden Aecker und Wiesen fertigen, welche Arbeit Trianguliren genannt wird und weiter unten näher beschrieben werden soll.

V. Ist eine Flur sehr groß, so ist es nicht rathsam, alle Felder derselben mit der Stadt oder dem Orte selbst in einen einzigen großen Riß zusammen zu tragen, weil die Charte zu groß und zum Gebrauche zu unbequem würde. Es ist weit rathsamer die große Flur in gewisse Hauptheile zu theilen, als

1) in Wiesgründe mit den anliegenden Feldern, a) oberhalb und b) unterhalb der Stadt oder des Dorfs, c) Nebengründe.

2) ins Winterfeld } ober und unterhalb, diesseits
3) Sommerfeld } oder jenseits eines Weges oder
4) Brachfeld } einer andern natürlichen Grenze.
5) in Bergäcker und Hutrasen

Fig. 176. 6) Wälder, nach den verschiedenen Himmelsgegenden oder Lagen geordnet.

Ueberall sieht man darauf, daß eine Charte nicht größer, als eine gewöhnliche Landcharte wird, und wenn man besorgt, die Charten würden zu groß, so macht man daraus durch geschickte Eintheilung mehre kleinere. Will man jedoch Stadt und Gebiet, oder das Dorf mit seiner Flur auf einer Charte beysammen sehen, so muß man die Risse von den vielen Charten kleiner zeichnen (verjüngen) und sie alsdann zusammen tragen.

§. 52.

Von Aufnehmen der Städte und Dörfer mit den anliegenden Gärten.

Ein von Strasen oder Gassen eingefaßter Theil der Stad Stadt wird von den Geometern ein Feld der Stadt genannt, und ein Netz, welches durch die Strasen am Umfange eines solchen Feldes gezogen wird, heißt Feldnetz. Von diesem unterscheidet man das Hauptnetz, welches nur durch gewisse Hauptstrasen geht, aus möglichst langen Linien besteht, welche mit einander verbunden werden.

Wollen wir eine Stadt oder Dorf mit allen Strasen und öffentlichen Plätzen, mit allen einzelnen Haus- und Hofplätzen und Gärten durch einen getreuen Riß vor Augen stellen, so müssen wir

1) zur ganzen Stadt oder doch zu einem großen Theil derselben ein Hauptnetz durch die Hauptstrasen ziehen und mit demselben ein Patrialnetz nach dem andern in Verbindung bringen,

2) müssen wir ein Feld nach dem andern mit allen einzelnen Haus- und Hofplätzen und Gärten durch Hilfe des dazu gezogenen Netzes zu Riß bringen und die einzelnen Risse von den Feldern auf ein großes Blatt, worauf das Hauptnetz gezeichnet ist, zusammen tragen.

I. Es

I. Es stelle die Tafel XXIII Fig. 176. einen Fig. 176.
ziemlich großen Theil einer Stadt vor, deren Felder mit I; II; III; IV ꝛc. bezeichnet sind und wo ein Feld vom andern durch eine Straße getrennt ist; so sieht man vor Augen, daß man aus dem Standorte B nach A, nach E und nach Q visiren und diese vier Punkte in ein Hauptnetz zusammentragen könne, wenn BA, BE und BQ gemessen werden. Da man zur Absicht hat, an dieß Hauptnetz die Messung der Seitenstraßen und der einzelnen Felder zu binden, so werden beym Messen einer jeden Netzlinie BE zugleich auch die Punkte C und D bemerkt, aus welchen man recht weit in die Seitenstraßen CB und DZ oder auch durch Thüren und Hallen in die inwendige Gärten sehen kann. Aus dem Hauptpunkte E kann man nun wieder weit in die Straße EF sehen und wenn man EF rückwärts bis G verlängert, so erhält man in G eine Aussicht in die Straße GT und GI, welche letzte noch weit fortläuft, aber nicht angezeigt ist. Aus einem Zwischenpunkte H der Linie GI kann man ferner durch die ganze Straße HKL sehen und wenn man sich im Punkte K dieser Straße aufstellt, so erlangt man eine Aussicht zur Straße MKNO, wo nur noch die Linie OQ gezogen werden muß, um den Theil BEGHKOQ des Hauptnetzes zum Schlusse zu bringen. Eben so können wir auch andere Theile des Hauptnetzes zum Schlusse bringen und überhaupt das Hauptnetz beliebig vergrößern. Die Art und Weise, wie ein Hauptnetz aufgenommen und zu Papier gebracht wird, unterscheidet sich vom Aufnehmen eines Umfangsnetzes wenig oder nicht, nur muß man hier mit der größten Vorsicht und Genauheit zu Werke gehen. Nachdem nämlich aus B nach A, E und Q visirt worden ist, so stellt man, ohne BE aufzutragen, in E den Meßtisch parallel zurück nach B, visirt nach den Stab in F, verlängert FE bis G, stellt den Meßtisch in G parallel zurück nach F, visirt aus G nach I, stellt den Meßtisch im Zwischenpunkte H parallel zurück nach einem entfernten Punkte I oder G und visirt aus H nach L, und so fährt man fort auch die übrigen Winkel in K und O

Fig. 276. aufzunehmen. Wenn nun auch noch alle Seiten des Netzes mit der Kette gemeſſen werden, ſo kann man das Hauptnetz auf ein großes Blatt auf folgende Art auftragen. Da alle Winkel QBE; EBA; BEF oder BE ; , F I oder FGH; GHL oder IHK ꝛc. auf dem Meßtiſche mit lang gezogenen Schenkeln ſtehen, ſo wird zuerſt in einem wohlgewählten Punkte B des großen Blattes und nach einer wohlgewählten Lage der ∠ EBQ und ∠ EBA eingetragen und jedem Schenkel die ihm zukommende Länge gegeben, ſodann legt man in E den Winkel BEF (der auf dem Meßtiſche mit langen Schenkeln gezogen iſt) durchs Copiren an, wodurch man zugleich auch die Lage der Linie EG erhält, macht EG = der verjüngten Länge im Felde, copirt in G den ∠ FGI des Meßtiſches, macht GH nach dem verjüngten Maaßſtabe gehörig lang, legt in H den Winkel IHL gehörig an, mißt HK gehörig ab, ertheilt in K der Seite MO die ihr zugehörige Lage und macht KO verjüngt = der Länge im Felde, trägt in O die Lage und Länge der Seite OQ; ſo muß jetzt auch der ∠ OQB richtig ſeyn und der Theil des Netzes QBEGHKOQ ſchließen, und er wird auch ſchließen, wenn dieſer Theil des Netzes ſelbſt aus nicht zu viel Seiten beſteht und die Meſſung der Winkel und Seiten und das Auftragen derſelben mit Aufmerkſamkeit geſchehen iſt.

Mit dem beſchriebenen großen Netze bringt man alsdann die inliegenden kleinen Netze BQPC; CEGTR; TRPN; GTNKH ꝛc. in Verbindung, indem man in BE den Punkt C und in OQ den Punkt P bemerkt, die Linien CP zieht; in KO den Punkt N bemerkt und in N den Tiſch aufſtellt, daſelbſt den ∠ MNT aufnimmt und dieſen Winkel auf der zugehörigen Stelle des großen Blattes einträgt, wo, wenn aus G nach T viſirt worden iſt, auch nachher die Längen NT und GT zutreffen müſſen, und wenn in CP der Punkt R bemerkt worden iſt, auch die Linie RT zutreffen und mithin alle genannte kleine Netze gehörig ſchließen müſſen.

11 Jedes kleine Netz oder Feld kann ſodann vom großen Blatte wieder auf ein neues Meßtiſchblatt

durchs Copiren gebracht und in dasselbe alle Gebäude Fig. 176.
dieses Feldes mit den zugehörigen Höfen und Gärten eingetragen werden. Um die Punkte an der Straſe zu erhalten, wo ein Hofrecht ans andere grenzt, rückt man die Netzlinie, welche in der Straſe fortläuft, den Häusern so nahe als möglich und bestimmt einen Grenzpunkt nach dem andern durch Abscissen und Ordinaten. So z. B. findet man für die Risse von Häusern, welche an der Straſe DE liegen, die Grenzpunkte von einem Hauſe zum andern dadurch, daß man eine gerade Linie $\alpha\beta$ sehr nahe an die Häuser legt, durch Ordinaten $D\alpha$ und $E\beta$ die Punkte α und β bestimmt, von α nach β mißt und während dieser Messung die nöthigen Abschläge zu den verlangten Grenzpunkten der Häuser macht. Eben so können wir auch an derselben Straſe die Grenze von einem Hauſe zum andern in der Reihe $\gamma\delta$ bestimmen. Da jedes Feld von Netzlinien umgeben ist, so können auch alle Häuser ringsum eines Feldes auf die jetzt gezeigte Art zu Papier gebracht werden, wir erhalten aber nur die Länge der einzelnen Häuser an der äußern Straſe; wie weit die Häuser nach den innern Gärten sich ausbreiten, welche Figur jedes einzelne Hofrecht macht und wie groß die Fläche desselben ist, dieß kann nur dann ausgemittelt werden, wenn wir die Messung des Innern mit der Messung des äußern Netzes gehörig verbinden und jedes Hofrecht zu Riß bringen. Hierzu dienen nun folgende Regeln:

1) Sind die innern Gärten so ziemlich übersichtlich, welches der Fall beym Felde VIII seyn soll, so muß man solche Punkte U und S im äußern Netze aufsuchen, aus welchen man ziemlich tief ins Innere sehen und Linien UV und SV, die in die Gärten führen, auspfählen kann. Sehr oft muß man hierzu Hallen wählen, welche im untern Stockwerke der Häuser bis zu den Gärten fortgehn. Natürlich müssen die Winkel CUV und RSV und überhaupt die gezogenen Linien UV und SV gehörig aufgenommen und zu Papier gebracht werden; und wenn beyde Linien in einem Punkte V sich durchkreuzen, so kann man so-

Fig. 276. gleich wissen, ob das innere Netz UVS, das auch verlängert und weiter fortgesetzt werden kann, richtig ist. Mit diesem Netze verbindet man alsdann die Messung der innern Gärten und Hofplätze und des anstoßenden Saums der Häuser. [Eigentlich begehrt aber der Geometer nur die Figur und Fläche der einzelnen Hofrechte, wozu auch Haus, Stallung und Garten gehört, auf dem Risse beysammen zu sehen; ob die Fläche des darauf stehenden Hauses und der Nebengebäude, der Scheune und Stallung, des Haus-Hofes und Gartens groß oder klein ist und wie diese einzelnen Dinge auf der Fläche des Hofrechts beysammenliegen und geformt sind, alles dieß bekümmert ihn wenig. Es darf ihn auch dieß nicht bekümmern, weil ein Riß auf langer Dauer gültig seyn soll, dagegen aber die Gebäude jährlich verändert werden können. Nur dann, wird im Risse was geändert, wenn ein Stück vom Hofrechte an einem andern Eigenthümer verkauft oder vertauscht wird.]

2) Alles kömmt darauf an, daß man die Ecken oder Grenzsteine eines jeden einzelnen Hofrechts richtig zu Riß bringt. Hat man alle vier, fünf oder sechs Ecken desselben auf dem Papiere, so ist auch die Form und Größe des Hofrechts selbst gegeben, indem man nur Linien von einer Ecke zur andern zu ziehen hat. Alle Ecken eines Hofrechts, welche an der Straße, an freystehenden Nebengebäuden und im zugehörigen Haus-Garten gefunden werden, sind sichtbar und können entweder aus dem äußern oder aus dem innern Netze leicht bestimmt werden. Zuweilen sind aber zwey Häuser, welche eine winklige Grenze haben, so aneinander gebaut, daß man diesen Winkel von außen nicht sehen kann. Ist ein solcher Winkel, den man leicht ausfragen kann, vorhanden, so ist nöthig, daß man durch den untern Hausgang Linien ziehe, diese geometrisch aufnehme und mittelst dieser Linien die Ecke des Winkels bestimme. Haben die aneinander gebauten Häuser eine gemeinschaftliche Wand, so wird diese halbirt, und jedem der beyden anliegenden Hausbesitzer die halbe Wanddicke zu gemessen. Wie dick

die Wände sind, kann man unter andern leicht da- Fig. 176.
durch erfahren, daß man auswendig von einem Fenster (wo zwischen eine Wand liegt) zum andern — und inwendig von diesen Fenstern bis zur Wand mißt und die innere Entfernung von der äußern abzieht.

3) Nicht immer hat man innerhalb eines Feldes oder Kranzes von Häusern eine Aussicht zu den verschiedenen inwendigen Gärten oder Höfen, sondern es ist diese Aussicht durch hohe Mauern versperrt, oder es sind dergleichen Gärten gar nicht vorhanden, indem lauter weitläufige Gebäude in einander gekeilt sind. In diesem Falle sucht man zwar einzelne übersichtliche Parthien auf dieselbe Art wie vorher zu behandeln, wo aber alle Aussicht und freyer Zugang von anderen Hofrechten fehlt, da bleibt uns kein anderer Weg übrig, als die versperrten Hofrechte einzeln aufzunehmen, durch die Eingänge des Hauses Linien zu ziehen, mit diesen Linien wieder andere Linien so zu verbinden, daß man dadurch alle Eckpunkte des Hofrechts gewinnen kann. Diese Linien vertreten die Stelle eines Netzes, welche zur Grundfläche des Hofrechtes gezogen wird, und ein solches Netz muß jederzeit ans äußere Umfangs- oder Strasennetz gebunden werden. Wählt man die Bousole zum Aufnehmen dieses Hausnetzes, so darf man sie nicht in der Nähe von Eisen aufstellen, noch weniger darf der Geometer Drath im Huthe, oder Stahl und Eisen an Kleidern bey sich führen, weil das nahe Eisen die Lage der Magnetnadel verändert; wird aber die Bousole vor dem Einflusse eines nahen vorzüglich großen Stück Eisens verwahrt, so kann der Geometer auch hier einen Eckpunkt des Hausnetzes um den andern überspringen, und weil keine Seite dieses Netzes beträchtlich lang ist, so hat man auch keine merkliche Fehler in aufgenommenen Winkeln zu befürchten, wenn nur sonst die Nadel empfindlich ist und die Bousole gut behandelt wird. Damit man aber nachher die Figur durch Hilfe des in Grade eingetheilten Reißbretes auftragen könne, so muß man zuvor, wenn z. B. die Linie UV Fig. 176. an die Seite RC des

Fig. 176. Strasennetzes gebunden werden soll, die Seite RC nämlich das ganze Strasennetz RCEGT nach der Nordlinie richtig aufs Bret legen, welches schon dann geschehen kann, wenn nur eine einzige Linie RC oder CE dieses Netzes durch die Bouffole abvisirt worden ist.

Anmerkung. Sehr gerne verbindet man das Hauptnetz, welches man zum Messen der ganzen Stadt anlegt, durch den Ein- oder Ausgang der Thore mit dem äußern Flurnetze. Es ist nicht nöthig, daß man die vielen Pfähle zu den Netzen in den Strasen auf einmal ausstelle, sondern man pfählt nur einen Theil des Hauptnetzes um den andern aus, macht Zeichen ins Pflaster durch Spitzhämmer oder schlägt daselbst ein kurzes Pfählchen statt des Hauptpfahls ein, und wenn man nachher einen solchen Punkt wieder braucht, so stellt man alsdann daselbst eigen dazu gefertigte Stangen aus, welche unten drey Beine haben, die durch Schrauben gerichtet werden können.

§. 53.

Von Aufnehmen der Wälder.

Soll ein groser Wald gemessen und zu Riß gebracht werden, so muß man ihn zuvor in mehre Distrikte und Bezirke eintheilen, sodann jeden Bezirk und Distrikt besonders messen und zu Riß bringen und zuletzt die Risse von diesen Distrikten in einen einzigen Riß gehörig zusammenstoßen. Wir haben daher zu handeln:

1) Von Abtheilen eines Waldes in besondere Meßbezirke.
2) Von Messen eines solchen Waldbezirkes und
3) Von Zusammenstellen der einzelnen Bezirke.

I. Von Abtheilen eines Waldes in besondere Distrikte und Bezirke.

Hier gelten folgende Regeln:

1) Man muß den Forst in mehre Distrikte dergestalt abtheilen, daß kein Distrikt zu groß wird, weil dann zu besorgen ist, daß sein Riß nicht aufs Blatt gehe und man im Messen und Auftragen großer und vielseitiger Figuren Fehler begehe, die man nachher nicht leicht auffinden und verbessern kann.

Wählen wir einen verjüngten Maaßstab von einer solchen Beschaffenheit, daß 20 verjüngte Ruthen gegen einen gemeinen Zoll lang sind, so wird man auf einen Meßtisch, der $1\frac{1}{2}$ Fuß oder 18 Zoll lang und breit ist, nur eine Entfernung von 18×20 oder 360 verjüngte Ruthen auftragen können. Sind demnach im Felde oder Walde die beyden äußersten Punkte eines zu messenden Distriktes über 360 Ruthen (welches, wenn die Ruthe 14 oder 16 Fuße lang ist, beynahe eine halbe Stunde ausmacht) von einander entfernt, so geht der Riß vom Distrikte nicht füglich aufs Meßtischblatt. Es darf daher unter diesen Umständen die Länge und Breite eines Distrikts niemals mehr als anderthalb Viertelstunden betragen, wenn man überzeugt seyn will, daß der Riß aufs Meßtischblatt gehe. Ist ein Distrikt größer, so muß man daraus zwey machen, oder einen Theil desselben zu einem andern Distrikte schlagen. Aus zwey neben einander liegenden zu großen Distrikten macht man oft füglich drey.

2) Man wähle so viel als thunlich ist, natürliche Grenzen zu einem Distrikte, als Wege, Schlüchte, Bergrücken, obere oder untere Ränder der Gebirge; Linien, wo Laub- und Nadelholz oder Hoch- und Niederwald, altes und junges Holz, gute oder schlechte Bestände an einander grenzen; übrigens kann aber der Distrikt selbst noch von vielen anderen Wegen durchschnitten werden und viele andere Schlüchte, Bergrücken und Ränder und Bestandswechsel im Innern enthalten. Sind keine schickliche natürliche Grenzen für einen abzutheilenden Distrikt vorhanden, so zieht man an einem wohlgewählten Orte eine künstliche Grenzlinie und bezeichnet sie durch eingeschlagene starke Pfähle und Anlegung schmaler Schneuswege.

3) Wenn wir aber auch einen Distrikt nur so groß annehmen, daß sein Riß wirklich aufs Blatt geht, so ist es doch gefährlich, den Distrikt selbst durch ein bloßes Umfangsnetz aufzunehmen, sondern man theilt den Distrikt wieder aufs neue durch gezogene Durchschnittslinien in mehre Bezirke dergestalt ab, daß nun jeder Bezirk durch ein leichtes Umfangsnetz sehr sicher und richtig aufgenommen werden kann. Auch hier wählt man gern natürliche Durchschnittslinien der Distrikte, nämlich natürliche Grenzen für die einzelnen Bezirke, und wenn keine dergleichen vorhanden sind, so zieht man ebenfalls künstliche Durchschnittslinien.

4) Wenn eine Forstmessung wohlthätig werden soll, so muß sie so geschehen, daß man auf sie eine Taxation der einzelnen Bestände und des ganzen Forstes bauen und dasjenige Holzquantum bestimmen könne, was der Forst von Zeit zu Zeit ohne Nachtheil unsrer Nachkommenschaft abgeben kann. Um eine solche Schätzung zu halten, theilt der Taxator ebenfalls auch die große Forstfläche in lauter kleinere Flächen oder sogenannte Bestände ein, untersucht nach gewissen Regeln, welche die Taxation lehrt, das Holz was auf einer solchen kleinen Fläche steht oder künftig darauf zu erwarten ist, stellt den berechneten Holzertrag der einzelnen Flächen gehörig zusammen und berechnet daraus ferner, wie viel Holz der ganze Forst von Zeit zu Zeit mit Nachhalt abgeben kann und wie weit die Hauungen von fünf zu fünf, oder von zehn zu zehn Jahren vorschreiten dürfen, wenn weder zu viel noch zu wenig Holz geschlagen und nach gewissen Jahren der Forst endlich ganz abgetrieben seyn soll. Bey einer guten Forstmessung kömmt daher alles darauf an, den Forst in solche einzelne Flächen oder Bestände abzusondern, daß der Taxator den Holzertrag einer Fläche nach der andern leicht angeben kann.

Ich glaube schwer, daß ein Geometer, der die Taxation der Wälder nicht versteht, im Stande ist, die Sonderung der Bestände zweckmäßig zu verrichten, entweder wird er zu sehr, oder zu wenig ins Spe-

cielle gehen und selten die richtige Schranken der Absonderung treffen. geht er zu sehr ins Speciello- oder Kleinliche und will er alle einzelne Flächen im Walde, wo er Unterschied im Holzbestande bemerkt, auszeichnen und zu Riß bringen, so wird die Messung so weitläufig, zeit- und geldverschlingend, daß die Kosten der Messung den Nutzen derselben noch lange nicht aufwiegen, vorzüglich dann, wenn der Geometer zu wenig Geschicklichkeit besitzt, die Messung so zu leiten, daß Fehler in Messungen vermieden und aus dem angelegten Netze meistens von selbst die einzelnen Bestände erhalten werden. Ein solcher krickeliger und ungeschickter Messer macht sich selbst das Leben vergeblich sauer und wenn er nach der Fläche oder nach der Morgenzahl, die er mißt und zu Riß bringt, bezahlt wird, so muß er bey seiner schweren Arbeit hungern und darben. Meistens sind oder werden die Geometer aber leichtsinnig in Absonderung der Bestände, suchen sich einen guten Taglohn zu machen, messen ganze Walparthien von 40 bis 100 Morgen zusammen, bekümmern sich wenig oder gar nicht um die innern Bestände, und dann kann der Taxator eine solche Messung gar nicht brauchen und wenn er den gemessenen Forst wirklich taxiren soll, so wird eine zweyte Messung nöthig, welche fast eben so viel als die erste kostet. Da nun eine zweckmäßige Forstmessung, worauf eine Taxation gegründet werden soll, nur dann möglich wird, wenn der Geometer wenigstens die Hauptregeln zum Eintheilen der Bestände kennt, so führen wir hiermit diese Regeln im Nachfolgenden an.

a) Große Blößen von mehren und vielen Morgen (welche eine künstliche Kultur bedürfen) werden besonders ausgepfählt und nach ihrer wahren Figur zu Riß gebracht. Um den Ort, wo Blößen liegen, richtig auf dem Papiere anzuzeigen, muß man sie mit dem Netze in Verbindung bringen, nöthigen Falls einen Weg dahin auspfählen und diesen Weg durch gezogene blinde Linien zugleich mit aufnehmen.

b) Flächen von 10 bis 20 und mehren Morgen,

worauf nur einzelne Bäume oder nur einzelne Gruppen von Bäumen ſtehen, werden beſonders ausgepfählt und zu Riß gebracht. Die wenigen Bäume daſelbſt können durch den Taxator ſehr leicht in Augenſchein genommen und gemeſſen und nach ihrem Holzgehalte geſchätzt oder berechnet werden.

c) Kleine Blößen innerhalb eines Holzbeſtandes, der 10 bis 20 Morgen enthält, werden nicht beſonders gemeſſen, ſondern dem Beſtande einverleibt, worin ſie liegen Sowohl der Geometer als der Taxator muß die Geſchicklichkeit beſitzen, die Fläche dergleichen Blößen nach dem bloßen Augenmaaße ſehr richtig zu ſchätzen, oder nach Schritten zu meſſen und nach □Ruthen zu berechnen, indem beyde ſich gewöhnt haben, fünf Schritte auf die Ruthe zu thun. wie man eine unregelmäßige Blöße oder Fläche abcdefghik
Fig. 174. Fig. 174. in ein Rechteck ABCD verwandeln müſſe, zeigt das Augenmaaß, indem die dadurch ausgeſchloſſenen Theile eben ſo viel betragen müſſen, als die dadurch eingeſchloſſenen. Mißt und multiplicirt man daher die mittlere Länge GH und mittlere ſenkrechte Breite EF mit einander, ſo erhält man die Fläche des Rechteckes DABC, welches eben ſo groß als die unregelmäßige Figur abcdefghik iſt. Eben ſo haben
Fig. 175 wir die unregelmäßigen Fläche abcdefghikl Fig. 175. nach dem Augenmaaße verwandelt, daß das Rechteck ABCD ſo ziemlich = dem Theil abghikl und das gradlinige Dreyeck CEF ſo ziemlich = dem übrigen Theil gbcdefg der vorgelegten Figur iſt. Uebrigens hängt wenig davon ab, ob man dieſe Verwandlungen ſehr genau trifft oder nicht, wenn nur nicht viel gefehlt wird.

d) Eine Fläche von 10 bis 20 und mehren Morgen, welche ſo regelmäßig beſtanden iſt, daß man faſt auf einem jeden Viertel-, halben- oder ganzen Morgen gleichviel Holz rechnen kann, wird beſonders ausgepfählt, zu Riß gebracht und ihr Morgengehalt berechnet. Einzelne darin liegende kleine Blößen und einzelne kleine Flächen, welche beſſer oder ſchlechter beſtanden ſind, werden vom Geometer nicht beachtet,

wohl aber vom Taxator besonders geschätzt und ihre Fläche von der Fläche des ganzen Bestandes abgezogen, wo nun die übrige Fläche als gleichartig bestanden angesehen wird.

e) Flächen von verschiedenen Bestande sind solche, wo man auf dem Morgen der einen Fläche ungleich mehr oder weniger Holz vorfindet, als auf dem Morgen der andern. Grenzen zwey Flächen vom verschiedenen Bestande an einander, so heist die darzwischen liegende Grenzlinie Bestandswechsel. Enthält jede Fläche 10 bis 20 Morgen, oder sind beyde Bestände im Alter sehr verschieden, so muß der Bestandswechsel auf dem Risse angezeigt werden. Sind aber beyde Bestände im Alter wenig verschieden und ist ihre Fläche in Summe nur 10 bis 20 Morgen, so kann der Bestandswechsel weggelassen werden. Der Taxator wird auch dann die Fläche eines jeden Bestandes besonders angeben können, wenn auch keine Linie auf dem Risse zur Bezeichnung des Bestandswechsels vorgezogen ist, wenn er nur die Fläche der beyden Bestände zusammen kennt; ja er wird sogar die Fläche eines jeden Bestandes besonders auch in dem Falle angeben können, wenn die abzuschätzende Waldfläche aus drey und mehr verschiedenen Beständen zusammen gesetzt seyn sollte. Da nämlich der Taxator, um die innere Beschaffenheit eines Bestandes zu kennen, doch jede große ziemlich breite Waldfläche, welche nach ihren Holzgehalt geschätzt werden soll, in gleichweit abstehenden Parallellinien durchzugehen und alle Plätze derselben zu besehen hat, wenn er über die Güte des Bestandes oder über den Ertrag eines Morgens an den verschiedenen Plätzen ein richtiges Urtheil fällen will, so wird er leicht aus den Schritten, welche er im Ganzen, und besonders im guten, mittelmäßigen oder schlechten Bestande thut, berechnen können, wie viel Fläche der gute und der mittelmäßige oder schlechte Bestand besonders ausmacht. Wenn z. B die ganze Waldfläche 18 Morgen groß ist und in allen Parallellinien zusammen 600 Schritte und besonders im guten Bestande 150 Schritte, im mit-

telmäßigen 250 und im schlechten 200 Schritte gemacht worden sind, so wird die Fläche x, y und z des guten, mittelmäßigen und schlechten Bestandes durch folgende Proportionen gefunden:

$$600 : 18 = 150 : x;$$
$$600 : 18 = 250 : y;$$
$$600 : 18 = 200 : z;$$

wo $x = \frac{18 \cdot 15}{60} = 4\frac{1}{2}$ Morgen

$y = \frac{18 \cdot 25}{60} = 7\frac{1}{2}$ Morgen und

$z = 3 \cdot 2 = 6$ Morgen.

Summe $= 18$ Morgen.

Auch kann man auf diese Art die Fläche aller inwendigen Blößen ausfindig machen. Uebrigens kömmt es auch hier auf eine große Genauheit in Bestimmung der einzelnen Bestandsflächen nicht an.

f) Sehr oft ist eine Waldfläche nach einer Gegend besser, und nach der andern hin schlechter bestanden und es geht der schlechtere Bestand nach und nach in einen bessern über. Ist eine solche Waldfläche, deren Bestand vom schlechtern in bessern oder vom bessern in schlechtern übergeht, nicht über 10 bis 20 Morgen groß, so nimmt der Geometer auf den verschiedenen Bestand gar keine Rücksicht, sondern pfählt und mißt nur die ganze Fläche aus und bringt sie zu Riß. Ist aber diese Waldfläche über 20, 40 und mehre Morgen groß, so muß der Geometer sie durch künstlich gezogene Linien in mehre kleinere Flächen von 10 bis 20 Morgen abtheilen, die Grenze einer jeden Fläche durch Pfähle anzeigen und jede besonders zu Riß bringen. Eben so verfährt er, wenn

g) eine Fläche sehr unregelmäßig, mit Hölzern von allerley Stärke und Alter, an manchen Plätzen dicht und geschlossen, an andern leicht und blößig bestanden ist. Ist nämlich eine solche Fläche nur 5 bis 10 Morgen groß, so theilt er sie weiter nicht ab, ist sie aber über 10 20, oder gar 40 und mehre Morgen groß, so muß sie durch geschlagene Pfähle und natür-

lich oder künstlich gezogene Linien in mehre kleinere Flächen von 5 bis 10 Morgen abgetheilt und jede Fläche besonders zu Riß gebracht werden. Natürlich kann jetzt der Taxator beym Abschätzen der Hölzer auf diesen kleinen Flächen nicht leicht einen erheblichen Fehler machen, hat er aber mit sehr großen Flächen zu thun, worauf Hölzer von allerley Alter, Stärke und Größe, bald geschlossen, bald licht, bald blößig, verwirrt durch einander stehen, so ist es ihm unmöglich, ohne geometrische Hilfe Ordnung in Abtheilen der großen Waldfläche in mehre kleine Bestandsflächen zu bewahren und sich vor wesentlichen Fehlern im Abschätzen der Hölzer daselbst sicher zu stellen.

Da der Forst-Geometer zugleich auch die Bestände nach ihrem Alter anzusprechen verstehen muß, so wird ihm folgendes zur Nachricht ertheilt.

1) Das Alter ganz junger Laubhölzer wird aus der Zahl der Winterwülste eines Stämmchens beurtheilt, das unter allen andern daselbst stehenden Stämmchen dieser Art weder zu lang noch zu kurz ist, indem jeder Jahrsschub mit einem solchen Wulste sich endiget.

2) Das Alter der jungen und mittleren Nadelhölzer wird aus der Zahl der Quirle, welche von einem Jahrsschube zum andern gebildet werden, beurtheilt. Da die Zweige an den untern Quirlen nach und nach verdorren und abfallen, jedoch der Ort dieser Quirle noch durch einen vorstehenden Wulst kennbar bleibt, so werden diese Wülste statt der untern Quirle mit zu den obern gezählt.

Anmerkungen. a) Spindel wird derjenige vertikal emporsteigende Theil der Krone genannt, aus welchem, wie aus dem Stamme selbst, alle Seitens Aeste entspringen. Geht aus einer gewissen Stelle der Spindel ein Ast, so hat dieser Ast eben so viele Quirle, als der obere Theil der Spindel.

b) Die Lärchen haben keine deutliche Quirle und die Fichten treiben oft auch noch schwache Aeste zwischen den Quirlen.

3) Das Alter der ältern Laubhölzer und der alten Nadelhölzer, bey welchen weder Wülste noch Quirle deutlich sind, wird dadurch entdeckt, daß man einen Baum daselbst von der Größe, als wozu man das Alter begehrt, fällen und die Hausläche ziemlich schief und recht glatt machen läßt, vom Kerne aus die einzelnen Jahresringe bis zur Rinde zählt und die Zahl m der Ringe bemerkt; sodann erwägt, wie viele Jahre n ein Pflänzchen von dieser Holzart werden muß, ehe es die Höhe des stehen gebliebenen Stocks erreicht, worauf man n zu m addirt.

Anmerkungen. a) Die Holzringe werden dadurch deutlicher, wenn man die Hausläche zuerst mit frischer Erde und zuletzt ganz glatt abreibt. Führt man einen spitzigen Griffel vom Kerne aus ganz fort bis zur Rinde der Hausläche, so fühlt man fast jeden feinen Jahresring mittest des Griffels.

b) Die Jahresringe zunächst am Kerne des untern Stammendes sind in dem Falle sehr eng, wenn das Pflänzchen aus einem Samenkorn entstanden ist, im Gegentheile weit, wenn der Baum durch Ausschlag eines Stockes entstanden ist. Man kann demnach an einem gefällten Baum erkennen, ob er aus dem Samen oder aus dem Stocke entstanden ist. Auch bilden sich weite Jahresringe, wenn ein Baum licht oder isolirt — und schwache Jahresringe, wenn er geschlossen oder gar im Drucke steht. Man kann daher auch an einem gefällten Baum erkennen, wie viele Durchforstungen oder Auslichtungen derselben erlebt hat und wie viel Jahren seit dieser Zeit verflossen sind.

4) Stehen Bäume von allerley Stärke unter einander und sind nur die unterdrückten (von andern überschatteten oder übergipfelten Bäume schwächer, dagegen die Bäume, welche andere übergipfeln oder überschatten so ziemlich von einerley Stärke, so wird bloß ein Baum der letzten Art nach dem Alter untersucht und nach diesem Alter der ganze Bestand angesprochen, die geringern unterdrückten Stämme mögen

nun so alt seyn, als sie wollen; gewöhnlich sind sie aber vom gleichem Alter der stärkern.

Anmerkung. Beym Schlag- und Mittelwalde, wo man bey jeder Hauung nur einzelne Stangen und Bäume von allerley Alter stehen läßt, geht es umgekehrt. Hier spricht man die Bestände nach dem Alter des jungen Nachwuchses (Untermuchses) oder des jüngsten Stockausschlages an. Das Alter der einzelnen Stangen und Bäume daselbst wird in dem Falle nicht berührt, wenn die richtige Zahl von stehengebliebenen alten-, mittel- und jungen Bäumen und Stangen vorhanden ist. Fehlt es aber an diesen Bäumen (an Oberholz), so wird dieß besonders bemerkt. Eben so bemerkt man auch einen zu starken Ueberfluß von einer gewissen Klasse von Bäumen.

Stehen Bäume von allerley Stärke unter einander und sind die sogenannten vorwaltenden (prädominirenden) Bäume, welche andere überschatten oder übergipfeln, an manchen Orten vom Alter m, an andern vom Alter n und p, so kommen auch hier nicht die unterdrückten Stämme in Betracht, sondern es fragt sich, ob eine Klasse von vorwaltenden Stämmen eben so viel Waldfläche bedeckt als die andere, oder ob eine Klasse ungleich mehr Fläche als die andere einnimmt. Findet man das alle zwey oder drey Klassen beynahe gleichviel Waldfläche einnehmen, so heißt der Bestand m, n und p jährig. Findet man aber, daß die n jährigen Hölzer die größte Fläche bedecken, nur wenige m jährige Hölzer, dagegen viele p jährige Hölzer vorhanden sind, so heißt der Bestand n jährig mit vielen p jährigen und wenigen m jährigen Hölzern gemengt.

Gehen die vorwaltenden Hölzer von m in n jährige über, so ist der Bestand m bis n jährig.

II. Von Messen der einzelnen Distrikte, Bezirke und inliegenden Bestände.

Hier haben wir zu handeln:

1) Von Auspfählen; 2) Von Messen der Entfernungen; und 3) Von Messen der Winkel und Auftragen der Figur.

1) Von Auspfählen.

Die Regeln zum Auspfählen sind:

a) Man mache das auszupfählende Umfangsnetz so einfach als thunlich und setze demnach die Netzpfähle so fern als möglich von einander. Man muß daher jeden Stab an einen solchen Ort zu bringen suchen, daß man daraus eine lange Aussicht zum vorhergehenden, und zugleich auch eine lange Aussicht zum folgenden Stab erhält.

b) Bemerkt man, daß eine folgende Netzlinie sehr kurz gegen die vorhergehende ausfällt, so sucht man die vorhergehende zu verkürzen und die folgende zu verlängern.

c) Stäbe, welche sehr fern oder ins dunkle Stangenholz gesetzt werden, werden durch angehängtes Papier oder durch weiße Tücher von der Ferne sichtbar gemacht.

d) Außerdem, daß man die Stäbe zum Netze eines Waldbezirks so fern als möglich zu setzen und dadurch das Netz so einfach als möglich zu machen sucht, muß man zugleich auch darauf sehen, daß jede Netzlinie nahe genug der aufzunehmenden Grenze des Waldbezirks zu liegen kömmt, damit man die Grenzsteine, oder Wege und Bestandswechsel, welche am Umfange des Waldbezirks sich befinden, durch genommene Abschläge leicht und sicher gewinnen und zu Papier bringen kann. Um daher das Netz hinlänglich nahe an die Grenze des Waldbezirkes zu bringen, kann man das Netz nicht allezeit sehr einfach machen, es schadet dieß aber auch nichts, wenn nur das Netz nicht gar zu vieleckig wird, oder wenn man nachher das Netz durch eine ausgepfählte Durchschnittslinie wieder in zwey besondere einfachere Netze zerspaltet.

e) Da nicht die schieflaufende, sondern die horizontale Entfernung eines Netzpfahles vom andern verjüngt aufs Papier getragen wird und das horizontale Messen mit der Kette an steilen Bergwänden sehr beschwerlich ist, so sucht man so auszupfählen, daß man den Abdachungswinkel von einem Stabe zum andern am Gradbogen des Perspektivs gehörig beobachten,

die

die schiefe (geradlinige) Entfernung mit der Kette messen und diese Schiefe mittelst des Cosinus des Abdachungswinkels leicht auf die zugehörige Horizontale reduciren kann. Es wird daher beym Auspfählen einer Bergwand ein Stab wenigstens am obern Rande und auch ein Stab am untern Rande gesetzt werden müssen.

f) Ferner muß man auch beym Auspfählen darauf sehen, daß der Weg von einem Pfahl zum andern für die Kettenzieher nicht zu unbequem ist, nicht über gefährliche Felsen-Abhänge, Gruben oder Gewässer ꝛc. hingeht.

g) Auch hat man noch beym Auspfählen eines Bezirks Achtung zu geben, ob man nicht unterwegs einen Bestandswechsel oder einen passenden Abfuhrweg bemerkt. Ist ein solcher Bestandswechsel oder Weg vorhanden, so hat man, weil derselbe nachher ebenfalls auch ausgepfählt, gemessen und zu Riß gebracht werden muß, jetzt sogleich den Punkt des Hauptnetzes entweder durch einen Hauptstab oder durch einen Zwischenstab zu bezeichnen, damit man diesen Punkt schon beym Aufnehmen des Netzes zu Riß bringen und nachher an diesen Punkt die Messung des Wegs oder Bestandswechsels anbinden kann.

h) Nachdem ein Bezirk ausgepfählt, gemessen und dessen Figur richtig zum Schlusse gebracht worden ist, so läßt man nur diejenigen Pfähle stehen, an welchen man die Messung eines Wegs, Bestandswechsels, oder eines folgenden Bezirkes anbinden will, nimmt die übrigen Pfähle heraus und gebraucht sie zum Messen der folgenden Bezirke. Sollte jedoch ein Stab zur Nachricht des Taxators und zum Unterscheiden der verschiedenen Bestände im Walde nöthig bleiben, so schlägt man statt eines ausgesetzten Meßpfahls einen kurzen dicken Pfahl ziemlich tief und fest in die Erde ein, damit ein solcher nicht so leicht verrückt oder ausgehoben werden kann.

2) Von Messen der Entfernungen.

Wenn eine Forstmessung sicher und geschwind von Statten gehen soll, so müssen

a) Die Kettenzieher gut eingeübt seyn und diese die Kette so führen können, daß sich niemals ein Glied derselben verschlingt und mit jedem Zuge die Kette zwar mäßig aber immer gleichstark angespannt wird. Da das Messen einer Linie im Felde gar zu lange dauert, wenn mit jedem Kettenschlage der hintere Kettenzieher den vordern in die gerade Linie abrichten soll, so muß der vordere Kettenzieher, nachdem er nur ein- oder zweymal genau abgerichtet worden ist, sodann die Geschicklichkeit besitzen, die Länge eines Kettenschlags nach Schritten zu beurtheilen und bey einem jeden folgenden Kettenschlage sich selbst in die grade
Fig. 177 Linie abzurichten. Denn es sey AH Fig. 177. (Tab. XXIV.) eine zu messende Netzlinie und man habe in A angefangen, schon zwey Kettenschläge AB und BC in der geraden Linie AH gemacht und die Schritte, welche auf einen Kettenschlag kommen, gezählt, so macht nun jetzt der vordere Kettenzieher, (indem er aus C nach H hin wandelt) in CD eben so viele Schritte als auf einen Kettenschlag gehen, und wenn er in D angelangt ist, so wird der hintere Kettenzieher mit seinem Kettenstabe in C angelangt seyn. Ist nun der Netzpfahl in A stehen geblieben oder hat man sich in C einen entfernten Gegenstand O gemerkt, der gerade hinter A liegt, so wird alsdann der in D angelangte Kettenzieher seinen Kettenstab D in die Verlängerung der geraden Linie AC oder OC nämlich in die Linie AH selbst stellen und daselbst die Kette CD gehörig anspannen können. Hat aber beym ersten Kettenschlage AB der hintere Kettenzieher in A den vordern in B nicht genau nach H abgerichtet, so geschieht es leicht, daß zuletzt der vordere Kettenzieher neben H, nämlich in I statt in H anlangt. In diesem Falle denkt sich der vordere Kettenzieher den Punkt I neben H dergestalt, daß OI und OH als gleichlang angesehen werden können, und setzt die Ruthen in OI = den Ruthen in OH. Wird unterwegs ein Abschlag auf einen darneben liegenden Punkt K oder M gemacht, nämlich die Abscisse OL und Ordinate LK oder LM bemerkt, so wird zwar die Abscisse OF

= OL geachtet, dagegen aber FL durch die Proportion OH : HI = OF : FL, berechnet und FK = LK — FL oder FM = LM + FL gesetzt. Bey dieser Behandlungsweise wird aber vorausgesetzt, daß IH gegen OI oder OH äußerst klein ist, sonst treffen die brechneten Ordinaten FK und FM nicht zu. Fig. 277.

b) Nur die Netzlinien und die auf die Grenzsteine genommenen Abschläge werden mit Fleiße gemessen, was die übrigen Gegenstände als Wege, Blößen, Bestandswechsel, Bergrücken und Ränder betrifft, so legt man zwar ebenfalls Netzlinien in der Nähe an, es werden aber die dahin genommenen Abschläge (Ordinaten) meistens nur abgeschritten. Gewöhnlich sind die Wälder an der Grenze bloßig; ist nun ein Netz zum Gewinnen der Grenzsteine gezogen, so wird die Breite der Blößen daselbst nur bloß nach Schritten gemessen. Senkrechte Ordinaten werden hier fast niemals durch Hilfe des Kreuzmaaßes gezogen, sondern bloß nach dem Augenmaaße angelegt. Auch zum Messen eines Wegs wird eine besondere Netzlinie ausgepfählt, wenn nämlich nicht schon eine andere Netzlinie zum Bezirken eines Hauptbestandswechsels ausgepfählt worden ist, die nicht fern neben dem Wege liegt. Natürlich sind die einzelnen Linien des Netzes gerad und Krümmungen des Wegs werden durch Abschläge bestimmt, welche bis zur Mitte des Wegs gehen. In der Regel wird ein Weg gleichbreit gezeichnet und man muß seine mittlere Breite an einer wohlgewählten Stelle messen und die verjüngt und zwar so auftragen, daß auch die Endpunkte der Ordinaten in die Mitte des Wegs zu liegen kommen. Uebrigens hängt nichts davon ab, ob ein Weg, der keine Waldgrenze macht, sehr genau aufgenommen wird, oder nicht, indem der Waldboden links und rechts desselben dem Waldbesitzer gehört und die Wege selten einen festen Lauf behalten. Eben so hängt auch nichts davon ab, ob ein Bestandswechsel, ob Blößen, Bergrücken und Ränder sehr genau aufgenommen werden, oder nicht, weil keine genaue Grenzlinie zwischen verschiedenen Beständen und Blößen und zwischen Ebene und Berg-

abhang gezogen werden kann. In der Regel gilt nur, wie schon mehrmals gesagt, dasjenige als Blöße, was nicht von Bäumen überschattet und durchwurzelt werden kann.

c) Die Netzpfähle werden gewöhnlich nummerirt, nämlich nach der Ordnung mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. bezeichnet. Die Kettenzieher müssen sodann beym Messen der Netzlinien angeben und aufschreiben, wie lang die einzelnen Netzlinien vom Stabe 1 bis zum Stabe 2, von 2 zu 3, von 3 — 4; 4 — 5 ꝛc. sind. Wird beym Messen irgend einer Netzlinie unterwegs ein Abschlag auf einen Grenzstein oder sonst auf einen bemerkenswerthen Punkt gemacht, so muß die dazu gehörige Abscissa und zugehörige rechts oder links gehende Ordinate bemerkt werden. Eine rechts gehende Ordinate wird bekanntlich mit R und eine links gehende mit L bezeichnet. Liegt der Stein in der Netzlinie selbst, so ist die Ordinate = 0. Muß eine Netzlinie vor- oder rückwärts verlängert werden, um eine senkrechte Ordinate auf einen Stein zu erhalten, so muß auch dieß im Protokolle bemerkt werden. Eine rückwärtsgehende Verlängerung wird kurz durch Rückverl und eine vorwärtsgehende durch Vorverl angedeutet. Wird aus irgend einem Standorte a nach einen Stein visirt und aus a dahin gemessen, so wird dieß durch a — St. angezeigt. Das Messungsprotokoll der Kettenzieher fängt daher mit der Netzlinie vom Stabe 1 zu 2 an, enthält die Bemerkungen und Abschläge, welche während der Messung von 1 zu 2 gemacht werden, und führt zuletzt die gefundene ganze Länge der Netzlinie 1 — 2 in großen Zahlen an; sodann wird eine neue Zeile angefangen und die Messung von 2 zu 3 fortgesetzt, und indem man auch hier die nöthigen Abschläge bemerkt, führt man auch hier die ganze Länge von 2 zu 3 in großen Zahlen an; und so fährt man fort, bis man alle einzelne Linien des Netzes, welches zum Messen eines Bezirkes ausgepfählt worden ist, im Protokolle aufgeführt hat.

d) Es enthalte ein Waldbezirk mit den inliegenden Beständen 17 Pfähle und man binde an den Pfahl 6 die Messung eines zweyten Bezirks, welcher nun ebenfalls ausgepfählt wird, so werden nun die jetzigen Pfähle mit den Nummern 18; 19; 20 ꝛc. belegt. Die Kettenzieher müssen daher ihre Messung jetzt mit der Netzlinie von 6 bis 17 beginnen, diese von 17 zu 18, von 18 zu 19 ꝛc. fortsetzen und wenn am Ende der 29ste Stab dieses Bezirks wieder mit dem 13 Stab des vorigen Bezirkes in Verbindung gebracht worden ist, so geht die Messung des zweyten Bezirks mit der Messung der Netzlinie von 29 zu 13 zu Ende.

Auf dieselbe Art verfährt man auch, wenn ein dritter und vierter Bezirk an einen vorhergehenden gebunden wird, dergestalt, daß man zur Messung eines großen Waldbezirks wohl 100 und mehre Nummern nöthig hat. Daß man die Pfähle eines schon gemessenen Bezirkes (bis auf diejenigen an welche man noch anbinden will) herausnehmen, und zum Auspfählen eines folgenden Bezirkes brauchen kann, versteht sich von selbst und ist auch schon oben gedacht worden.

3) Von Messen der Winkel und Auftragen der Figur.

Wie man eine Figur durch Hilfe des Meßtisches oder der Scheibe, oder durch Hilfe der Bouffole oder des Theodoliten aufnehmen könne, ist §. 47. X; §. 48 und 50. weitläufig genug auseinander gesetzt worden. Eine Hauptsache hierbey ist, daß man zuvor das Umfangsnetz gehörig auftrage, berichtige und zum Schlusse bringe. Ist dieß Netz fehlerlos aufgetragen, so kann man alsdann auch die Steine und alle übrige bemerkenswerthe Punkte richtig eintragen, wie §. 46. gezeigt worden.

Die Messung mit dem Tische, wo man sich nicht auf die damit verbundene Magnetnadel verläßt, sondern sich im jeden folgenden Standpunkte auf den vorhergehenden zurückrichtet, ist wohl unter allen Messungen die sicherste, weil man die Figur des Netzes

sogleich vor Augen steht und man etwa begangene Fehler sogleich wissen und auf der Stelle untersuchen kann. Ist das Wetter zum Messen mit dem Tische nicht günstig, so pählt man die Boussole, theilt aber den Wald in lauter kleine Felder ab, bringt ein jedes kleine Feld besonders zum Schluss und stößt alsdann die Risse von diesen kleinen Feldern gehörig zusammen. Die Messung mit dem Theodoliten im Walde ist zu umständlich, langweilig, zu ermüdend und zu kostspielig, als daß man davon Gebrauch machen sollte. Sie ist §. 50. beschrieben, und da die gemessene Figur doch allezeit zu Papier gebracht werden muß, so werden kleine Fehler im Auftragen der Figur dennoch nicht verhütet werden können, wenn übrigens auch jeder Winkel im Felde genau gemessen und berechnet worden ist. Sind wir im Stande durch den Meßtisch oder durch die Boussole einen Waldbezirk so genau zu messen, daß kein Grenzstein um einen halben Fuß verrückt wird, so ist eine solche Genauheit im Messen hinlänglich und ich sehe nicht ein, warum man den Theodoliten über jeden Grenzstein aufstellen, nach den vorhergehenden und folgenden Stein visiren und den Winkel daselbst mit Fleiße beobachten und die Entfernung eines jeden Grenzsteins vom folgenden messen und über die Lage und Entfernung der Grenzsteine ein besonderes Protokoll führen soll, indem aus einem guten Risse die Lage und Entfernung eines jeden Steins klar vor Augen liegt. Da eine jede Messung desto genauer und richtiger wird, je einfacher das dazu gezogene Netz ist, so wird offenbar die Genauheit der ganzen Figur darunter leiden, wenn man über jeden Grenzstein das Winkelinstrument aufstellen wollte. Würde jedoch eine genaue Grenzmessung und ein darüber schriftlich geführtes Protokoll begehrt, so kann man, so es bezahlt wird und überhaupt die Messungskosten nicht gescheut werden, die Messung selbst (nach §. 40. Nr. 13 und 14; §. 45. zu 50.) verrichten, und wenn man den Theodoliten nicht genau über die Mitte eines Grenzsteins aufstellen kann, so wird man dennoch die he-

gehrten Winkel zur Mitte des Steins richtig berechnen können.

III. Von Zusammenstellen der gemessenen einzelnen Bezirke.

Hier haben wir zu handeln:

1) Von Zusammenstellen der einzelnen Bezirke in einen einzigen Riß.

2) Von Berechnung der Flächen der zusammengestellten Bezirke und

3) Von Anfertigung einer Erläuterungstafel zum ganzen Risse.

1) Von Zusammenstellen der einzelnen Risse.

Hat man einen Waldbezirk MNOPIKL Fig. 179. gehörig aufgetragen und zum Schlusse gebracht, und will man an denselben die Messung eines zweyten Bezirkes OQRFGHI anbinden, so kann dieß auf verschiedene Art geschehen. Fig. 179.

1) Wenn man im Punkte I den Meßtisch nach P zurückrichtet und aus I nicht nur nach K, sondern auch nach H visirt und nachher, wenn die Figur MNOPIKL gemessen ist, die Messung der angrenzenden Figur von H nach G, F, R ꝛc. hin weiter fortsetzt und sie mit dem Punkte O der Seite NP zum Schlusse bringt.

Oder:

Wenn man den Meßtisch in O zuerst aufstellt, daselbst ihn nach N oder P zurückrichtet, aus O nach Q visirt und aus Q nach R, F, G ꝛc. hin die Messung weiter fortsetzt und die Figur OQRFGHI an den schon aufgetragenen Punkt I der ersten Figur anschließt.

Hat man die Figur MNPIKL auf dem Tische verzeichnet und füllt dieselbe schon allein beynahe das Blatt aus, so geht natürlich die zweyte Figur OQRFGHIP nicht auch aufs Blatt und man sieht sich genöthiget, ein anderes Blatt aufzulegen, die gemeinschaftliche Grenze OPI beyder Figuren mit dem in I visirten Schenkel IH vom ersten Blatte aufs zweyte an eine solche Stelle zu transportiren, daß

Fig. 179. alsdann die Figur OPIHGFRQ füglich aufs zweyte Blatt getragen werden kann. Man thut hier wohl, wenn man, indem man den Meßtisch in I aufgestellt hat, aus I zugleich auch nach einen entfernten Gegenstand V visirt, und die Visirlinie IV recht lang zieht, welches den Nutzen hat, daß man nachher beyde Figuren auf ein großes Blatt recht genau zusammenstoßen kann, weil eine Figur IPOQRFGH an die andere NOPIKLM so gelegt werden muß, daß die verlängerte Zwischengrenze NPIV sich decken muß.

Eben so können wir auch aus N nach einen entfernten Gegenstand W visiren, und nachher, wenn der dritte Bezirk NABCDEFRQO aufgenommen und zu Riß gebracht wird, den Riß desselben an die ersten beyden Risse so stoßen, daß die verlängerte Zwischen-Grenze FRQONAW sich deckt.

3) Hat man mit dem Meßtische oder der Scheibe ein Kästchen mit einer Magnetnadel verbunden und darf man sich auf die Richtigkeit der Magnetnadel so ziemlich verlassen, oder, geschieht die Messung mit der Bouſſole selbst so kann man beym Aufnehmen eines Bezirks einen Stand um den andern überspringen, und dann ist, wenn man das Instrument in P, K und M aufgestellt hat, nicht nöthig, dasselbe auch noch besonders in I oder O aufzustellen, um aus O nach Q oder aus I nach H zu visiren, sondern man stellt es alsdann in Q und so fort in F und H auf, visirt aus Q nach O und nach R, weil es beym Gebrauche der Magnetnadel einerley ist, ob man aus O nach Q oder aus Q nach O visirt. Kennt man die Lage und Länge aller Linien, so kann man auch durch parallele Abschieben der Seiten die gemessene Figur in einem Risse zusammenstellen

4) Es sey TU die Lage der Magnetnadel, welche zum gemeinschaftlichen Punkte O beyder Figuren NPIKLM und OQRFGHIP gezogen ist; wird nun zur erste Figur die zweyte so angefügt, daß der gemeinschaftliche Punkt O und auch die gezogene Linie TU beyder Figuren sich deckt, so werden auch beyde Figuren zu einander richtig gelegt seyn, und es darf

nicht fehlen, daß auch die gemeinschaftliche Grenze Fig. 279.
OFI sich deckt, vorzüglich dann, wenn die Abscisse GT und Ordinate TI zum Punkte I gezogen und die drey Punkte O, T und I von einem Blatte aufs andere transportirt worden sind, um an die Punkte O und I des ersten Bezirks die Messung des zweyten Bezirkes OQRFGHI zu binden.

So wie wir einen zweyten Bezirk mit einem ersten in eine richtige Verbindung bringen können, so werden wir auch einen dritten und vierten Bezirk mit den vorhergehenden in eine richtige Verbindung bringen und einen jeden nach der Magnetnadel richtig legen können.

5) Wären die beyden Waldbezirke MNOPIKL und EDXYZGF von einerley Eigenthume, hingegen der zwischen liegende Wald ABCDEFGHIPN fremdes Eigenthum, so wird nicht dieß fremde Eigenthum, sondern nur ein etwa durchziehender Weg OQRF aufgenommen und sodann beyde Waldbezirke MNPIKL und GEDXYZ so zu Riß gebracht, daß man daraus die wahre Lage und Entfernung derselben erkennen kann.

Sollte jedoch die Entfernung der genannten eigenthümlichen Bezirke zu groß seyn, so wird in der Regel kein Weg von einem zum andern aufgenommen, sondern nur beyde Bezirke nach der Magnetnadel richtig aufgetragen. Will man aber gleichwohl den Riß von zwey sehr entfernten Bezirken auf dasselbe Blatt auftragen, so muß man eine schwarze Linie zwischen durch ziehen, um zu vermeiden, daß man sich die Distrikte nicht in derselben Entfernung denkt, als worin sie von einander gesetzt sind.

2) Von Berechnung der Walddistrikte, Bezirke und Abschnitte.

Das Berechnen der Figuren ist §. 45. schon weitläufig genug auseinander gesetzt worden, weshalb wir dahin verweisen. Hier wird nur zur Beförderung einer geschwindern Berechnung der einzelnen Bestände und Bezirke folgendes noch erinnert.

1) Die Grenze QQRF Fig. 179. von einem Bestande NABCDEFRQO zum andern OPIHGFRQ wird gewöhnlich dadurch in eine gradlinige Grenze OF verwandelt, daß man nach dem Augenmaaße eine Pferdehaar OF dergestalt darüber wegspannt, daß die dadurch abgeschnittenen Theile rechts und links derselben so ziemlich einander gleich werden. Wenn man dieß auch nicht sehr genau trifft, so ist dieß von keinen nachtheiligen Folgen, weil das Land rechts und links der gezogenen Linie OF doch eben und demselben Herrn gehört; und wird hier um $\frac{1}{4}$ oder gar um einen halben Morgen gefehlt, welches aber nicht leicht geschehen kann, so wird nur dann ein merklicher Unterschied im Holzertrag zum Vorschein kommen, wenn die angrenzenden Bestände im Holzertrag eines Morgens auffallend verschieden sind, in welchem Falle man jedoch die Linie OF ziemlich genau zu ziehen sucht.

2) Hat man die innern Bestandslinien in gerade Linien, welche zuweilen auch einen Winkel machen dürfen, verwandelt, so verwandelt man auch die äußern Grenzlinien jedoch geometrisch und mit der §. 45. beschriebenen Vorschrift; theilt den ganzen Forst in Distrikte und Bezirke gehörig ein, und sucht alsdann die Fläche eines jeden Distrikts und Bezirkes mit den inliegenden Bestandes besonders. Die Summe der Fläche aller Distrikte ist die Fläche des ganzen Forstes.

3) Von Anfertigung einer Erläuterungstafel.

Nächst dem, daß man die Fläche des ganzen Forstes und der einzelnen Distrikte, mit den inliegenden Bezirken, Beständen und Blößen angezeigt und
Fig. 178. z. B. die zu Riß gebrachte Waldfläche Fig. 178. in die mit einer besondern Farbe umschlossenen Distrikte A, B; C; D, E und F und jeden Distrikt in besondere Bestände a, b, c, d, e ꝛc. abtheilt und die Fläche aller Distrikte und Bestände nach der im Risse bezeichneten Ordnung in einer Tafel zusammenstellt; fertiget man zu demselben Forste noch zwey andere Tafeln an, wo man in der einen Tafel die Bestände

nach der Güte des Bodens und Klimas und in der anderen Tafel die Distrikte nach der daselbst eingeführten oder einzuführenden Bewirthschaftungsart und die Bestände nach dem Alter des Holzes daselbst ordnet.

Die Tafel zum Unterscheiden des Bodens oder Lokals hat demnach folgende Gestalt:

1) Sehr gut- und tiefbödig und sehr vortheilhaft ist das Lokale in nachfolgenden Bezirken, als

in A, a, d, f
B, nichts
C, a, c, d
D, a, c
E, a, b, e
F, a, f

2) Gut Lokale in

A, e, c
B, c, d
&c.

3) Mittelmäßiges Lokale in

&c.

4) Ziemlich gut in

&c.

5) Schlecht in

&c.

Die Güte des Lokales selbst wird aus der Gebirgsart, Gebirgsform und Lage, aus dem tief oder zu Tage liegende Flötze, aus dem schlanken und massigen Wuchse der Bäume, aus dem Grüne ihrer Gipfel, aus dem tief- oder flachen Laufe der Wurzeln, aus der Vegetation der daselbst stehenden Gräser und Kräuter &c. beurtheilt, worüber wir zu seiner Zeit das Umständlichere anführen werden.

Am wichtigsten ist die Tafel, worin die Waldbezirke nach ihrer Holz- und Bewirthschaftungsart und nach dem Alter und Güte der Bestände geordnet sind, welche Tafel ungefähr folgende Gestalt hat;

Der ganze Forst enthält = = Morgen.
und zwar

§. 54.

Von Verfertigung der Lagerbücher.

Die Lagerbücher bestehen

1) aus den Charten,
2) aus den zugehörigen Erläuterungstafeln und
3) aus dem Ab- und Zuschreibebuche.

1) Von den Charten.

Daß jede Charte oder jeder Riß nur etwas mehr oder weniger als zwey Fuß lang und breit werden soll; daß der verjüngte Maaßstab zum Auftragen theurer Grundstücke und der Hofrechte ungleich größer (allenfalls 5 verjüngte Ruthen auf einen Zoll), als zum Auftragen wohlfeiler Aecker und Bergwiesen (allenfalls 10 verjüngte Ruthen auf einen Zoll) und der verjüngte Maaßstab hierzu wieder größer als zum Aufnehmen der Wälder und großer Hutrasen (wo 20 verjüngte Ruthen auf einen Zoll gerechnet werden) genommen werden müsse; daß man eine große Stadt oder Dorf in mehre Haupttheile und zu jedem Theile einen besondern Riß, zu langen und großen Wiesgründen und Ackerfeldern, zu weitläuftigen Wäldern und Hutrasen mehre Charten fertigen müsse, ist schon §. 52. erinnert worden. Begehrt man die ganze Stadt oder das Dorf mit seinem ganzen Weichbilde (mit der ganzen Flur) auf einen einzigen Riß zusammen, so müssen die einzelnen Risse auf einen gleichen Maaßstab reducirt und dann gehörig zusammengestellt werden, welches weiter unten gezeigt werden wird.

Alle zum Weichbilde einer Stadt zugehörigen Charten werden mit I, II; III ꝛc. nach der Ordnung bezeichnet, und zwar eine oder mehre Charten zur Stadt mit den ersten Nummern I, II ꝛc., sodann folgen die Charten über die Wiesgründe unter — und dann über der Stadt mit den zunächst eingekeilten oder anliegenden Aeckern und Gärten, hierauf folgen die Charten (zu je zwey oder drey) über das Winter- oder Sommer- und Brachfeld, und zuletzt machen die

Charten über die Bergäcker, Wälder und Hutrasen den Beschluß. Zusammen können es wohl zwanzig und mehre Charten seyn.

Jede einzelne Charte ist wieder in Bezirke A, B, C, D ꝛc. wie Fig. 178. und jeder Bezirk wieder in einzelne Grundstücke wie Fig. 156. abgetheilt, und zwar hat jedes Grundstück, welches neben einem andern liegt, auch einen andern Besitzer. Ueberall ist, wo das Eigenthum wechselt, eine Linie vorgezogen, und nur dann, wenn ein Grundstück ohnedem nicht sehr groß ist und sich in dasselbe mehre Personen zwar getheilt haben, aber so, daß jeder besondere Theil gar nicht zweifelhaft ist, drückt man die einzelnen Theile nicht durch den Riß aus. Hat z. B. ein Grundstück 120 □R. und muß der eine Theilhaber $\frac{2}{3}$ und der andere $\frac{1}{3}$ desselben besitzen, so ist nicht nöthig, die 80 □R., welche der erste, und die 40 □R., welche der andere besitzen muß, durch den Riß darzustellen.

Was die Berechnung der Fläche der einzelnen Grundstücke betrifft, so ist auch hier zu merken, daß man zuvor die Fläche eines ganzen Bezirkes sucht und dann Achtung gibt, ob die Fläche der inliegenden Grundstücke zusammen mit der Fläche des ganzen Bezirkes übereinstimmt. Uebrigens muß auch hier die Berechnung der Flächen mit den bekannten Vortheilen geschehen.

2) Das Auslegeregister.

Nachdem die Fläche eines jeden einzelnen Grundstückes bekannt ist, so fragt sichs, wie viel ein Morgen Garten- Wies- oder Ackerland in diesem oder jenem Feldbezirke werth sey. Natürlich kömmt auch hier die Bodenart oder das daselbst vorzufindende Gestein, die Gebirgsform und Lage des Landes und die Entfernung vom Orte oder Beschwerlichkeit der Bestellung in Betracht. Gewöhnlich nimmt man drey Oekonomie-verständige Männer von demselben Orte zu Hilfe, um die Taxation einiger Grundstücke in diesen und jenen Bezirke zu besorgen und wenn diese Männer weiter keinen Nutzen haben, so erleichtern sie doch, die verschiedenen Verhältnisse des Werthes der

Grundstücke in eben demselben Weichbilde besser zu beurtheilen. Was nachher die Vergleichung des Werthes der Grundstücke aus verschiedenen Weichbildern betrifft, so kann man alsdann aus einem drey-, fünf- oder siebenjährigen Ertrage und aus dem darauf verwandten Dünger und Mühe leicht berechnen, in welchem Verhältnisse der Werth der Grundstücke in einem und andern Orte stehen. Auch ist nicht nöthig, daß man beym Taxiren ein Grundstück heraussuche, was gerade 1 Morgen enthält, denn wenn der Werth $= a$ fl. eines Grundstücks von n □R. bekannt ist, so findet man den Werth eines Morgens daselbst $= \frac{a.160}{n}$ fl.

Weiß man den reinen Ertrag der Grundstücke binnen 7 Jahren, so findet man den jährlich reinen Ertrag durch Division jenes Ertrags durch 7.

Der Werth der Grundstücke richtet sich nach dem jährlich reinen Ertrage derselben. Haften darauf Lehngelder, Frohndienste und jährliche Lehnsabgaben, so müssen diese besonders taxirt werden und dann vermindert sich der Werth des Grundstückes um den taxirten Werth der Lasten. Der Rest zeigt den Werth. (Siehe den zweyten Band meiner Mathematik §§. 229. u. folg.)

Die Steuer oder Abgabe von den Grundstücken an den Staat richtet sich nach dem wahren Werth, oder, welches einerley ist, nach dem reinen Jahrsertrag derselben. Wenigstens sollte dieß so seyn. Haben andere ein Recht auf unsere Grundstücke und müssen wir Lehns, Lasten und Abgaben tragen, so sind, nach vorhin, unsere Grundstücke weniger werth, und wir können daher auch nicht so viele Steuern, als beym freyen Genusse unsrer Grundstücke, zahlen. Dagegen ist es billig, daß die Lehnsherrn und Mitberechtigten ebenfalls auch ihren gemessenen Antheil von Steuern tragen.

Gewöhnlich wird begehrt, daß wir ein Steuersimplum zu einem jeden Grundstücke namhaft machen, welches

welches nach Maaßgabe des Staatsbedarfs alle Monate 1 bis 2 mal, oder des Jahres 10, 12 bis 20 und 21 mal bezahlt werden muß. Setzen wir dieß Steuersimplum $= \frac{1}{100}$ des reinen Ertrags, so macht die jährliche Abgabe $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ der jährlichen reinen Revenüen aus. $\frac{1}{10}$ ist wenig, $\frac{1}{8}$ in der Regel, $\frac{1}{5}$ sehr hoch und $\frac{1}{4}$ unerschwinglich. Wird das Steuersimplum $= \frac{1}{100}$ des reinen Ertrags gesetzt, so kann man das Steuersimplum auch $= \frac{4}{10000}$ oder $\frac{5}{10000} = \frac{1}{2000}$ des wahren Werths setzen.

Das Auslegeregister gibt uns nun Nachricht, wie groß die Fläche eines jeden besondern Grundstückes ist, wie hoch die Taxe eines Morgens daselbst und des Steuersimplums ist, wem das Grundstück gehört, wem es zu Lehn geht und wie groß das jährliche Lehnsgefälle ist. Es besteht dieß Register aus eben so vielen Abschnitten I, II, III ꝛc. als Charten über ein Weichbild vorhanden sind, und jeder Abschnitt zerfällt wieder in eben so viele Abtheilungen A, B, C ꝛc. als besondere Bezirke auf einer Charte vorgezogen sind, und jede Abtheilung enthält so viele Posten oder Zeilen als aus wie vielen einzelnen Grundstücken, (welche auf dem Risse mit a, b, c ꝛc. oder mit 1, 2, 3 ꝛc. bezeichnet sind) ein Bezirk besteht.

Es hat daher das Auslegeregister folgende Tafelform:

Bezeichnung der Grundstücke	Fläche nach □R.	Werth eines Morgens in fl.	Steuersimplum in Pf.	Besitzer	Lehnsherr	jährliche Lehnsabgaben in Xrn.
I. A. 1,	120	90	6	Johannes Reum	gnädigste Herrschaft	13
— — 2	245	90.	12.	Friedrich Diez	— — —	$28\frac{1}{2}$
x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.

Der Werth eines Morgens wird, wie gesagt, aus dem reinen jährlichen Ertrag desselben gefunden, und ist der Werth eines Morgens = w, so muß man den reinen Ertrag = $\frac{4 \cdot w}{100}$ setzen. Wird der Werth eines Morgens 90 fl. gesetzt, so ist der Werth eines Grundstückes, von 245 □R. = $\frac{90 \times 245}{160}$ und sein jährlicher Ertrag = $\frac{90 \cdot 245 \cdot 4}{160 \cdot 100}$ fl. = 5 fl. 31 Xr. = 331 Xr. Rechnet man hiervon die jährliche Lehnsabgabe von $28\frac{1}{2}$ Xr. ab, so bleibt der reine Nutzen = $302\frac{1}{2}$ Xr. = 1209 Pf. wovon das Steuerimplum, zu $\frac{1}{100}$ angeschlagen, = 12 Pf. ist.

Die jährliche Lehnsabgabe wird auf folgende Art berechnet.

Gesetzt es müßte von einem Gütchen, das auf 6000 taxirt ist, bey einem jeden Sterbefall 300 fl. Lehngeld bezahlt worden, und es könnte sich der Besitzer nach der im zweyten Bande meiner Mathem. p. 581 aufgestellten Theorie durch Bezahlung eines Ueberhaupt-Quantums von $300 \times 1,8 = 540$ fl. loskaufen, so wird dafür eine jährliche Abgabe = $\frac{540 \times 4}{100}$ = 21, 6 fl. gesetzt werden können. Muß nun das Gütchen außerdem auch noch einen jährlichen Geld- und Getreide-Zins entrichten, welche jährliche Zinsabgabe bey einem mittlern Preise des Getreide = 31, 5 fl. gesetzt werden kann, so macht die jährliche Abgabe an Lehngeld und Zins zusammen 53,1 fl. aus. Es ist demnach jedes einzelne Grundstück, das 100 fl. werth ist, mit $\frac{53,1 \times 100}{6000}$ fl. = 53, 1 Xr. jährliche Lehnsabgabe belastet und nunmehr läßt sich leicht berechnen, wie stark jedes andere Grundstück des Gutes von irgend einem Werthe belastet ist.

Zum Auslegeregister muß zuletzt noch ein Nachtrag gemacht werden, worin alle diejenigen Güter,

Hufelandes und einzelne Grundstücke zusammen oder untereinander geschrieben werden, welche einem und demselben Herrn zu Lehn gehen. Zuweilen ist das Lehn unter mehre Herren getheilt, und oft sind Grunde von allem Lehnsbande frey. Sollen die Genießer der Lehnsabgaben ebenfalls auch mit Steuern belastet werden, so darf man nur ihren Genuß durch 100 dividiren, um ihr Steuersimplum zu erhalten.

3) Vom Ab- und Zuschreibebuche.

Im Ab- und Zuschreibebuch, welches auch Erbbuch heißt, müssen nun alle die Grundstücke, welche einer und derselben Person gehören und deren Name oben drüber mit großen Buchstaben geschrieben ist, auf einem Blatte oder auf mehren Seiten zusammen getragen werden.

Voran stehen die königl. oder fürstlichen Grundstücke, darauf folgen die der Kirche und Schule, dann die der Gutsherrn und des Gemeindewesens und endlich die der einzelnen gemeinen Unterthanen, letztere nach dem Alphabete oder nach der Hausnummer geordnet.

Die Grundstücke selbst, welche einem Besitzer angehören, werden nach den Charten oder Auslegeregistern geordnet. Voran steht das Hofrecht mit dem Hausgarten, oder mehre derselben, dann folgen die Weinberge, Wiesen, Aecker und so fort alles nach den Charten geordnet. Geschlossene Güter können auch mit allen zugehörigen Grundstücken zusammen getragen werden, und die einzelnen Grundstücke, welche zu einem Gute gehören, machen den Beschluß. Auch hier muß jedem Grundstücke seine Bezeichnung (als L. A. 23) auf dem Risse und die Pagina des Auslegeregisters vorgesetzt werden und dann führt man noch wie vorher beym Auslegeregister, an: wie groß die Fläche in □R. und das Steuersimplum, wenn es zu Lehn geht und wie groß die jährliche Lehnslast ist, läßt oder hinten in jeder Zeile einen leeren Platz, damit man in dieser Rubrik einen Verkauf oder Vererbung bemerken könne. Wird nämlich ein Grundstück einem andern übergeben, so muß dieß Grundstück dem seitherigen

Besitzer ab- und dem folgenden Besitzer zu- oder beygeschrieben werden. Das Abschreiben geschieht durchs Vorzeichnen eines Hakens an die Steuertaxe und zugleich dadurch, daß man in die hintere leergelassene Rubrik den Tag der Abschreibung und die Pagina des Erbbuchs anführt, wo der neue Besitzer steht und wohin das veräußerte Grundstück getragen worden ist. Das Zuschreiben geschieht auf eben die Art wie vorher, als die Posten aus dem Auslegeregister geschrieben wurden, und wird jetzt die Pagina des Erbbuchs angeführt, woraus das Grundstück genommen ist, statt das wie vorher die Pagina des Auslegeregisters angeführt hatten.

Sterben nach und nach die nach dem Alphabet eingeschriebenen Besitzer und kommen andere Personen zum Vorschein, welche jene Güter erben oder erwerben, so werden diese nicht mehr nach dem Alphabete, sondern nach der Ordnung von einem Pagina zum andern eingetragen, als sie zu Gütern gelangen. Doch pflegt man zuweilen auch zwey und mehre Seiten für eine Person Platz zu lassen, wenn zu vermuthen ist, daß derselben durch Erbschaft und Betriebsamkeit noch viel zufällt. Damit man aber späterhin, wenn das Erbbuch voller Namen steht, jede Person leicht nachschlagen kann, so wird von Zeit zu Zeit ein Register in alphabetischer Ordnung zum Nachschlagen gemacht und beygelegt. Ist endlich das Erbbuch vollgeschrieben, so wird ein neues Buch beygelegt und dieses als Fortsetzung des ersten angesehen, dergestalt das nach Hundert und mehre Jahren wohl fünf und mehre Bücher vorhanden sind, wovon jedoch nur die neuesten im Gebrauche sind.

Wird nur ein Theil eines Grundstückes verkauft, so wird auch der zugehörige Theil von Steuern und Abgaben gesucht und derselbe ab- und zugeschrieben, dergestalt daß der Stock oder die Summe der Grundsteuer eines Simplums immerfort sich gleich bleibt.

Zunächst werden die Hofrechte, es mögen Häuser darauf stehen oder nicht, nach der Taxe der Hausgärten versteuert. Steht aber ein Haus darauf, so

muß daſſelbe nach Maaßgabe ſeiner Stuben oder Feuerheerde, Fenſter ꝛc. beſonders mit Steuern belegt werden.

Anmerkung. Andere Steuern, als z. B. von Gewerben, Brauereyen ꝛc. gehören nicht hierher.

§. 55.

Von Zeichnen, Verjüngen und Reduciren der Riſſe.

I. Von Zeichnen der Riſſe.

Hier hat man zu merken:

1) Von allen Gebäuden, als Pallästen, Kirchen, Feſtungswerken, Häuſern, Scheunen und Ställen wird nur der Grundriß (die horizontale Fläche, worauf die Gebäude ſtehen) gezeichnet, niemals ein Pallaſt oder Thurm ſelbſt gemahlt. Will man den Grundriß einer Kirche, eines Pallaſtes, Forſthauſes, einer Fütterung, Schenke ꝛc. durch ein hineingeſetztes

ꝛc. bezeichnen, ſo ſteht es frey. Das Auslegeregiſter wird uns jedoch von ſelbſt die nöthige Aufklärung geben. Jedes Hofrecht wird nur nach ſeiner Figur und Grenze richtig angegeben, was die darauf ſtehenden Gebäude betrifft, ſo zeichnet man ihre Grundfläche nur nach Gutdünken hinein. Iſt der Riß einer Stadt ſehr klein, ſo kann man nur die Straſen und die einzelnen Felder der Stadt, nicht aber die einzelnen Hofrechte ſelbſt durch Linien andeuten. Auf Landcharten werden die Haupt- Kreis- und Landſtädte und Dörfer und befeſtigte Plätze blos durch Zeichen, deren Erklärung gewöhnlich in einem Schilde beygeſetzt iſt, ausgedrückt.

2) Die Wege, Flüſſe und Brücken werden, wenn es der verjüngte Maaßſtab zuläßt, nach ihrer wahren Breite und Form aufgetragen. Iſt aber der Maaßſtab ſehr klein, ſo drückt man die Wege und Brücken durch eine feine Doppellinie und die Flüſſe durch eine

einfache Linie, welche den Lauf des Flusses anzeigt, aus.

3) Die Grenzen eines Grundstückes werden auf einer Flurcharte durch gezogene feine gerade, selten krumme Linien die sich in einem Ecke endigen, angedeutet. Ist die Grenze streitig, so wird sie bloß punktirt. Grenzsteine müssen in der jeder Ecke stehen, man bezeichnet sie durch ein hineingesetztes äußerst kleines Quadrat oder durch ein kleines Kreischen; der Mittelpunkt desselben ist der Ort des Grenzsteines. Zuweilen gibt es auch in einer langen geraden Grenzlinie Zwischensteine oder sogenannte Laufer. Am Umfange einer Flur oder eines Waldes grenzt gewöhnlich das Eigenthum verschiedener Nachbarn, und da wo das Eigenthum verschiedener Grenznachbarn wechselt, wird eine punktirte Linie hinaus gezogen. Um anzuzeigen, welcher Nachbar an diesem oder jenem Theile des Umfangs grenzt, wird der Name des Grenznachbars am Umfange des Risses beygeschrieben. Den Anfang und das Ende dieser Nachbarschaften zeigen jene punktirte Linien an. Es ist nicht nöthig, daß man landesherrliche, Kreisregierungs-Orts- oder Privatgrenze durch besondere Figuren und Farben unterscheide, indem man doch dieß alles auf dem Risse durch beygeschriebenen Text, und die Person oder Gemeine selbst, welche angrenzt, zu bemerken hat. Auf Landkarten zeigt man die Landesgrenzen durch bloße punktirte Linien und durch eine darüber weggezogene Farbe an.

4) Um in einem Flurrisse die Gärten und Wiesen von den Ackerfeldern, Hutrasen und Wäldern besser zu unterscheiden, übertängt man diese verschiedene Art von Grundstücken auch mit verschiedenen Farben. Man wählt hierzu passende Farben doch solche, daß man Wiesen, Aecker und Wälder leicht unterscheiden kann. Zu Gärten und Wiesen nimmt man gewöhnlich ein helles Grün; zu Ackerland und Weinbergen ein Braun oder Gelblichroth, zu Hutrasen ein blasses oder gelbes Grün, zu Laubhölzern ein dunkeles, und zu Nadelhölzern ein sehr dunkeles Grün. In einer Forstcharte pflegt man

auch diejenigen Bezirke, welche als Hochwald, Mittel- und Schlagwald auf diese oder jene Art, unter diesem oder jenem Turnus behandelt und abgetrieben werden, durch besondere Farben anzudeuten. Zu einer jeden Charte wird ein besonders Schild gezeichnet und darin die Bedeutung der Farben angezeigt.

5) Auch die Gebirgs-Abdachungen und Formen mit den zwischen liegenden Thälern und Schluchten sucht man durch einen Riß ziemlich getreu darzustellen, und zwar hat man hier dreyerley Methoden: Entweder tuscht man sie, oder schraffirt, oder ringelt sie.

a) Tuscht man die Berge, so werden die Gebirgswände, nach Maaßgabe ihres starken, mittelmäßigen, oder schwachen Abhangs auch mit schwarzen dunkler oder verdünnter Tusche übertüngt und verwischen.

b) Schraffirt man die Berge, so macht man mehre Striche nach der Richtung, wie die Regenwasser ablaufen, neben einander und macht sie desto enger und stärker, je schroffer die Bergwand, und desto weitläufiger und schwächer, je sanfter der Abhang ist. Ist der Abhang in der Mitte einer Bergwand am stärksten, und sowohl weiter hinauf als weiter hinunter die Abdachung schwächer, so müssen auch die Schraffirstriche in der Mitte am stärksten seyn.

c) Ringelt man die Berge, so muß jeder Ringel den Umfang eines durch den Berg geführten horizontalen Durchschnitts vorstellen. Diese Ringel kommen an denjenigen Stellen nahe an einander zu liegen, wo eine starke Abdachung ist, und fern — wo wenig Abdachung vorhanden ist. Die Form der Berge ergibt sich sodann von selbst. Eigentlich ist diese Zeichnungsmethode der Berge die vorzüglichste und entspricht ganz dem Zwecke der Bergzeichnung, sie ist aber schwer auszuführen. Die Regenwasser durchschneiden die gemachten Ringel an allen Orten senkrecht.

Um ein Begriff von starker oder schwacher Färbung, Schraffur und Ringelung der verschiedenen
Fig. 180. Bergwände zu geben, sey WXABCDEFGH Fig. 180. der vertikale Durchschnitt eines Berges, HW die Horizontale, worauf der Berg steht, AP die vertikale

Höhe desselben. Man denke sich nun die vertikale Fig. 180.
Höhe in lauter gleiche Theile getheilt, ziehe aus den Theilungspunkten V, U, T, S ꝛc. lauter Horizontale VB, UC ꝛc. TD, SE ꝛc. und fälle aus den Punkten B, C, D, E ꝛc. wo die äußere Fläche, oder der äußere Umriß ABCDEFGH des Berges durchschnitten wird, lauter Vertikale BO; CN ꝛc. DM, EL ꝛc.; so wird man vor Augen sehen, daß diese vertikale Linien in BO und CN desto weiter von einander zu stehen kommen, je geringer die Abdachung in CB und GF ist, und daß die vertikale Linien DM und EL desto enger zu stehen kommen, je größer die Abdachung ED oder je größer der ∠ SED = ∠ YED ist. Man setze den Abdachungswinkel YED = α und TS = VU = RQ = DY = a, so ist im rechtwinkligen Drepecke DYE die Seite EY oder LM = $\frac{a.\cot\alpha}{r}$.

Ferner sey ∠ UCB = β, so ist ON = $\frac{a.\cot\beta}{r}$

und es verhält sich ON : ML = $\frac{a.\cot\beta}{r}$: $\frac{a.\cot\alpha}{r}$

= cot β : cot α, und es stehen daher ON und ML mit dem Cotangenten des zugehörigen Abdachungswinkels UCB und SED im Verhältnisse. Statt der Schiefen BC und DE werden die zugehörigen Horizontalen ON und ML eingetragen und wenn man, um die Abdachung CB auszudrücken, in ON vier Schrafirstriche macht, so müssen auch, um die Abdachung ED auszudrücken, in der ungleich kürzern Entfernung ML ebenfalls vier Schrafirstriche gemacht werden. Es steht daher die Entfernung der Schrafirstriche mit dem Cotangenten des Abdachungswinkels im Verhältnisse. Ist der Abdachungswinkel = 0 Grad, so ist der Cotangent unendlich groß; wenn daher ein Feld horizontal liegt, so müssen die Schrafirstriche unendlich weit von einander liegen, das heißt, gar keine vorhanden seyn. Angenommen, daß in ON und ML gleichviel Striche, nämlich in beyden 10 Striche gemacht werden sollen, so findet man die

Zahl der Striche auf 1 Zoll, wenn man mit der Zahl der Zolle einer Linie in m dividirt, und da ON $= \frac{a.\cot\beta}{r}$ Zolle und ML $= \frac{a.\cot\alpha}{r}$ Zolle, so kommen in ON auf den Zoll $= m : \frac{a.\cot\beta}{r} = \frac{m.r}{a.\cot\beta} = \frac{m.\tang\beta}{a.r}$ Striche und in ML auf den Zoll $\frac{m.\tang\alpha}{a.r}$ Striche. Nun verhält sich $\frac{m.\tang\beta}{a.r} : \frac{m.\tang\alpha}{a.r} = \tang\beta : \tang\alpha$, daher auch bei einem verschiedenen Abdachungswinkel die Striche auf einem Zolle mit dem Tangenten des Abdachungswinkels im Verhältnisse stehen.

Wenn z. B. bey einer Elevation oder Abdachung von 45 Graden 100 Striche neben einander auf einen Zoll gemacht worden und man die Zahl x der Striche auf einen Zoll für $\alpha°$ Elevation begehrt, so verhält sich $\tang 45° : 100 = \tang\alpha° : x$, wo nun $x = \frac{100 \times \tang\alpha°}{\tang 45°} = \frac{100.\tang\alpha}{1} = 100 \times \tang\alpha$.

In nachstehender Tafel findet man die Zahl der Schraffirstriche eines Zolls für 5 zu 5 Grade Elevation angegeben.

$\alpha°$	Striche	$\alpha°$	Striche
5°	9	30	58
10°	18	35	70
15	27	40	84
20	36	45	100
25	47	50	119.

Für höhere Grade fließen die Striche schwarz zusammen.

Fig. 181. Bey der Ringelschraffur Fig. 181. finden diese Verhältnisse genau Statt und da wo die Bogen noch einmal so nahe als an einem andern Orte stehen,

sind auch die Elevationswinkel beynahe noch einmal so groß.

Bey der geradlinigen Schraffur Fig. 182. hingegen, wo die Striche nach dem Laufe der Regenwasser gezogen werden, sucht man die Stärke der Striche gegen das zwischen gelassene Weiße in ein solches Verhältniß zu setzen, daß man aus diesem Verhältnisse den Grad der Abdachung so ziemlich deutlich erkennen kann, und zwar macht man Fig. 182.

bey einem Winkel von 5° den schwarzen Strich nur $\frac{9}{100}$ oder gegen $\frac{1}{11}$ oder $\frac{1}{10}$ so stark als das zwischen liegende Weiße;

bey 10° das Schwarze ungefähr = $\frac{18}{100}$ oder = $\frac{1}{6}$ des Weißen.

bey 15° das Schwarze $\frac{1}{4}$ des Weißen
bey 20° — — $\frac{1}{3}$ — —
— 25 das Schwarze halb so breit als das Weiße
— 30 — — $\frac{3}{5}$ — — — — —
— 35 — — $\frac{3}{4}$ — — — — —
— 40 — — $\frac{5}{6}$ — — — — —
— 45 — — eben so breit als das Weiße
— 50 das Weiße $\frac{5}{6}$ so breit als das Schwarze
bey 55° das Weiße $\frac{3}{4}$ so breit als das Schwarze
— 60 — — $\frac{3}{5}$ — — — — —
— 65 — — $\frac{1}{2}$ — — — — —
— 70 — — $\frac{1}{3}$ — — — — —
— 75 — — $\frac{1}{4}$ — — — — —
— 80 — — $\frac{1}{6}$ — — — — —
— 85 — — $\frac{1}{10}$ — — — — —

bey höhern Graden und Ueberhängen ganz schwarz.

Anmerkungen. 1) Es hält schwer die Berge so zu tuschen, zu schraffiren und zu ringeln, daß man daraus alle Abdachungswinkel, alle kleine Abänderungen der Formen genau erkennen und unterscheiden könne. Es ist aber auch nicht nöthig, daß jeder kleine Unterschied in der Bergform und Abdachung durch den Riß ausgedrückt werde, wenn nur die Schraffur so gefaßt wird, daß man dadurch einen Begriff von der Hauptform der Gebirge und von den Hauptgraden der Abdachungen erhält. Beym

Forstwesen unterscheiden wir nur vier Hauptabdachungen:

a) wo das Holz nur durchs starke Hemmen
b) wo das Holz nur durchs Schleifen
c) — — — — durchs Rutschen und
d) — — — — durchs Stürzen (von Felsen)

abgeführt oder transportirt werden kann.

2) Während der Geometer die verschiedenen Felder und Waldbestände auspfählt und mißt, lernt er auch zugleich die Lage und Form der verschiedenen Bergränder und Rücken kennen, welche er einstweilen durch Bleystiftstriche bemerkt. Zeichnet er nachher die Risse ins Reine, so setzt er die Bergschraffur so darauf, daß sie der gemerkten Hauptform entspricht.

II. Vom Verjüngungs Verhältnisse.

Folgende Aufgaben werden dieß klar machen.

1) Aufgabe. Man soll eine Gegend so messen und zu Riß bringen, daß der Riß den 10ten oder 50000sten Theil der natürlichen Größe der gemessenen Linien im Felde anzeigt. Man fragt, wie groß man den verjüngten Maaßstab zu der gewählten Meßruthe anzunehmen habe?

Auflösung. Man fasse die Kette an ihren Endringen durch vertikal gehaltene Kettenstäbe und spanne sie über abgehobelte, horizontal hinter einander gelegte Breter aus, gebe der Kette durch untergelegte gleichhohe Klötzchen eine parallele Lage zu den Bretern, bemerke auf den Bretern die wahre Länge der Kette von der Spitze eines Kettenstabes zur andern, ziehe durch Abzielen angelegter Latten eine gerade Linie, welche mit der Kette eine gleiche Länge hat; messe die Länge der Kette durch einen Stangenzirkel (womit man etwa einen rheinischen oder natürlichen Fuß gefaßt hat), und bemerke die wahre Länge derselben in Fußen, Zollen, Zehntheil und Hundertel derselben. Wenn nun die Kette vier Ruthen lang, und 643,6 Zolle groß gefunden worden ist, so ist 1 Ruthe = 160,9 Zolle und 1000 Ruthen = 160900

Zolle. Da nun die verjüngte Ruthe $= \frac{1}{50000}$ der Meßruthe seyn soll, so werden 1000 verjüngte Ruthen $= \frac{160900}{50000} = 3{,}218$ Zolle enthalten müssen. Faßt man daher 3,218 Zolle oder 32,18 Decimallinien mit dem Zirkel und trägt man diese Abmessung in einer vorgezogenen geraden Linie auf, so muß man diese Abmessung in 10 und 100 Theile theilen, um die Länge von 100 und von 10 verjüngten Ruthen zu erhalten; und hat man die Länge von 100 und 1000 verjüngten Ruthen, so wird man durch einen sogenannten verjüngten Maaßstab (worauf Paralleten und Transpersalen gezogen werden können) auch leicht die Länge von 200; 300; 400 ꝛc. Ruthen, und endlich auch, da die Länge von 10 Ruthen bekannt ist, die Länge von 20; 30; 40 ꝛc. und auch von den einzeln Ruthen angeben können, wo jedoch die einzelnen Ruthen kaum zu erkennen sind.

2) Aufgabe. Wenn die Meßruthe gerade 14 Nürnberger Stadtfuße lang ist, und der Riß von allen gemessenen Linien nur den 800sten Theil enthalten soll, wie viel rheinländische Zolle müssen 10 verjüngte Ruthen groß gemacht werden?

Auflösung. Es ist die Meßruthe $= 14 \times 116{,}18$ rheinländische Theile $= 14 \times 11{,}618$ rhein. Zolle (vermöge des ersten Bandes p. 279) und demnach 10 Meßruthen $= 10 \times 14 \times 11{,}618$ Zolle und 10 verjüngte Ruthen $= \frac{10 \times 14 \times 11{,}618}{800} =$ 2,033 Zolle $=$ 20,33 Decimallinien. Man macht daher 10 verjüngte Ruthen $=$ 2,033 rheinische Zolle, welche man nachher in einzelne Ruthen und durch Transversalen in einzelne Fuße abtheilen kann.

3) Aufgabe. In welchem Verhältnisse steht die Verjüngung, wenn die Messung mit einer 14 Nürnb. Fuß langen Ruthe und das Auftragen mittelst eines Maaßstabes geschieht, wo 20 verjüngte Ruthen auf einen rheinl. Zoll gehen?

Auflösung. Es ist die Meßruthe $= 14 \times 11{,}618$ rhein. Zolle und die verjüngte Ruthe $= \frac{1}{20}$ rh. Zolle; dividirt man mit dieser in jene, so findet man, daß diese in jener $14 \times 11{,}618 : \frac{1}{20} = 14 \times 11{,}618 \times 20 = 3253$ mal enthalten ist, woraus folgt, daß die verjüngte Ruthe $= \frac{1}{3253}$ der Ruthe im Felde und demnach das Verjüngungsverhältniß $= \frac{1}{3253}$ ist.

4) Lehrsatz. Mißt man ein Grundstück mit verschiedenen Meßruthen von a und von b natürlichen Fußen und wählt man zum Auftragen der Figur auch verschiedene verjüngte Maaßstäbe von c und d Zollen oder Linien, wo aber bey beyden Maaßstäben das Verjüngungsverhältniß $= \frac{1}{m}$ ist, so wird der Riß gleichgroß werden, man mag die eine oder die andere Feldruthe mit dem zugehörigen verjüngten Maaßstabe wählen.

Eben so wird auch der Riß gleichgroß, wenn $a : b = c : d$ ist, nämlich die Maaßstäbe mit den Meßruthen im Verhälnisse stehen.

Beweis. Es enthalte eine Linie im Felde f natürliche Fuße, so wird sie, mit der a fußigen Ruthe gemessen, $\frac{f}{a}$ Ruthen, und mit der b fußigen Ruthe gemessen, $\frac{f}{b}$ Ruthen groß gefunden werden. Nun ist der verjüngte Maaßstab (zur ersten Ruthe) $= c = \frac{1}{m} a$ und (zur zweyten) $= d = \frac{1}{m} b$, daher die aufs Papier getragene Linie im ersten Falle $= \frac{f}{a} \times c = \frac{f}{a} \times \frac{a}{m} = \frac{f}{m}$ und im zweyten Falle $= \frac{f}{b} \times c = \frac{f}{b} \cdot \frac{c}{m} = \frac{f}{m}$ und demnach die Figur in beyden Fällen gleich. — Daß $a : b = \frac{1}{m} a : \frac{1}{m} b = c : d$ ist, sieht man vor Augen.

5) Aufgabe. Man hat ein Grundstück mit der 14 fußigen Ruthe gemessen und die Figur nach einem vorliegenden Maaßstabe aufgetragen, wenn nun das Grundstück eigentlich mit der 12 fußigen Ruthe hätte gemessen werden sollen, wie groß muß ein verjüngter Maaßstab zur Figur gezeichnet werden, wenn er dasselbe Resultat zum Vorschein bringen soll, als wäre die Messung mit der 12 fußigen Ruthe geschehen.

Auflösung. Man setze die Länge von 10 verjüngten Ruthen des gesuchten Maaßstabs = x, so muß (nach vorigem Lehrsatze)

$14 : 12 = 10 : x$ und demnach

$$x = \frac{12.10}{14} = \frac{60}{7} = 8{,}57 \text{ seyn.}$$

Mißt man daher vom vorliegenden zuerst gewählten Maaßstabe 8 verjüngte Ruthen 5 Fuße und 7 Zolle ab, so muß man daraus 10 verjüngte Ruthen machen, um den beyzuzeichneten Maaßstab zu erhalten.

6) Aufgabe. In einem Lande hat man die Länge der Meßruthe und des verjüngten Maaßstabes zum Ausmessen und Auftragen der Grundstücke vorgeschrieben. Wenn nun der Geometer dennoch seine längere oder kürzere Meßruthe beybehalten will so wird gefragt, nach welchem verjüngten Maaßstabe er seine Figur auftragen müsse, wenn sie eben so groß ausfallen soll, als wäre sie vorschriftsmäßig gemessen und aufgetragen worden?

Auflösung. Es sey die vorgeschriebene Ruthe = 12 rhein. Fuße = 144 rh. Zolle und die Ruthe des Geometers = $162\frac{2}{3}$ rhein. Zolle; ferner sollen 100 verjüngte Ruthen des vorgeschriebenen Maaßstabes = 10 Zolle und 100 verjüngte Ruthen des gesuchten Maaßstabes = x Zolle seyn, so findet folgende Proportion statt:

$144 : 162\frac{2}{3} = 10 : x$, wo nun

$$x = \frac{1626{,}7}{144} = 11{,}296 \text{ Zolle} = 100 \text{ verjüngte Ruthen des gesuchten Maaßstabes.}$$

Wenn man daher 11,296 rhein. Zolle oder 112,96 verjüngte Ruthen des vorgeschriebenen Maaßstabes abmißt, so muß man daraus 100 verjüngte Ruthen machen, um den verjüngten Maaßstab zu erhalten, nach welchem die Figur aufgetragen werden muß. Natürlich muß zuletzt doch der vorgeschriebene Maaßstab zur Berechnung der Figur gebraucht werden.

7) Aufgabe. Man hat mehrere Grundstücke mit einer Ruthe von 14 Nürnb. Stadtfußen gemessen und diese nach einem verjüngten Maaßstabe, wo 20 verjüngte Ruthen auf einen rhein. Zoll gehen, zu Riß gebracht. Nun will man neue Risse zu den gemessenen Grundstücken dergestalt fertigen, daß darin alle Linien der 10000ste Theil der natürlichen Länge im Felde sind. Man fragt, in welchem Verhältnisse die Linien des neuen Risses gegen die Linien des alten stehen müssen.

Auflösung. Es sey eine Linie im Felde $= a$ und der alte Riß stelle $\frac{1}{m}$ dieser Linie vor, so ist diese Linie b auf dem alten Risse $= \frac{1}{m} a = \frac{a}{m} = b$ und demnach $a = mb$. Soll nun dieselbe Linie a im Felde auf dem neuen Risse $= \frac{1}{n} a = c$ werden, so wird auch $a = nc$ seyn. Da nun $a = mb$ und auch $= nc$, so ist auch $mb = nc$ und es verhält sich

$$b : c = n : m \text{ oder}$$

$$b : c = \frac{1}{m} : \frac{1}{n}.$$

Es stehen demnach die Linien b und c mit den zugehörigen Verjüngungsverhältnissen $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ in Verhältniß.

In unserm vorgelegten Beyspiele ist die Meßruthe $= 14 \times 11,618$ rhein. Zölle und der hierzu gewählte verjüngte Maaßstab $= \frac{1}{20}$ rhein. Zolle. Dividiren wir diese verjüngten Ruthe $= \frac{1}{20}$ Zoll

durch

durch die Länge der Meßruthe $= 14 \times 11{,}618$ Z., so erhalten wir das Verjüngungsverhältniß

$$\frac{1}{20 \times 14 \times 11{,}618} = \frac{1}{m}, \text{ wo nun}$$

$m = 20 \times 14 \times 11{,}618 = 3253{,}04.$

Da nun das neue Verjüngungsverhältniß $= \frac{1}{10000} = \frac{1}{n}$ und $n = 10000$ ist, so wird $n : m = 10000 : 3253{,}04 = b : c$ und demnach $c = \frac{3253{,}04 \times b}{10000} = 0{,}325304 \times b$ seyn.

Man setze im alten Risse eine Linie $b = 10$, so wird man dafür im neuen Risse eine Linie $c = 3{,}253$ annehmen müssen. Es wird daher der alte Riß in dem Verhältnisse wie 10 zu 3,253 verjüngt. Wie man nun einen vorgelegten Riß kleiner oder auch größer zeichnen könne, wird nachher folgen.

8) Aufgabe. Man soll einen Riß oder ein Gemählde so fortzeichnen (reduciren), daß die Fläche des vorgelegten Gemähldes (des Originals) zur Fläche des neu zu zeichnenden Gemählde (der Copie) sich verhält, wie $m : n$.

Auflösung. Es sey die Länge und Breite des vorgelegten Originals $= a$ und b Fuße, und die Länge und Breite der zu mahlenden Copie $= xa$ und xb, so ist die Fläche des Originals $= a \times b$ und der Copie $= xa \times xb = abx^2$. Da nun die Aufgabe dedingt, daß

$ab : abx^2 = m : n$ sey,

so wird $x^2 = \frac{n}{m}$ und $x = \sqrt{\frac{n}{m}}$ seyn müssen.

Soll z. B. die Copie nur $\frac{2}{3}$ so viel Fläche als das Original enthalten, so muß man die Seiten der Copie nur $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8}{9}$ so groß, als die Seiten des Originals machen.

9) Aufgabe. Ein Grundstück ist nach einer alten Messung zu 230 □R. angegeben, nun mißt es der Geometer mit seiner Ruthe und findet nur 208 □R. Wie groß war die alte Ruthe?

Auflösung. Es sey das Grundstück nach der neuen Ruthe a Fuße lang und b Fuße breit, so ist $a \times b = 208$. Ferner sey die alte Ruthe $= \frac{m}{10}$ der neuen Ruthe, so ist die Länge des Grundstückes $a : \frac{m}{10} = \frac{10a}{m}$ und die Breite $= \frac{10.b}{m}$ daher die Fläche $\frac{10a}{m} \times \frac{10b}{m} = 230$, oder

$$100.ab = 230m^2, \text{ oder}$$
$$100.208 = 230.m^2, \text{ wohet}$$
$$m = \sqrt{\frac{20800}{230}} = \sqrt{90{,}44} = 9{,}51.$$

Es ist daher die alte Ruthe $= 9{,}51$ Decimalfuße groß gewesen, während die neue 10 Dec. Fuße enthält.

Auch kann man die vorgelegte Aufgabe auf folgende Art lösen.

Die alte Quadratruthe enthielt m^2 □ Fuße und die neue enthält 10^2 F., mithin ist das Grundstück $= 230 \times m^2$ □ F. $= 208 \times 100$ □ F., wo nun $m = \sqrt{\frac{2080}{23}} = 9{,}51$, wie vorher.

III. Von Copiren und Reduciren der Risse.

1) Das Copiren geschieht bekanntlich, wenn man das Original auf ein hinlänglich großes Blatt Papier befestiget, alle Hauptpunkte des Originals mit einer feinen Copirnadel senkrecht durchsticht und dadurch diese Punkte auf dem untergelegten Bogen kenntlich macht, sodann das Original abhebt und auf dem leeren, jedoch mit Punkten versehenen Bogen, alle Linien nach denselben Punkten und die krummen Linien nach derselben Form zieht, wie sie im Originale vorgezogen sind. Sollte irgend ein Punkt auf der Copie nicht kenntlich oder gar übersehen seyn, so kann man denselben aus der Entfernung von zwey andern kenntlichen Punkten bestimmen.

2) Darf das Original nicht durchstochen werden und sind die beyden auf einander gelegten Bögen, gegen das Licht gehalten, so ziemlich durchsichtig, so befestiget man am Rande den leeren Bogen aufs Original, legt das Original mit dem darauf befestigten Bogen auf eine ebene Glasscheibe und hält sodann die Scheibe mit den Bögen gegen starkes Tage- oder Sonnen-Licht, so werden alle Figuren des Originals auf dem übergelegten leeren Bogen sichtbar seyn, welche man sodann mit einer feinen Bleyfeder genau nachmahlt, dergestalt, daß die Figuren der Copie und des Originals sich einander decken. Zuletzt zeichnet man die Copie mit Tusche und Farbe gehörig aus.

3) Sind aber die Bögen nicht durchsichtig genug, so legt man aufs Original durchsichtiges Papier und befestiget dasselbe am Rande durch eingestochene feine Nägelchen, und da jetzt alle Figuren des untergelegten Originals auf dem obern durchsichtigen Papier vollkommen sichtbar sind, so werden diese mit Tusche nachgezeichnet. Von diesem durchsichtigen Papiere kann man alsdann die darauf gezeichneten Figuren auf ein anderes weißes Blatt und zwar auf die vorhin erzählte Art copiren.

Anmerkung. Durchsichtiges Papier kann man in einer Material-Handlung zu kaufen kriegen, oder man verfertiget es bekanntlich selbst, und zwar dadurch, daß man mehre ganz dünne feine weiße Papier-Bögen übereinander legt, den obern mit einer Auflösung auf gewärmten Wachse und Kienöl, oder bloß mit fettem Oele bestreicht und einen obern Bogen nach dem andern mit einem heißen Bügeleisen trocken plättet.

4) Will man sich nicht die Mühe geben die Figuren des Originals zweymal zu zeichnen, nämlich einmal aufs durchsichtige Papier und von da nachher aufs Blatt, wohin man die Figur begehrt; so muß man ein Quadratnetz zu Hilfe nehmen, welches zugleich auch dazu dient, eine vorgelegte Figur zu verkleinern oder auch zu vergrößern.

Gesetzt, es sollten zu den Figuren EFGHIKLMNO und PQRSTU, welche auf dem Blatte ABDC Fig. 183. stehen, andere ähnliche Figuren efghiklmno und pqrstu aufs Blatt abcd Fig. 184. gezeichnet worden und zwar dergestalt, daß alle Linien des ersten Blattes zu den Linien des zweyten sich verhalten, wie m zu n oder wie 8 zu 5; so gebraucht man hierzu durchsichtiges Papier, das durch fein gezogene Linien genau in lauter Quadrate abgetheilt ist, legt und befestiget den durchsichtigen Bogen mit dem Quadratnetze auf das vorgelegte Original ABDC, theilt das Blatt abdc, worauf die Figuren efghiklmno und pqrstu getragen werden sollen, durch fein gezogene Bleylinien ebenfalls in lauter Quadrate ein, und zwar, wie begehrt wird, dergestalt, daß die Seiten AV und av der Quadrate des Originals und der Copie sich verhalten, wie m zu n oder 8 zu 5, nämlich daß

Fig. 183. — 184.

$$av = \frac{n}{m} AV \text{ oder } = \tfrac{5}{8} AV, \text{ oder } ab = \tfrac{5}{8} AB,$$

und $bd = \frac{5}{8}$ BD ist; gibt Achtung, welche Quadrate der Copie und des Originals zu einander gehören, faßt die Punkte in diesem oder jenem Quadrate recht ins Auge, wo eine gerade Linie im Originali anfängt und aufhört, oder wohin der Bogen einer krummen Linie von einem Quadrate ins andere geht und trägt diese Punkte genau ins zugehörige Quadrat der Copie ein, und wenn diese Punkte eingetragen sind, so zieht man nach den vorgezeichneten Punkten die begehrte reducirte Figur.

Anmerkung. Will man gewisse Punkte in einem Quadrate sehr oder ganz genau bestimmen, so kann man ein solches Quadrat auf ein besonderes Blatt durchsichtiges Papier tragen und dasselbe aufs neue wieder in ganz kleine Quadrate abtheilen und dieß kleine Quadratnetz in ein großes Quadrat nach dem andern passen.

5) Sehr nützlich ist hierbey der sogenannte Reduktionszirkel Fig. 185, mittelst dessen man eine jede Linie AB in eine andere DE dergestalt verwan-

Fig. 185.

deln kann, daß AB zu DE sich verhält, wie m zu n Fig. 185.
oder 8 zu 5. Es besteht derselbe aus zwey langen über einander gelegten horizontalen dünnen Bälkchen AE und BD, welche beyde der Länge nach einen parallelen Einschnitt haben und in welchen Einschnitten ein Zapfen in C mittelst Hülsen, die in den Einschnitt greifen, festgehalten wird. Jeder Endpunkt A, B, D, E ist mit einer vertikalen Zirkelspitze versehen. Legt man beyde Bälkchen so über einander, daß AE und BD sich decken, so kann man den Zapfen C mit den Hülsen näher und entfernter an D und E rücken, dergestalt, daß auch AC zu CE oder BC zu CD sich verhält, wie m zu n, in welchem Falle auch AB : DE = m : n ist. Man kann berechnen, wie weit der Mittelpunkt C des Zapfens von A oder E abstehen müsse, wenn sich die Linie AB (welche mit den Spitzen A und B gemessen wird,) zu der Linie DE (welche durch die Spitzen in D und E angegeben wird) verhalten soll, wie m zu n. Denn es sey AE oder BD = a, AC = x und CE = y, so muß

1) $x + y = a$ und

2) $x : y = m : n$ oder

$nx = my$ oder $nx - my = o$ seyn.

Entwickeln wir nun aus diesen beyden Gleichungen den Werth für x und y, so finden wir

$$x = \frac{ma}{m+n} = AC \text{ und}$$

$$y = \frac{na}{m+n} = EC.$$

Es sey $\frac{n}{m} = \frac{1}{10}$, nämlich $m = 10$ und $n = 1$, so ist $AC = \frac{10}{11}$ AE und CE $\frac{1}{11}$ a $= \frac{1}{11}$ AE. Es sey ferner $\frac{n}{m} = \frac{5}{8}$, so AC $= \frac{8}{13}$ AE und CE $= \frac{5}{13}$ AE.

Legt man wie oben, die beyden Arme AE und BD gehörig übereinander, so kann man, wie gesagt, den Zapfen C mit den Hülsen verschieben, und geht durch eine Verrichtung der Hülsen eine Schraube, so

kann man die Hülsen mit dem Zapfen an eine beliebige Stelle der Balken schrauben, und zwar ist auf einen der Balken AE und BD eine Skale mit Zahlen angebracht, damit man den Punkt erkennen könne, wie weit man schrauben müsse, um ein begehrtes Reduktionsverhältniß, als z. B. $\frac{5}{8} = 0{,}625$, herzustellen.

6) Auch den sogenannten Proportionalzirkel kann man zum Verjüngen und Reduciren der Linien
Fig. 186. brauchen. Ein solcher Zirkel Fig. 186. besteht aus zwey langen viereckigen messingenen Platten ABCD und FECG, welche beyde am Eckpunkte C durch ein Zirkelscharnier BIEH zwar an einander festgehalten werden, wo aber die Schenkel CD und CG wie Radien eines Kreises um dem Mittelpunkt C des Scharniers sich drehen lassen, und wo demnach der ∠ DCG beyder Platten enger und weiter gestellt werden kann. Zieht man nun aus dem Punkte C Linien C...60 auf jeder Platte, theilt beyde Linien in 60 oder mehre gleiche Theile ein und macht man die Theilungspunkte 10; 20; 30 ꝛc. durch beygeschriebene Zahlen kenntlich; so wird die Linie 10..10, (welche vom Theilungspunkte 10 des andern gezogen wird) $= \frac{1}{6}$ der Linie 60..60 (welche von einem Punkte 60 zum andern gezogen wird) und eben so ist 20..20 $= \frac{2}{6}$; 50..50 $= \frac{5}{6}$ der Linie 60...60.

Der Gebrauch des Proportionalzirkels ist nunmehr leicht einzusehen. Soll eine gegebene Linie, welche auch kleiner oder größer als AF seyn kann, auf ihren 2fünften Theil reducirt werden, so faßt man die gegebene Linie mit den Spitzen eines gewöhnlichen Handzirkels, verschließt oder öffnet die Schenkel DC und CG des Porportionalzirkels so weit, daß die beyden Spitzen des Handzirkels gerade in die beyden Punkte 60 des Proportionalzirkels passen, und demnach die Linie 60...60 = der vorgelegten Linie wird; faßt man sodann mit dem Handzirkel die beyden Punkte 24, so ist die Linie 24..24 $= \frac{2}{5}$ der vorgelegten Linie, weil $\frac{2}{5} = \frac{24}{60}$ ist. Würde man die vorgelegte Linie in die Punkte 50 der beyden Schenkel passen,

so würden die Punkte 20 den $\frac{2}{3}$ der vorgelegten Linie angeben. Soll man $\frac{4}{5}$ einer Linie angeben, so paßt man die Linie in die Punkte 48 und mißt die Entfernung der Punkte 30.

7) Zum Verjüngen der Figuren bedient man sich auch oft des Storchschnabels Fig. 187. Dieß Fig. 187.
Instrument hat die Form eines Parallelogrammes ABCD und besteht aus vier gleichlangen Bälkchen AB; BC; CD und DA, welche an ihren Enden durch Zapfen in A; B, C und D mit einander verbunden sind und an welchen Zapfen sich die Bälkchen dergestalt drehen lassen, daß das Parallelogramm ABCD auch die Form AEFG annehmen kann; sodann sind auf den genannten Bälkchen ABCDA noch zwey andere KQ und HP durch Schrauben in K, Q, H und P dergestalt befestiget, daß KQ ∥ zu AB und HP ∥ AD und zugleich HI = KI ist. Jedes Bälkchen hat, wie die Bälkchen des Reduktionzirkels, einen Längeneinschnitt und eben in diesem Längeneinschnitte können die Schrauben in H und P mit dem Bälkchen HP näher und entfernter von AD, und die Schrauben Q und K mit dem Bälkchen QK näher und entfernter von BA gestellt werden, und da HI = KI und demnach auch AK = BQ, AH und DP einander gleich seyn müssen, so sind auf allen vier äußern Bälkchen Theilstriche vorgezogen, damit man AH genau = DP und AK = BQ machen kann. Der Zapfen in A läuft in einer Hülse und ist unten wie ein spitziger Nagelbohrer geformt, mittelst dessen man den Storchschnallel auf einem Reißbrete festhalten und woran man ihn in horizontaler Fläche herumdrehen kann. Durch die Oeffnung I die gemeinschaftlichen Durchschnitte der Bälkchen HP und QK geht ebenfalls eine vertikale Hülse, welche einen gut zugespitzten Bleystift umfaßt. Der Zapfen in C hat unten eine Spitze und wenn man diese von C nach F bewegt, so geht die Bleystiftspitze I von I nach M und beschreibt eine Linie IM, welche der Linie CF ähnlich oder parallel ist. Würde man mit der vordern Spitze C des Storchschnabels eine Figur 183.

beſchreiben, ſo würde die Bleyſtiftſpitze deſſelben eine ähnliche Figur 184 beſchreiben und wir können daher mittelſt des Storchſchnabels Figuren in demſelben Verhältniſſe verjüngen, als worin (Fig. 187.) die Seite AB zu AH ſteht. Je größer oder kleiner man daher AHK gegen ABCDA macht, deſto größer oder kleiner wird auch die verjüngte Figur.

8) Noch haben wir zur Verfahrungsart in Nr. 4 folgendes nachzutragen:

Fig. 189. — 190. Von einem großen Quadrate ABCD Fig. 189. wird ein Punkt H hinüber auf ein kleines Quadrat abcd Fig. 190. an die zugehörige richtige Stelle h gebracht, wenn man die Seite EF eines (hölzern) rechtwinkligen Dreyeckes FEG ſo groß, als die Seite DC des Quadrates DCBA und die Seite fe eines andern Dreyeckes feg ſo groß als die Seite cd des Quadrates dcba macht, zuerſt die Seite EF des einen Dreyeckes in 10 und 100 gleiche Theile theilt und dieſe Theile auch auf ein (an die Seite DA geſchobenes) Linial DA trägt, ſodann auch die Seite ef des andern Dreyeckes in 10 und 100 gleiche Theile theilt und dieſe Theile auch auf ein angelegtes Linial da trägt; das Dreyeck FEG am Liniale DG bis zum Punkte H vorſchiebt, die Theile in DE zählt, und endlich auch das Dreyeck feg am Liniale dg ſoweit vorſchiebt, daß die Zahl der Theile in de = den Theilen in DE ſind, worauf man den Punkt h an eine ſolche Stelle der Linie ef ſetzt, daß die Theile in eh mit den Theilen in EH übereinſtimmen.

Fig. 191. — 188. Anmerkung. Wenn ſchon bereits vier Punkte A, B, D, C, Fig. 191. auf ein anderes Blatt a, b, d, c, Fig 188. verjüngt aufgetragen worden ſind und keine große Genauheit zum Eintragen der übrigen Punkte begehrt wird, ſo kann man auch Trapezoide ABDC und abdc ziehen; AC und BD; ac und bd in gleichviele Theile theilen, ferner auch AB und CD und ab und cd in eine gewiſſe Zahl gleiche Theile theilen, zu den Theilungspunkten das zugehörige Netz in 191 und das kleinere Netz in 188 auf die bekannte Art ziehen, wo man zuletzt die Punkte

e, f, g, h, i, k ins zugehörige Feld und in dieselbe Gegend dieses Feldes nach dem Augenmaaße setzt, als worin die vorgezeichneten Punkte E, F, G, H, I, K im Originale stehen.

§. 56.

Vom Situationsplane.

Ein Situationsplan ist eine Charte über einen ganzen Landesbezirk mit den inliegenden Städten, Dörfern, Höfen und einzelnen Mühlen, mit den Wegen, Gewässern und Brücken, Fluren und Wäldern, und worin man die Thäler und Gebirge dieser Gegend ausgezeichnet findet. Ein Forstsituationsplan ist ein solcher, worauf man mehre Forstreviere, welche zu einer Oberforstey gehören, nach ihrem Umfange und Lage gegen einander, mit den inliegenden Thälern, Schlüchten und Gebirgen, und mit den zugehörigen Orten, wo die Forstaufseher wohnen und wohin die Hölzer meistens abgesetzt werden, zusammen gestellt findet.

Ein Situationsplan zeigt nur die Lage, Entfernung und Größe der Flächen, welche uns vorzüglich interessiren und welche nur wenige Meilen weit von einander liegen, an. Von diesem ist eine topographische Charte wenig verschieden, welche eine Gegend von 5 bis 10 Meilen im Durchschnitte, mit allen Wohnörtern, Wegen, Flüssen, Wiesen, Feldern, Wäldern und Gebirgen, und die Grenze eines jeden Weichbildes anzeigt und umfaßt. Eine geographische Charte geht schon 10, 20 und mehre Meilen weit und enthält nur die vorzüglichen Städte und Dörfer, Flüsse und Wege, Wälder und Gebirge, und die Grenzen ganzer Länder. Letzte Charte kann nicht ohne Kenntniß der sphärischen Trigonometrie abgefaßt und demnach auch jetzt noch keine Anweisung dazu gegeben werden.

Natürlich müssen alle Entfernungen und Flächen nach einerley Maaßstab auf den Situationsplan aufgetragen werden, und da dieser Maaßstab sehr klein ist, so können nur gewisse Hauptpunkte zu den Städten, und Dörfern, Wegen und Flüssen, Wiesen und Feldern, Hüten und Wäldern, Gebirgsköpfen und Wänden hinlänglich genau bestimmt werden, und was die Form und Grenze dieser verschiedenen Flächen betrifft, so sucht man noch mehre Zwischenpunkte nach einem guten Augenmaaße einzuschalten und alsdann den Umriß der Ortschaften, die Form der Wege und Flüsse, Berg und Thäler, Felder und Wälder so ziemlich der Natur getreu abzuzeichnen.

Es kömmt daher darauf an, daß man sehr viele Punkte (Fixirpunkte, an welche man sich beym fortgesetzten Messen und nachherigen Auszeichnen der Figur hält) auf eine leichte und sichere Art finden könne, und was das Auszeichnen selbst betrifft, ist ein Gegenstand der nicht hierher gehört und nur durch Uebung im Zeichnen erlangt werden kann.

Die Regeln zur Erwerbung der Fixirpunkte sind nun folgende.

1) Zuerst sucht man die Entfernung und Lage zweyer hoher Punkte X und V, aus welchen man den größten Theil des zu messenden Landes Taf. XXVII. Fig. 192. übersehen kann, dadurch zu gewinnen und zu Papier zu bringen, daß man in einer ziemlich ebenen Gegend zwey Standpunkte Z und Y wählt, aus welchen beyden man nach X und V sehen und von Z nach Y leicht messen kann; läßt in X und V weit sichtbare Stangen (Singnalstangen mit Tüchern bekleidet) aufstellen, visirt sodann aus Z nach Y, X und V und aus Y nach Z, X und V und bringt die Figur ZXVY auf dieselbe Art zu Papier, wie §. 41. I oder IV gezeigt worden. Man kann aber auch die Entfernung XV aus der Entfernung ZY und aus den gemessenen Winkeln in Z und Y nach §. 40. Nr. XVI u. XVII. trigonometrisch berechnen.

2) Nachdem die genannten Punkte X, V, Y, Z zu Papier gebracht worden sind, so schreitet man zum

Auspfählen des Hauptnetzes, läßt auf den höchsten Fig. 192.
Gipfel der übrigen Gebirge Signale stellen oder die Spitze eines hohen Baumes daselbst mit Tüchern bekleiden, setzt auch Singnalstangen an Orte, woraus man weit in ein Thal und zugleich mehre Bergsingnale sehen kann, pfählt ferner auch die Thäler aus, und zwar so, daß man aus einem jeden folgenden Pfahle zwey schon ausgesetzte Pfähle oder Singnale sehen kann, und sucht zuletzt auch noch die Bergschlüchte und die Hauptwege durch die Waldungen welche in ein anderes Thal führen, auf die gewöhnliche Art auszupfählen, damit man auch diese gehörig zu Riß bringen kann.

3) Nachdem die Auspfählung wenigstens der Hauptpunkte geschehen, so visirt man aus X nach allen sichtbaren Singnalen, nach U, nach H, nach Q, nach A^x, B^x ꝛc., visirt sodann auch aus V nach den daselbst sichtbaren Singnalen U, H, G, Q, W ꝛc. und schneidet dadurch die Punkte U, H, Q und vielleicht noch mehre. Verfügt man sich nachher auf den Punkt W und stellt daselbst das Instrument zurück nach V, so kann man alsdann durchs Visiren auf den schon gefundenen Punkt H den Punkt W durchs Rückwärtseinschneiden (§. 47. II.) finden, und ist dieser Punkt W bekannt, so kann alsdann daraus auch den sichtbaren Punkt A^x des Strahls XA^x schneiden; und so schneidet man ferner aus A den Punkt B^x des Strahls XB^x, oder man stellt das Instrument in B^x zurück nach X, visirt aus B^x nach A^x und schneidet dadurch den Punkt B^x rückwärts auf dem Papiere.

4) Ein dritter Ort wird demnach zu zwey schon aufgetragenen Orten bestimmt, wenn man entweder aus den beyden ersten Orten auf den dritten visirt; oder wenn man nur aus einem der ersten Orte auf den dritten visirt, im dritten Orte das Instrument zurückstellt und aus demselben auf den zweyten visirt, wodurch sich der dritte Ort

rückwärts schneidet. Diese Art, einen dritten Ort zu bestimmen, heißt Trianguliren. *)

Hierauf gründet sich die Messung eines Thales, worin die Aussicht zu den hohen signalisirten Punkten durch W. dungen versperrt ist.

Angenommen, der Punkt Q, aus welchem man ins Thal QF sehen kann, sey schon auf irgend eine jetzt erzählte Art zu Papier gebracht worden, so hat man noch einen zweyten Standpunkt F aufzusuchen, aus welchem man nicht nur ins Thal G, E, D, sondern auch einen schon aufgenommenen Punkt H sehen kann. Da nun die Entfernung QH schon auf dem Papiere steht, so kann man durchs Zurückstellen in Q nach V und durchs Visiren aus Q nach F und durchs Zurückstellen in F nach Q und Visiren aus F nach H den Punkt F bestimmen, und ist dieser Punkt F bekannt, so visirt man aus F nach G, nach D und E, stellt das Instrument in G zurück nach V, visirt auf F und schneidet dadurch rückwärts den Punkt G, wo nun aus den zwey schon gefundenen Punkten F und G ein Punkt D, E, C, B, A nach dem andern durchs bloße Triangulkren gefunden werden kann.

Man setzt dieß Triangulireu gewöhnlich so weit fort, bis man zu einem Punkte A der in der Höhe liegt, anlangt, aus welchen man drey Hauptpunke als U, H und V sehen kann, und untersucht sodann nach Anleitung des §. 40. XX., ob dieser Ort A noch zu den genannten drey Orten stimmt.

5) Man kann auch ein Thal QPONMLIK aufnehmen, ohne die Entfernung zweyer Punkte zu kennen, wenn man aus einem festen Punkte X eine Durchschnittslinie XTQK zieht, das Thal durch eine eigene gemessene Standlinie und durchs Trianguliren auf-

*) Ist die Entfernung zweyer Orte und die Lage derselben gegen die Magnetnadel auf dem Tische gegeben, so kann man nach §. 48 IV. auch einen dritten Ort durchs bloße Visiren aus diesem nach jenen bestimmen.

nimmt und den Riß dieses Thales in den Hauptriß so paßt, daß der Punkt Q und die Linie QK, welche man mitaufgenommen hat, sich decken. Der Geometer kann hier durchs Thal eine schicklich angebrachte lange Linie QK ziehen, ein Stück PM dieser Linie messen lassen, aus den Punkten P und M nach vielen Punkten R, O, N, L, I, welche zur Seite liegen, visiren und diese meistens durch Schneiden bestimmen, worauf er ferner das Instrument in schickliche Punkte Q und K der Linie FQK gehörig aufstellt, diese Punkte durchs Rückwärtseinschneiden bestimmt und aus diesen Punkten die Messung weiter fortsetzt.

6) Ob zwey Thäler FA und QK aufs Papier richtig gelegt sind, kann man zwar dadurch erfahren, das man die letzten Punkte A und K des Thalnetzes mit dem Bogennetze in Verbindung bringt, wenn aber durch Waldungen alle Aussicht versperrt ist, so muß man einen besondern Weg von A nach I oder K durch die Waldungen ausspählen und denselben auf die gewöhnliche Art mittelst der Bouſſole oder des Meßtisches aufnehmen.

7) Außerdem, daß man zuweilen einen vierten Ort zu dreyen §. 40. XX. bestimmt, sucht man zuweilen auch zwey Punkte zu andern schon zweyen nach §. 40. XIX. zu entdecken. Was die Aufgabe in §. 40. XX. betrifft, so haben wir sie nicht durch den bloßen Meßtisch auflösen wollen, weil leicht der Fall eintreten kann, daß der Zähler und Nenner der daselbst aufgestellten Formel = o wird, in welchem Falle der vierte Punkt unbestimmt bleibt und an unendlich vielen Orten so angenommen werden kann, daß er die begehrte richtige Lage gegen die ersten drey Punkte erhält, welches demnach zu unvermerkten Hauptirthümern Anlaß geben könnte. Wollen wir gleichwohl diesen vierten Punkt bestimmen, so müssen wir einen andern dritten Punkt wählen oder zu einer ganz andern Verfahrungsart unsere Zuflucht nehmen.

Die Aufgabe §. 40. XIX., wo in Fig. 193. die Entfernung AB der Punkte A und B auf dem Papiere gegeben ist und wo nun zu diesen Punkten A Fig. 193.

und B noch zwey andere Punkte C und D nach ihrer Lage und Entfernung richtig eingetragen werden sollen, läßt sich auch durch den bloßen Meßtisch lösen, wenn man zuerst den Tisch in C aufstellt; daselbst aus c nach D, A und B visirt und die Visirstrahlen cd, ca und cb zieht, sodann in D den Tisch so zurückrichtet, daß dc zurück nach C zielt, aus einem willkührlichen Punkte d der Linie cd auch nach A und B visirt und die ersten Visirstrahlen in a und b schneidet, die Linie ab zieht und darin die wahre Entfernung AB verjüngt von a bis m aufträgt, aus m zu ac die Parallele mb^1 zieht und dadurch den Strahl cb in b^1 schneidet, wo nun, wenn b^1d^1 # zu bd; a^1b^1 # zu ab; a^1d^1 # ad gezogen wird, cd^1 verjüngt = CD; ca^1 verjüngt = CA ꝛc. und überhaupt die Figur $cd^1b^1a^1$ der Figur CDBA ähnlich ist.

8) Sind über gewisse Fluren und Wälder besondere Feldmessers-Karten vorhanden, so kann man diese verjüngen und zum Eintragen in die topographische Karte benutzen. Es muß aber erstens: das Reduktionsverhältniß untersucht und berechnet werden, zweytens: die Lage der (magnetischen) Nordlinie bekannt seyn und wenigstens ein Punkt dieser Flur durchs Trianguliren gefunden und aufgetragen und dieser Punkt auch auf der Flurkarte bemerkt werden, oder wenn die Nordlinie nicht bekannt ist, so muß man zwey bis drey feste Punkte der Flur topographisch aufnehmen. Ist die Entfernung von zwey solchen Punkten auf beyden Charten gegeben, so weiß man auch das Reduktionsverhältniß.

9) Hier mag wohl auch folgende Aufgabe einen schicklichen Platz finden.

Fig. 194. Aufgabe zu Fig. 194. Es soll von A nach B eine gerade Linie ausgepfählt werden, ohne daß man wegen zwischenliegenden Waldungen und Gebirge von einem Orte zum andern sehen kann.

Auflösung. Man pfähle irgend einen Weg ADEFGB, der von A nach B führt, aus, setze einen Stab C in die Verlängerung AD weit hinaus, nehme

die Figur ADEFGB auf die gewöhnliche Art, jedoch Fig. 196
mit der größten Genauheit auf, ziehe auf dem Risse die gerade Linie AB zum Winkel CAB, oder berechne die Abscisse AQ und Ordinate BQ zum Punkte B nach §. 45. wo BQ parallel zu AC gedacht und demnach auch der ∠ ABQ = CAB berechnet werden kann, und weil jetzt der Winkel CAB auf dem Meßtische vorgezeichnet oder durch Rechnung bekannt ist, so kann man jetzt die Linie AB im Felde dadurch ziehen, daß man den Meßtisch oder den Theodoliten wieder in A zurück nach C stellt, die Visirregel an die auf dem Risse vorgezogene Linie AB oder an die Grade des berechneten Winkels CAB anlegt, einen Stab K ins Ziel des Fernrohrs aussetzen läßt, worauf man sodann AK bis B verlängert.

Hat man nicht genau gearbeitet, so kann es leicht geschehen, daß man den Winkel CAB um etwas zu groß oder zu klein anlegt, den Stab K in I statt in K einsetzt und daß man beym Auspfählen der geraden Linie AB nicht in B, sondern in H anlangt. In diesem Falle muß man auf dem Risse die ganze Linie AH, und im Felde das Stück AI nebst der Senkrechten BH, welche auf AH gefällt ist, messen, die Senkrechte IK nach der Proportion

$$AH : HB = AI : IK$$

berechnen und alsdann den Stab K an die richtige Stelle setzen.

Auch wird man beym Auspfählen der geraden Linie AH durch einen Wald sehr oft durch zwischenstehende Bäume gehindert werden. Kömmt ein Baum in Weg, so legt man zu AH eine Parallele NP oder mehre dergleichen parallele Linien neben einander an, und wenn eine Parallele durch einen Baum unterbrochen wird, so sucht man diese hinter dem Baume wieder zu ergänzen, so daß man trotz der zwischenstehenden Bäume doch die Linie AH auspfählen kann. Ist endlich die Linie AH gezogen und der Stab K durch die vorhin angestellte Proportion AH : HB = AI : IK an die ihm zugehörige Stelle K gesetzt, so läßt man

in der Richtung AK zuerst nur einen schmalen Weg aushauen und wenn dieser Weg noch immer nicht genau auf den Punkt B geht, so kann man ihn jetzt sehr leicht dahin gehend machen.

Achtes Kapitel.

Theilung der Felder von allerley Figur und Werthe.

§. 57.

Inhalt dieses Kapitels.

Hier werden wir handeln:

1) Von Theilung der einfachen geradlinigen Figuren von einerley Werthe.
2) Theilung der krummlinigen Figuren durch gezogene gerade Linien.
3) Theilung der krummlinigen Figuren durch krumme.
4) Theilung der zusammengesetzten Figuren von einerley und verschiedenen Werthe durch Parallellinien.
5) Theilung dergleichen Figuren durch Strahllinien, und was

6 und 7)

6 und 7) die Theilung der Figuren betrifft deren Werth im Raume und in der Zeit veränderlich ist, dieß kann erst nach Abhandlung der Lehre von Momenten gezeigt werden.

§. 58.

Theilung der einfachen geradlinigen Figuren.

Zuvor wird erinnert, daß fast alle hieher gehörige Aufgaben schon im fünften Kapitel gelöst sind. Wir wollen sie in folgender Ordnung kurz zusammen tragen und zu unserer Uebung wiederholen.

I. Aufgabe. Ein Parallelogramm ABCD Fig. 195. durch Linien EF und GH, welche parallel zu AB oder DC gezogen werden, in n oder 3 gleiche Theile ABFE, EFHG und GHCD zu theilen. Fig. 195.

Auflösung. Man theile die Seiten AD und BC, worauf die Theilungslinien EF und GH stoßen und welche deshalb Aufstöße heißen, durch die Punkte E und G; F H in n oder 3 gleiche Theile und ziehe in diese Theilungspunkte die begehrten Theilungslinien EF und GH; so sind die drey Theile ABFE; EFHG und GHCD deswegen einander gleich, weil sie insgesammt gleichlang und gleichbreit sind. Setzt man nun die Fläche eines solchen Theiles ABFE $=$ u, so ist die ganze Fläche ABCD $=$ f $=$ 3u, woher $u = \frac{1}{3} f$.

II. Aufgabe. Auf der Seite AB sind zwey parallele Schenkel AD und BC errichtet, man soll zu AB eine Parallele EF so führen, daß die abgeschnittene Fläche ABFE eine vorausbestimmte Zahl a □Ruthen enthält.

Erste Auflösung. Man messe den senkrechte Abstand ON $=$ s der beyden Parallelen AD und BC, dividire a durch s, mache sowohl AE als BF $=$ dem erhaltenen Quotienten $\frac{a}{s}$ und ziehe von E nach F die begehrte Theilungslinie.

Fig. 195. Zweyte Auflösung. Man messe AB = c Ruthen mache die auf AB errichteten Senkrechten IK und LM = $\frac{s}{c}$ und ziehe durch K und M die Theilungslinie EF.

Der Beweis ist §. 31. VIII. gegeben.

Zusatz. Soll die Fläche EFHG = u □R. werden, so wird ABHG = (s + u □R. und AG = BH = $\frac{s + u}{NO}$ zu machen seyn.

III. Anmerkungen. 1) Soll die Fläche ABFE = u rheinländische Quadratruthen groß werden und ist diese Ruthe 12 rheinländische Fuße lang gerechnet, und will der Geometer diese Fläche ABFE von u rhein. □R. gleichwohl durch seine Ruthe, welche 14 Nürnb. Fuße lang ist, abmessen, so muß er zuvor die u rheinländische □R in Nürnberger □R. verwandeln und demnach die Fläche

ABFE = $\frac{u \times 12^2 \times (986,91)^2}{(954,63)^2 \times 14^2}$ = s

Nürnb. □R. groß machen, vermöge Band. I. §. 84 und 85.

2) Soll der erste Theil = s, der zweyte = t und der dritte = u □R. nach einer alten Messung seyn und findet man das ganze Grundstück ABCD nach einer neuen Messung nicht = s + t + u, sondern v □R., so muß man nach der neuen Ruthe

den ersten Theil x = $\frac{s \cdot v}{s + t + u}$ □R.

den zweyten Theil y = $\frac{tv}{s + t + u}$ — und

den dritten Theil z = $\frac{uv}{s + t + u}$ □R.

machen, weil (s + t + u) : v = s : x und (s + t + u) : v = t : y ist, und so fort

IV. Aufgabe. Ein Dreyeck CBA Fig. 196. aus dem Punkte A durch gezogene Strahlen AD und AE in n oder 3 gleiche Theile zu theilen. Fig. 196.

Auflösung. Man theile die Seite BC, welche dem Scheitel A entgegen steht und worauf die Theilungslinien stoßen sollen, in n oder 3 gleiche Theile und ziehe in die Theilungspunkte D und E aus dem Scheitel A die begehrten Theilungslinien AD und AE, so sind alle Dreyecke BDA, DEA und ECA einander gleich, weil ihre Grundlinien BD, DE und EC einander gleich und die Höhe aller drey Dreyecke = AF ist.

V. Aufgabe. Zwey Schenkel BA und BC Fig. 196. formiren einen Winkel ABC; man soll aus dem Punkte A des einen Schenkels eine Gerade AD in einen Punkt D des andern Schenkels so führen, daß das entstehende Dreyeck ABD eine gewisse Zahl s □Ruthen enthält.

Erste Auflösung. Man fälle aus A die Senkrechte AF auf BC, messe AF = h Ruthen, mache $BD = \frac{2s}{h} = \frac{s}{\frac{1}{2}h}$ und ziehe aus A nach D die begehrte Theilunglinie. Eben so wird auch $\triangle CEA = s\ \square R.$, wenn $CE = \frac{2s}{AF}$ gemacht wird.

Zweyte Auflösung. Man messe AB = c R., errichte auf AB eine Senkrechte GH und mache diese $= \frac{2s}{c} = \frac{s}{\frac{1}{2}c}$, führe aus H zu AB die Parallele HD und schneide dadurch den Punkt D der Seite BC, wohin die begehrte Theilungslinie AD geführt werden muß.

Der Beweis ist §. 31. IX. zu finden.

VI. Aufgabe. Man soll die Fläche eines Trapezes ABDC Fig. 197. wo die Seiten AB und CD zu einander parallel laufen, durch gezogene Theilungslinien EG und FH dergestalt in n oder 3 gleiche Theile theilen, daß jeder Theil AEGC, EFHG und FBDH in AE, EF, FB breiter als in CG, GH, HD ausfällt, weil auch AB größer als CD ist. Fig. 197.

Auflösung. Man theile sowohl die Seite AB als die gegenüberstehende Seite CD in n oder 3 gleiche Theile und ziehe zu den gemachten Theilungspunkten E und G, F und H die begehrte Theilungslinien EG und FH.

Denn man setze AE = EF = FB = a und CG = GH = HD = b und den senkrechten Abstand der Parallelen CD und AB nämlich IK = c, so ist jedes Trapez AEGC, EFHG, FBDH gleich groß, nämlich die Fläche eines jeden = $\frac{(a+b)c}{2}$ nach §. 36. I. Da nun diese drey gleichen Trapeze zusammen das vorgelegte Trapez ABDC ausmachen, so ist auch jedes einzelne Trapez AEGC oder EFHG = $\frac{1}{3}$ ABDC.

VII. Aufgabe. Es ist ein Trapez ABDC Fig. 197. mit den parallelen Seiten AB und CD vorgelegt, man soll von einer Parallelen zur andern eine Theilungslinie EG so führen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche eine begehrte Zahl s □R. enthält, sondern auch AB zu AE sich verhält, wie CD zu CG.

Erste Auflösung. Man messe AB = a; CD = b, die Senkrechte IK = c, suche den Werth des Quotienten $\frac{2s}{(a+b)c} = m$, mache AE = m.a und CG = m.b und ziehe von E nach G die Theilungslinie EG.

Zweyte Auflösung. Man suche den Durchschnittspunkt O der verlängerten Schiefen AC und BD, ziehe aus der Mitte L der Linie AC oder aus der Mitte N der Linie BD die Parallele LN zu CD, mache LM = $\frac{s}{IK} = \frac{s}{c}$ und führe aus O über M die gerade Linie OGME, welche zugleich die begehrte Theilungslinie GE bildet.

Dritte Auflösung. Man messe oder berechne LN = $\frac{a+b}{2}$, setze, wie vorher, LM = $\frac{s}{c}$ und berechne AE und CG aus folgenden Proportionen:

$LN : LM = AB : AE$ und
$LN : LM = CD : CG$.

Diese Aufgabe und der Beweis dazu ist schon §. 36. II. gegeben worden.

VIII. Aufgabe. Ein Dreyeck CAB Fig. 198. durch zu BC gezogene Parallellinien DE und FG in n oder 3 gleiche Theile zu theilen. Fig. 198.

Erste Auflösung. Man mache, weil $\triangle ADE = \frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{3}$ und $\triangle AFG = \frac{2}{n}$ oder $\frac{2}{3} \triangle ABC$ werden soll, $AD = AB \times \sqrt{\frac{1}{n}}$ oder $= AB \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{AB \times \sqrt{3}}{3}$ und $AF = AB \times \sqrt{\frac{2}{n}} = AB \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{AB \times \sqrt{6}}{3}$ und ziehe aus D und F die Parallelen DE und FG zu BC. Eben so ist $AE = AC \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $AG = AC \times \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Zweyte Auflösung und zwar durch Verzeichnung. Man beschreibe über AB aus der Mitte M einen Halbkreis AHKB und theile AB in so viele gleiche Theile als das $\triangle ABC$ getheilt werden soll, nämlich in 3 gleiche Theile, errichte aus den Theilungspunkten I und L senkrechte Linien IH und LK auf AB und schneide dadurch den Halbkreis in H und K, fasse die Sehnen AH und AK mit dem Zirkel und trage AH nach AD und AK nach AF und ziehe aus D und F die Parallelen DE und FG zu BC.

Zusatz. Soll daher $\triangle AFG = \frac{3}{4} \triangle ABC$ werden, so macht man $AF = AB \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{AB}{2} \times \sqrt{3}$ oder man macht $AL = \frac{1}{4} AB$ und trägt die zur Senkrechten LK gezogene Sehne AK aus A nach AF.

Der Beweis ist §. 34. II. gegeben.

Da $\sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{mn}{m^2}} = \frac{\sqrt{mn}}{n}$ und mn allzeit eine ganze Größe ist, so wird folgende Wurzel

Fig. 198. tafel uns im Theilen der Dreyecke wesentliche Dienste leisten.

$\sqrt{2} = 1,4142$	$\sqrt{18} = 4,2426$
$\sqrt{3} = 1,7321$	$\sqrt{20} = 4,4721$
$\sqrt{5} = 2,2361$	$\sqrt{21} = 4,5816$
$\sqrt{6} = 2,4495$	$\sqrt{24} = 4,8990$
$\sqrt{7} = 2,6458$	$\sqrt{27} = 5,1962.$
$\sqrt{8} = 2,8284$	$\sqrt{28} = 5,2915.$
$\sqrt{10} = 3,1623$	$\sqrt{30} = 5,4772.$
$\sqrt{12} = 3,4641$	$\sqrt{32} = 5,6569$
$\sqrt{14} = 3,7417$	$\sqrt{35} = 5,9161$
$\sqrt{15} = 3,8730$	$\sqrt{40} = 6,3246$

$$\sqrt{42} = 6,4807.$$

Daß $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = 2.\sqrt{5}$; $\sqrt{32} = \sqrt{16.2} = 4.\sqrt{2}$; $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4.\sqrt{3}$ ꝛc. ist, braucht nicht erinnert zu werden.

Nach dieser Tafel kann man nun leicht das $\triangle$ AFG $= \frac{5}{7}$ $\triangle$ ABC machen, wenn man AF $=$ AB $\times$ $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{AB.\sqrt{5.7}}{7} = \frac{AB \times \sqrt{35}}{7} = \frac{5,9161}{7}$ $\times$ AB $= 0,8452 \times$ AB macht.

IX. Aufgabe. Zur Seite DE des Dreyeckes
Fig. 70. ADE Fig. 70. eine Parallele BC so zu führen, daß das abgeschnittene Dreyeck ABC gerade s □R. enthalte

Erste Auflösung. Man messe DE $= c$ und die darauf aus A gefällte Senkrechte AI $= a$, mache in AI das Stück AH $= \sqrt{\frac{2s.a}{c}} = \sqrt{\frac{as}{\frac{1}{2}c}}$ und ziehe über H die Parallele BC zu DE.

Zweyte Auflösung. Man messe AD $= a$ und die aus E darauf gefällte Senkrechte EG $= c$, mache in AD das Stück ABC $= \sqrt{\frac{as}{\frac{1}{2}c}}$ und ziehe aus B die Parallele BC zu DE. Auch kann AC durch folgende Proportion gefunden werden:

AD : AB = AE : AC.

Dritte Auflösung. Man dividire mit der Senkrechten EG $= c$ in $2s$ oder mit $\frac{1}{2}c$ in s, mache

AK = dem erhaltenen Quotienten $\frac{2s}{c}$, beschreibe aus der Mitte M der Linie AD einen Halbkrtis ALD über AD, errichte aus K eine Senkrechte KL auf AD und schneide dadurch den Kreis in K, trage die Sehne AL nach AB und ziehe aus B die Parallele BC zu DE.

Der Beweis ist schon §. 34. II. gegeben.

X. Aufgabe. Auf eine Linie UE Fig. 88. stoßen zwey Schenkel EI und UW, welche nur wenig auseinander laufen, man soll zu EU eine Parallele HV so führen, daß die abgeschnittene Fläche EUVH sehr genau = s □R. werde. Fig. 88.

Erste Auflösung. Man messe UE = a und dividire s durch a, mache die auf UE errichtete Senkrechte $NQ = \frac{s}{a}$ Ruthen, ziehe über Q die Parallele WI = b zu UE, welche die Schenkel EX und UΩ in I und W schneidet, mache $NP = NQ \times \left(\frac{a+b}{2b}\right)$ und ziehe über P die begehrte Parallele VH zu UE.

Zweyte Auflösung. Man mache wie vorher, $NQ = \frac{s}{a}$ und ziehe über Q die Parallele WI zu UE und ferner auch aus E die Parallele EK zu UW, welche die erste in K schneidet. Nun halbire man EI in G und ziehe zu WG die Parallele KH aus K, so wird diese den Schenkel EX in H durchschneiden, aus welchem Punkte H die begehrte Theilungslinie HV parallel zu EU gezogen werden muß.

Aufgabe und Beweis findet man §. 36. IV.

XI. Aufgabe. Auf die Endpunkte einer Linie UE Fig. 88. stoßen zwey nur wenig zusammen laufende Scheitel EA und UR, man soll zu EU eine Parallele BS so ziehen, daß die dadurch abgeschnittene Fläche EUSB = s □R. werde. Fig. 88.

Erste Auflösung. Diese Aufgabe ist von der vorigen nicht verschieden und wird demnach eben so aufgelöst. Man dividirt nämlich mit UE = a in s.

Fig. 86. macht die auf UE errichtete Senkrechte NM $= \frac{s}{a}$ $=$ c, mißt die über M zu UE geführte Parallele TC $=$ b, welche die Schenkel EA und UR in C und T schneidet, berechnet NL $=$ x aus der Formel $x = c.\left(\frac{a+b}{2b}\right)$ und zieht über L die begehrte Theilungslinie SB $\#$ UE.

Zweyte Auflösung. Man mache, wie vorher NM $= \frac{s}{a}$ und ziehe zu UE die verlängerte Parallele TCF und aus E die Parallele EF zu UT, welche die erste in F schneidet, halbire EC in D und ziehe aus F die Parallele FB zu DT, welche den Punkt B des Schenkels EA schneidet, aus welchem die begehrte Theilungslinie BS parallel zu EU gezogen werden muß.

Der Beweis ist §. 36. IV. ebenfalls zu finden.

Zusatz. Soll UEHV $= \frac{1}{3}$ der Fläche UEXΩ werden, so muß man zuvor die ganze Fläche UEXΩ $=$ f suchen und entweder die Fläche UEHV $=$ s $= \frac{1}{3}$f nach voriger Aufgabe in X, oder ΩXHV $=$ s $= \frac{2}{3}$f nach dieser Aufgabe in XI. machen.

XII. Aufgabe. Auf den Endpunkten einer Fig. 87. Linie CH Fig. 87. sind zwey stark aus einander laufende Schenkel CE und HF errichtet, man soll von einem Schenkel zum andern eine Linie DG parallel zu CH so führen, daß das entstehende Trapez CHGD $=$ s □R. werde.

Erste Auflösung. Man verlängere die Schenkel CE und HF rückwärts bis zum Durchschnittspunkte A, fälle aus A auf CH die Senkrechte AR, messe AR $=$ a und CH $=$ c, machen $AF = \sqrt{a\left(a+\frac{2s}{c}\right)}$ oder $RT = AT - AR = -a + \sqrt{a\left(a+\frac{2s}{c}\right)}$ und ziehe durch den Punkt T die begehrte Theilungslinie DG parallel zu CH.

Zweyte Auflösung. Man fälle aus C auf EH = a eine Senkrechte CI = c, dividire 2s durch c, mache HF dem erhaltenen Quotienten $\frac{2s}{c}$ oder $\frac{s}{\frac{1}{2}c}$ gleich, suche wie vorher den Durchschnittspunkt A der Schenkel EC und FH, halbire AF in M, beschreibe aus M mit MA = MF einen Halbkreis ANF über AF, errichte in H eine Senkrechte HN auf AF und schneide dadurch den Kreis in N, trage die Sehne AN aus A nach AG und ziehe aus G die begehrte Theilungslinie GD parallel zu HC. Nach der jetzigen Bezeichnung ist auch $AG = \sqrt{a\left(a+\frac{2s}{c}\right)}$, wo aber AH = a und CI = c. Fig. 87.

Aufgabe und Beweis findet man §. 36. III.

XIII. Aufgabe. Neben CH Fig. 87., worauf zwey stark convergirende Schenkel CB und HK stehen, soll eine Parallele BK so geführt werden, daß das entstehende Trapez HCBK eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthält.

Erste Auflösung. Man suche den Vereinigungspunkt A der Schenkel CB und HK, fälle aus A die Senkrechte AR = a auf CH = c mache $AQ = \sqrt{s.\left(a-\frac{2s}{c}\right)}$, oder $RQ = RA - AQ = a - \sqrt{s.\left(a-\frac{2s}{c}\right)}$ und ziehe über Q die Parallele AK zu CH.

Zweyte Auflösung. Man fälle aus C die Senkrechte CI = c auf AH = a, mache in HA das Stück $HL = \frac{2s}{c}$, errichte in L die Senkrechte LP; halbire AH in O und schneide aus O mit dem Radius OA = OP die Senkrechte LP in P trage die Sehne AP nach AK und ziehe KB parallel zu HC,

Auch hier kann AK durch Rechnung aus der Formel $AK = \sqrt{a\left(a - \frac{2s}{c}\right)}$ berechnet werden, wo AH = a und CI = c gesetzt werden.

Beweis findet man im berührten §. 36. III.

Zusatz. Soll das Trapez KBDG durch eine Parallele CH so getheilt werden, daß der abgeschnittene Theil KBCH = $\frac{1}{3}$ und DGHC = $\frac{2}{3}$ der ganzen Fläche KBDG wird, so muß man zuvor den Inhalt = f □R. der ganzen Fläche suchen und sodann an die Linie KB = c eine Fläche KBCH = s = $\frac{1}{3}$ f legen, wo, wenn AQ = a gesetzt wird, $AR = \sqrt{a\left(a + \frac{2s}{c}\right)}$ gemacht werden muß. Oder man legt an die Seite DG eine Fläche GDCH = s = $\frac{2}{3}$ f, setzt DG = c und AT = a und berechnet AR aus der Formel $\sqrt{a \times \left(a - \frac{2s}{c}\right)}$.

XIV. Aufgabe. Zu einem Trapeze ABHG Fig. 199. Fig. 199. sind die beyden parallelen Seiten AB und GH, nebst ihr senkrechter Abstand IM gegeben, man soll darin eine oder mehre parallel Linien CD und EF so ziehen, daß die dadurch abgeschnitten Flächen eine gewisse Zahl □R. oder einen gewissen Theil der ganzen Fläche enthalten.

Erste Auflösung. 1) Wenn die an die Seite AB gelegte Fläche ABDC = s □R. werden soll, so setzt man AB = a, GH = b und IM = c, berechnet entweder den Werth der Linie CD = y aus der Formel $y = \sqrt{a^2 + \frac{(b - a)\,2s}{c}}$ und, wenn dieser bekannt ist, den Werth von IK = x aus der Formel

$$x = \frac{2s}{a + y},$$

oder man sucht den Werth der Formel $\frac{ac}{b + a} = p$ und berechnet x aus der Formel

$$x = -p \pm \sqrt{p.\left(p + \frac{2s}{a}\right)},$$

Fig. 199.

wo, wenn IK = x bekannt und aufgetragen ist, sodann über den Punkt K die begehrte Theilungslinie CD geführt werden kann.

Der Beweis ist §. 36. V. oder pag. 190. und folg. zu finden.

2) Soll an die Linie GH eine Fläche GHFE = s □R. angelegt werden, so setzt man GH = a, AB = b, und MI = c, berechnet entweder den Werth EF = y aus der Formel $y = \sqrt{a^2 - \frac{(a-b)2s}{c}}$ und wenn dieser bekannt ist, den Werth von ML = x aus der Formel

$$x = \frac{2s}{a + y},$$

oder man sucht zuvor den Werth des Quotienten $\frac{ab}{a-b} = q$ berechnet ML = x aus der Formel

$$x = q - \sqrt{q\left(q - \frac{2s}{a}\right)}$$

Diese Formeln sind von den vorigen in Nr. 1. nicht verschieden, wenn man bedenkt, daß + (b − a) = − (a − b) und q = − p oder p = − q und $p.\left(p + \frac{2s}{a}\right) = p^2 + \frac{2sp}{a} = q^2 - \frac{2sq}{a} = q.\left(q - \frac{2s}{a}\right)$ ist.

3) Soll ABHG in drey gleiche Theile getheilt werden, so muß man zuvor die ganze Fläche = f suchen, ABDC = s = $\frac{1}{3}$f und ABFE = s = $\frac{2}{3}$f oder GHFE = $\frac{1}{3}$f und GHDC = $\frac{2}{3}$f setzen, wo wenn AB = a, GH = b und IM = c und s = $\frac{1}{3}$f, sodann EF = y = $\sqrt{a^2 + \frac{(b-\ )2s}{c}}$;

der Werth $p = \frac{ac}{b-a}$ und IL = x =

$-p+\sqrt{p\left(p+\frac{2}{a}\right)}$ oder $x=\frac{2s}{a+v}$ ist.

4) Soll ABDC $=u$ □R. und CDFE $=v$ □R. werden, so wird die Fläche ABFE oder $s=u+v$ und IL $=x$ seyn.
Oder man kann auch GHFE $=f-u-v$ machen und hierzu ML $=x$ suchen.

Fig. 200. — 201. Zweyte Auflösung. Wenn Fig. 200 und Fig. 201. ein Trapez ABCD vorstellt, worin eine Theilungslinie EF parallel zu BA oder CD so gezogen werden soll, daß ABEF $=s$ □R. wird, so mißt man AB $=a$, dividirt s durch a, macht die auf AB errichtete Senkrechte GH $=$ dem erhaltenen Quotienten $\frac{s}{a}=m$, führt über H eine Parallele KL oder KI, welche die Schenkel BC und AD in K und L schneidet, mißt KL $=n$, sucht den Werth des Quotienten $p=\frac{s}{n-a}$ und berechnet GP $=x$ aus der Formel $x=-p+\sqrt{p.(p+2m)}$. In Fig. 201. setzt man lieber $p=\frac{s}{a-n}$ und $x=+p-\sqrt{p.(p-2m)}$.

Anmerkung. Wird in beyden Figuren FE $=y$ aus der Formel $y=\sqrt{a.(2n-a)}$ berechnet, so findet man GP $=x$ aus der Formel.

$$x=\frac{2s}{a+y}.$$

Zusatz. KL $=n$ kann auch aus AB $=a$, DC $=b$ und aus der Senkrechten GQ $=c$ durch die Formel $n=a+\frac{(b-a)m}{c}=a-\frac{(a-b)m}{c}$ berechnet werden. Denn es ist, wenn BO parallel zu AD gezogen wird, DO und KI $=a$; OC $=b-a$; IL $=n-a$ und in $\triangle$ OCB $\sim\triangle$ ILB ist

OC : QG $=$ IL : GH, nämlich

$(b-a):c=(n-a):\frac{s}{a}$ oder m,

woher $n - a = \frac{(b-a)}{c} \cdot \frac{s}{a} = \frac{(b-a).m}{c}$ Fig. 200. — 201.

und $n = a + \frac{(b-a).m}{c}$.

Den Beweis zur obigen und folgenden Verfahrungsart findet man zwar p. 195., es sind aber daselbst die Buchstaben ganz anders gewählt, weshalb wir ihn zur bessern Einsicht und Uebung nochmals geben.

In Fig. 200. ist $RE = y - a$ und in $\triangle BIL \sim \triangle BRE$ ist

$LI : HG = ER : PG$ oder

$(n - a) : \frac{s}{a} = (y - a) : x$, wo

1) $(n - a)\, x = \frac{s}{a}.(y - a$

Ferner ist $ABEF = (AB + FE)\frac{\times GP}{2}$ oder

$s = (a + y).\frac{x}{2}$, daher auch

2) $2s = (a + y)\, x$

Multiplicirt man die beyden Gleichungen Nr. 1 und Nr. 2. mit einander, so erhält man

$(n - a).2s.x = \frac{s}{a}.x.(y^2 - a^2)$,

wo $y^2 - a^2 = 2an - 2a^2$ und

$y = \sqrt{2an - a^2} = \sqrt{a.(2n - a)}$

Multiplicirt man die Gleichung Nr. 1. mit x und Nr. 2. mit $\frac{s}{a}$ und zieht die beyden Produkte:

$(n - a)\, x^2 = \frac{s}{a}.x\,(y - a)$ und

$\frac{2s^2}{a} = \frac{s}{a}\, x.(y + a)$ von einander ab, so erhält man

$(n - a)\, x^2 - \frac{2s^2}{a} = 2.s.x$, wo

Auflösung. Man theile sowohl die Seite AB als die gegenüberstehende Seite CD in n oder 3 gleiche Theile und ziehe zu den gemachten Theilungspunkten E und G, F und H die begehrte Theilungslinien EG und FH.

Denn man setze AE = EF = FB = a und CG = GH = HD = b und den senkrechten Abstand der Parallelen CD und AB nämlich IK = c, so ist jedes Trapez AEGC, EFHG, FBDH gleich groß, nämlich die Fläche eines jeden = $\frac{(a+b)c}{2}$ nach §. 36. I. Da nun diese drey gleichen Trapeze zusammen das vorgelegte Trapez ABDC ausmachen, so ist auch jedes einzelne Trapez AEGC oder EFHG = $\frac{1}{3}$ ABDC.

VII. Aufgabe. Es ist ein Trapez ABDC Fig. 197. Fig. 197. mit den parallelen Seiten AB und CD vorgelegt, man soll von einer Parallelen zur andern eine Theilungslinie EG so führen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche eine begehrte Zahl s □R. enthält, sondern auch AB zu AE sich verhält, wie CD zu CG.

Erste Auflösung. Man messe AB = a; CD = b, die Senkrechte IK = c, suche den Werth des Quotienten $\frac{2s}{(a+b)c}$ = m, mache AE = m.a und CG = m.b und ziehe von E nach G die Theilungslinie EG.

Zweyte Auflösung. Man suche den Durchschnittspunkt O der verlängerten Schiefen AC und BD, ziehe aus der Mitte L der Linie AC oder aus der Mitte N der Linie BD die Parallele LN zu CD, mache LM = $\frac{s}{IK}$ = $\frac{s}{c}$ und führe aus O über M die gerade Linie OGME, welche zugleich die begehrte Theilungslinie GE bildet.

Dritte Auflösung. Man messe oder berechne LN = $\frac{a+b}{2}$, setze, wie vorher, LM = $\frac{s}{c}$ und berechne AE und CG aus folgenden Proportionen:

LN : LM = AB : AE und
LN : LM = CD : CG.

Diese Aufgabe und der Beweis dazu ist schon §. 36. II. gegeben worden.

VIII. Aufgabe. Ein Dreyeck CAB Fig. 198. durch zu BC gezogene Parallellinien DE und FG in n oder 3 gleiche Theile zu theilen. Fig. 198.

Erste Auflösung. Man mache, weil $\triangle ADE = \frac{1}{n}$ oder $\frac{1}{3}$ und $\triangle AFG = \frac{2}{n}$ oder $\frac{2}{3}$ $\triangle ABC$ werden soll, $AD = AB \times \sqrt{\frac{1}{n}}$ oder $= AB \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{AB \times \sqrt{3}}{3}$ und $AF = AB \times \sqrt{\frac{2}{n}} = AB \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{AB \times \sqrt{6}}{3}$ und ziehe aus D und F die Parallelen DE und FG zu BC. Eben so ist $AE = AC \times \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $AG = AC \times \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Zweyte Auflösung und zwar durch Verzeichnung. Man beschreibe über AB aus der Mitte M einen Halbkreis AHKB und theile AB in so viele gleiche Theile als das $\triangle ABC$ getheilt werden soll, nämlich in 3 gleiche Theile, errichte aus den Theilungspunkten I und L senkrechte Linien IH und LK auf AB und schneide dadurch den Halbkreis in H und K, fasse die Sehnen AH und AK mit dem Zirkel und trage AH nach AD und AK nach AF und ziehe aus D und F die Parallelen DE und FG zu BC.

Zusatz. Soll daher $\triangle AFG = \frac{3}{4} \triangle ABC$ werden, so macht man $AF = AB \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{AB}{2} \times \sqrt{3}$ oder man macht $AL = \frac{1}{4} AB$ und trägt die zur Senkrechten LK gezogene Sehne AK aus A nach AF.

Der Beweis ist §. 34. II. gegeben.

Da $\sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{mn}{m^2}} = \frac{\sqrt{mn}}{n}$ und mn allzeit eine ganze Größe ist, so wird folgende Wurzel

Fig. 198. tafel uns im Theilen der Dreyecke wesentliche Dienste leisten.

$\sqrt{2}$	= 1,4142	$\sqrt{18}$	= 4,2426
$\sqrt{3}$	= 1,7321	$\sqrt{20}$	= 4,4721
$\sqrt{5}$	= 2,2361	$\sqrt{21}$	= 4,5816
$\sqrt{6}$	= 2,4495	$\sqrt{24}$	= 4,8990
$\sqrt{7}$	= 2,6458	$\sqrt{27}$	= 5,1962.
$\sqrt{8}$	= 2,8284	$\sqrt{28}$	= 5,2915.
$\sqrt{10}$	= 3,1623	$\sqrt{30}$	= 5,4772.
$\sqrt{12}$	= 3,4641	$\sqrt{32}$	= 5,6569
$\sqrt{14}$	= 3,7417	$\sqrt{35}$	= 5,9161
$\sqrt{15}$	= 3,8730	$\sqrt{40}$	= 6,3246

$\sqrt{42} = 6,4807.$

Daß $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = 2.\sqrt{5}$; $\sqrt{32} = \sqrt{16.2} = 4.\sqrt{2}$; $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4.\sqrt{3}$ ꝛc. ist, braucht nicht erinnert zu werden.

Nach dieser Tafel kann man nun leicht das $\triangle AFG = \frac{1}{7} \triangle ABC$ machen, wenn man $AF = AB \times \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{AB.\sqrt{5.7}}{7} = \frac{AB \times \sqrt{35}}{7} = \frac{5,9161}{7} \times AB = 0,8452 \times AB$ macht.

IX. Aufgabe. Zur Seite DE des Dreyeckes Fig. 70. ADE Fig. 70. eine Parallele BC so zu führen, daß das abgeschnittene Dreyeck ABC gerade s □R. enthalte

Erste Auflösung. Man messe $DE = c$ und die darauf aus A gefällte Senkrechte $AI = s$, mache in AI das Stück $AH = \sqrt{\frac{2s.s}{c}} = \sqrt{\frac{2s}{\frac{1}{2}c}}$ und ziehe über H die Parallele BC zu DE.

Zweyte Auflösung. Man messe $AD = s$ und die aus E darauf gefällte Senkrechte $EG = c$, mache in AD das Stück $ABC = \sqrt{\frac{2s}{\frac{1}{2}c}}$ und ziehe aus B die Parallele BC zu DE. Auch kann AC durch folgende Proportion gefunden werden:

$$AD : AB = AE : AC.$$

Dritte Auflösung. Man dividire mit der Senkrechten $EG = c$ in $2s$ oder mit $\frac{1}{2}c$ in s, mache

AK = dem erhaltenen Quotienten $\frac{2s}{c}$, beschreibe aus der Mitte M der Linie AD einen Halbkrtis ALD über AD, errichte aus K eine Senkrechte KL auf AD und schneide dadurch den Kreis in K, trage die Sehne AL nach AB und ziehe aus B die Parallele BC zu DE.

Der Beweis ist schon §. 34. II. gegeben.

X. Aufgabe. Auf eine Linie UE Fig. 88. stoßen zwey Schenkel EI und UW, welche nur wenig auseinander laufen, man soll zu EU eine Parallele HV so führen, daß die abgeschnittene Fläche EUVH sehr genau = s □R. werde. Fig. 88.

Erste Auflösung. Man messe UE = a und dividire s durch a, mache die auf UE errichtete Senkrechte $NQ = \frac{s}{a}$ Ruthen, ziehe über Q die Parallele WI = b zu UE, welche die Schenkel EX und UΩ in I und W schneidet, mache $NP = NQ \times \left(\frac{a+b}{2b}\right)$ und ziehe über P die begehrte Parallele VH zu UE.

Zweyte Auflösung. Man mache wie vorher, $NQ = \frac{s}{a}$ und ziehe über Q die Parallele WI zu UE und ferner auch aus E die Parallele EK zu UW, welche die erste in K schneidet. Nun halbire man EI in G und ziehe zu WG die Parallele KH aus K, so wird diese den Schenkel EX in H durchschneiden, aus welchem Punkte H die begehrte Theilungslinie HV parallel zu EU gezogen werden muß.

Aufgabe und Beweis findet man §. 36. IV.

XI. Aufgabe. Auf die Endpunkte einer Linie UE Fig. 88. stoßen zwey nur wenig zusammen laufende Scheitel EA und UR, man soll zu EU eine Parallele BS so ziehen, daß die dadurch abgeschnittene Fläche EUSB = s □R. werde. Fig. 88.

Erste Auflösung. Diese Aufgabe ist von der vorigen nicht verschieden und wird demnach eben so aufgelöst. Man dividirt nämlich mit UE = a in s.

Fig. 88. macht die auf UE errichtete Senkrechte NM $= \frac{s}{a}$ $= c$, mißt die über M zu UE geführte Parallele TC $= b$, welche die Schenkel EA und UR in C und T schneidet, berechnet NL $= x$ aus der Formel $x = c.\left(\frac{a+b}{2b}\right)$ und zieht über L die begehrte Theilungslinie SB $\#$ UE.

Zweyte Auflösung. Man mache, wie vorher NM $= \frac{s}{a}$ und ziehe zu UE die verlängerte Parallele TCF und aus E die Parallele EF zu UT, welche die erste in F schneidet, halbire EC in D und ziehe aus F die Parallele FB zu DT, welche den Punkt B des Schenkels EA schneidet, aus welchem die begehrte Theilungslinie BS parallel zu EU gezogen werden muß.

Der Beweis ist §. 36. IV. ebenfalls zu finden.

Zusatz. Soll UEHV $= \frac{2}{3}$ der Fläche UEXΩ werden, so muß man zuvor die ganze Fläche UEXΩ $= f$ suchen und entweder die Fläche UEHV $= s = \frac{2}{3}f$ nach voriger Aufgabe in X, oder ΩXHV $= s = \frac{2}{3}f$ nach dieser Aufgabe in XI. machen.

Fig. 87. XII. Aufgabe. Auf den Endpunkten einer Linie CH Fig. 87. sind zwey stark aus einander laufende Schenkel CE und HF errichtet, man soll von einem Schenkel zum andern eine Linie DG parallel zu CH so führen, daß das entstehende Trapez CHGD $= s$ □R. werde.

Erste Auflösung. Man verlängere die Schenkel CE und HF rückwärts bis zum Durchschnittspunkte A, fälle aus A auf CH die Senkrechte AR, messe AR $= a$ und CH $= c$, machen $AF = \sqrt{a\left(a+\frac{2s}{c}\right)}$ oder $RT = AT - AR = -a + \sqrt{a\left(a+\frac{2s}{c}\right)}$ und ziehe durch den Punkt T die begehrte Theilungslinie DG parallel zu CH.

Zweyte Auflösung. Man fälle aus C auf EH = a eine Senkrechte CI = c, dividire 2s durch c, mache HF dem erhaltenen Quotienten $\frac{2s}{c}$ oder $\frac{s}{\frac{1}{2}c}$ gleich, suche wie vorher den Durchschnittspunkt A der Schenkel EC und FH, halbire AF in M, beschreibe aus M mit MA = MF einen Halbkreis ANF über AF, errichte in H eine Senkrechte HN auf AF und schneide dadurch den Kreis in N, trage die Sehne AN aus A nach AG und ziehe aus G die begehrte Theilungslinie GD parallel zu HC. Nach der jetzigen Bezeichnung ist auch $AG = \sqrt{a\left(a+\frac{2s}{c}\right)}$, wo aber AH = a und CI = c. Fig. 87.

Aufgabe und Beweis findet man §. 36. III.

XIII. Aufgabe. Neben CH Fig. 87., worauf zwey stark convergirende Schenkel CB und HK stehen, soll eine Parallele BK so geführt werden, daß das entstehende Trapez HCBK eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthält.

Erste Auflösung. Man suche den Vereinigungspunkt A der Schenkel CB und HK, fälle aus A die Senkrechte AR = a auf CH = c mache $AQ = \sqrt{a.\left(a-\frac{2s}{c}\right)}$, oder $RQ = RA - AQ = a - \sqrt{a.\left(a-\frac{2s}{c}\right)}$ und ziehe über Q die Parallele AK zu CH.

Zweyte Auflösung. Man fälle aus C die Senkrechte CI = c auf AH = a, mache in HA das Stück $HL = \frac{2s}{c}$, errichte in L die Senkrechte LP; halbire AH in O und schneide aus O mit dem Radius OA = OP die Senkrechte LP in P trage die Sehne AP nach AK und ziehe KB parallel zu HC,

Auch hier kann AK durch Rechnung aus der Formel $AK = \sqrt{a\left(a - \frac{2s}{c}\right)}$ berechnet werden, wo AH = a und CI = c gesetzt werden.

Beweis findet man im berührten §. 36. III.

Zusatz. Soll das Trapez KBDG durch eine Parallele CH so getheilt werden, daß der abgeschnittene Theil KBCH = $\frac{1}{3}$ und DGHC = $\frac{2}{3}$ der ganzen Fläche KBDG wird, so muß man zuvor den Inhalt = f □R. der ganzen Fläche suchen und sodann an die Linie KB = c eine Fläche KBCH = s = $\frac{1}{3}$ f legen, wo, wenn AQ = a gesetzt wird, $AR = \sqrt{a\left(a + \frac{2s}{c}\right)}$ gemacht werden muß. Oder man legt an die Seite DG eine Fläche GDCH = s = $\frac{2}{3}$ f, setzt DG = c und AT = a und berechnet AR aus der Formel $\sqrt{a \times \left(a - \frac{2s}{c}\right)}$.

XIV. Aufgabe. Zu einem Trapeze ABHG Fig. 199. Fig. 199. sind die beyden parallelen Seiten AB und GH, nebst ihr senkrechter Abstand IM gegeben, man soll darin eine oder mehre parallel Linien CD und EF so ziehen, daß die dadurch abgeschnitten Flächen eine gewisse Zahl □R. oder einen gewissen Theil der ganzen Fläche enthalten.

Erste Auflösung. 1) Wenn die an die Seite AB gelegte Fläche ABDC = s □R. werden soll, so setzt man AB = a, GH = b und IM = c, berechnet entweder den Werth der Linie CD = y aus der Formel $y = \sqrt{a^2 + \frac{(b-a)\,2s}{c}}$ und, wenn dieser bekannt ist, den Werth von IK = x aus der Formel

$$x = \frac{2s}{a+y},$$

oder man sucht den Werth der Formel $\frac{ac}{b+a} = p$ und berechnet x aus der Formel

$$x = -p \pm \sqrt{p.\left(p + \frac{2s}{a}\right)},$$

Fig. 199.

wo, wenn IK $= x$ bekannt und aufgetragen ist, sodann über den Punkt K die begehrte Theilungslinie CD geführt werden kann.

Der Beweis ist §. 36. V. oder pag. 190. und folg. zu finden.

2) Soll an die Linie GH eine Fläche GHFE $=$ s □R. angelegt werden, so setzt man GH $= a$, AB $= b$, und MI $= c$, berechnet entweder den Werth EF $= y$ aus der Formel $y = \sqrt{a^2 - \frac{(a-b)2s}{c}}$ und wenn dieser bekannt ist, den Werth von ML $= x$ aus der Formel

$$x = \frac{2s}{a + y},$$

oder man sucht zuvor den Werth des Quotienten $\frac{ab}{a-b} = q$ berechnet ML $= x$ aus der Formel

$$x = q - \sqrt{q\left(q - \frac{2s}{a}\right)}$$

Diese Formeln sind von den vorigen in Nr. 1. nicht verschieden, wenn man bedenkt, daß $+(b-a) = -(a-b)$ und $q = -p$ oder $p = -q$ und $p.\left(p + \frac{2s}{a}\right) = p^2 + \frac{2sp}{a} = q^2 - \frac{2sq}{a} = q.\left(q - \frac{2s}{a}\right)$ ist.

3) Soll ABHG in drey gleiche Theile getheilt werden, so muß man zuvor die ganze Fläche $= f$ suchen, ABDC $= s = \frac{1}{3}f$ und ABFE $= s = \frac{2}{3}f$ oder GHFE $= \frac{1}{3}f$ und GHDC $= \frac{2}{3}f$ setzen, wo wenn AB $= a$, GH $= b$ und IM $= c$ und $s = \frac{1}{3}f$, sodann EF $= y = \sqrt{a^2 + \frac{(b-\ )2s}{c}}$, der Werth $p = \frac{ac}{b-a}$ und IL $= x =$

$-p+\sqrt{p\left(p+\frac{2}{a}\right)}$ oder $x=\frac{2s}{a+v}$ ist.

4) Soll ABDC $=u$ □R. und CDFE $=v$ □R. werden, so wird die Fläche ABFE oder $s=u+v$ und IL $=x$ seyn.
Oder man kann auch GHFE $=f-u-v$ machen und hierzu ML $=x$ suchen.

Fig. 200. — 201. Zweyte Auflösung. Wenn Fig. 200 und Fig. 201. ein Trapez ABCD vorstellt, worin eine Theilungslinie EF parallel zu BA oder CD so gezogen werden soll, daß ABEF $=s$ □R. wird, so mißt man AB $=a$, dividirt s durch a, macht die auf AB errichtete Senkrechte GH $=$ dem erhaltenen Quotienten $\frac{s}{a}=m$, führt über H eine Parallele KL oder KI, welche die Schenkel BC und AD in K und L schneidet, mißt KL $=n$, sucht den Werth des Quotienten $p=\frac{s}{n-a}$ und berechnet GP $=x$ aus der Formel $x=-p+\sqrt{p.(p+2m)}$. In Fig. 201. setzt man lieber $p=\frac{s}{a-n}$ und $x=+p-\sqrt{p.(p-2m)}$.

Anmerkung. Wird in beyden Figuren FE $=y$ aus der Formel $y=\sqrt{a.(2n-a)}$ berechnet, so findet man GP $=x$ aus der Formel.

$$x=\frac{2s}{a+y}.$$

Zusatz. KL $=n$ kann auch aus AB $=a$, DC $=b$ und aus der Senkrechten GQ $=c$ durch die Formel $n=a+\frac{(b-a)m}{c}=a-\frac{(a-b)m}{c}$ berechnet werden. Denn es ist, wenn BO parallel zu AD gezogen wird, DO und KI $=a$; OC $=b-a$; IL $=n-a$ und in △ OCB ∽ △ ILB ist

OC : QG $=$ IL : GH, nämlich

$(b-a):c=(n-a):\frac{s}{a}$ oder m,

woher $n - a = \frac{(b-a)}{c} \cdot \frac{s}{a} = \frac{(b-a) \cdot m}{c}$ Fig. 200. — 201.

und $n = a + \frac{(b-a)}{c} m$.

Den Beweis zur obigen und folgenden Verfahrungsart findet man zwar p. 195., es sind aber daselbst die Buchstaben ganz anders gewählt, weshalb wir ihn zur bessern Einsicht und Uebung nochmals geben.

In Fig. 200. ist $RE = y - a$ und in $\triangle BIL \sim \triangle BRE$ ist

$LI : HG = ER : PG$ oder

$(n - a) : \frac{s}{a} = (y - a) : x$, wo

1) $(n - a)\, x = \frac{s}{a} \cdot (y - a$

Ferner ist $ABEF = (AB + FE) \frac{\times GP}{2}$ oder

$s = (a + y) \cdot \frac{x}{2}$, daher auch

2) $2s = (a + y)\, x$

Multiplicirt man die beyden Gleichungen Nr. 1 und Nr. 2. mit einander, so erhält man

$(n - a) \cdot 2s \cdot x = \frac{s}{a} \cdot x \cdot (y^2 - a^2)$,

wo $y^2 - a^2 = 2an - 2a^2$ und

$y = \sqrt{2an - a^2} = \sqrt{a \cdot (2n - a)}$

Multiplicirt man die Gleichung Nr. 1. mit x und Nr. 2. mit $\frac{s}{a}$ und zieht die beyden Produkte:

$(n - a)\, x^2 = \frac{s}{a} \cdot x\, (y - a)$ und

$\frac{2s^2}{a} = \frac{s}{a} x \cdot (y + a)$ von einander ab, so erhält man

$(n - a)\, x^2 - \frac{2s^2}{a} = 2.s.x$, wo

Fig. 200. — 201. $x^2 - \frac{2sx}{n-a} - \frac{2s}{a}\cdot\frac{s}{(n-a)} = o.$

Nun sey der Quotient $\frac{s}{n-a} = p$ und $\frac{s}{a} = m$. so ist $x^2 - 2px - 2m.p = o$ und wenn hier $p^2 + 2mp = p.(p + 2m)$ auf beyden Seiten addirt wird, so ist

$x^2 - 2px + p^2 = p.(p + 2m)$, wovon die Wurzel:

$x - p = \sqrt{p(p+2m)}$ und endlich

$x = p + \sqrt{p(p+2m)}$.

In Fig. 201. ist a größer als n und mithin der Werth für $p = \frac{s}{n-a}$ negativ, weshalb

$x = -p + \sqrt{p(p-2m)}$, wenn nämlich

$q = \frac{s}{a-n}$ gesetzt wird.

Dritte Auflösung und zwar durch Verzeichnung. Man dividire, wie vorher, die hinzulegende Fläche ABEF $= s \square R$. durch $AB = s$, mache die auf AB errichtete Senkrechte GH = dem erhaltenen Quotienten $m = \frac{s}{a}$, führe über H die Parallele KL oder KI, ziehe auch aus B eine Parallele BI zu AK und schneide dadurch KL in I, errichte aus I eine Senkrechte IN, fasse LK mit dem Zirkel und schneide aus L mit dem Radius LK = LN die Senkrechte IN in N, trage IN nach KM in KL, ziehe aus M die Parallele ME zu KF und schneide dadurch den Punkt E des Schenkels BC, aus welchem die gesuchte Theilungslinie EF parallel zu BA gezogen werden muß.

Beweis. Da des Kreises Radius LK = n und die Abscisse KI = a, so ist die Ordinate $IN = \sqrt{a.(2n-a)} = KM = FE = y$, wie vorhin.

Anmerkung. Ist der *L* LEM sehr spitzig, so ist der Schnitt in E und die ganze Arbeit unzuverlässig.

XV. Aufgabe. Unter dem Winkel BCD Fig. 202. sind zwey Schenkel CD und CB vorgezogen, Fig. 202. man soll aus einem Punkte A, der außerhalb des Winkels gegeben ist, eine Linie AHI durch die Schenkel so führen, daß das dadurch abgeschnittene Dreyeck CHI eine vorausbestimmte Fläche = s □R. enthält.

Erste Auflösung. Man ziehe aus A die Parallele KAM zu CD und schneide dadurch den Schenkel CB in B, messe den senkrechten Abstand EF dieser Parallelen und auch die Parallele AB = d und EF = c Ruthen, suche den Werth des Quotienten $\frac{s}{c}$ = m und berechne CI = x aus der Formel:

$$x = m + \sqrt{m\,(m + 2d)}$$

Ist der Punkt I bekannt, so kann man dahin aus A die begehrte Theilungslinie AHI ziehen.

Zweyte Auflösung. Man mache AK = $\frac{s}{c}$ = m, errichte in A die Senkrechte AL auf BAK, fasse BK mit dem Zirkel und beschreibe damit aus B einen Kreisbogen KL, oder AL in L schneidet, trage AL nach AM, und KM nach CI, so findet man den Punkt I, wohin aus A die begehrte Theilungslinie AHI gezogen werden muß.

Den Beweis zu beyden Auflösungen findet man §. 34. VI.

Zusatz. AB kann auch aus der Proportion GF : CD = EG : AB berechnet werden.

XVI. Aufnabe. In GABE Fig. 94. eine Linie CH dergestalt zu ziehen, daß die abgeschnittene Fläche ABCH oder auch das Trapezoid GECH eine vorausbestimmte Zahl □R. enthält. Fig. 94.

Diese Aufgabe ist §. 37. II. zur Genüge gelöst.

XVII. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid PEDS Fig. 90. dessen Schenkel ED und PS nur wenig aus- Fig. 90.

einander laufen, vorgelegt, man soll darin eine Linie BQ so ziehen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche PEBQ einen vorausbestimmten Inhalt von s □R. erhält, sondern auch, wenn EG parallel zu PS gezogen wird, EU zu EG sich verhält, wie PQ zu PS.

Auch diese Aufgabe ist §. 37. III. oder p. 199. zur Genüge gelöst.

XVIII. Aufgabe. Im Trapezoide LAEN Fig. 91. Fig. 91., wo die auf AL errichteten Schenkel AE und LN nicht sehr zusammenlaufen, eine Theilungslinie SU so zu ziehen, daß nicht nur das abgeschnittene Trapezoid LASU eine begehrte Zahl s □R. erhält, sondern auch, weil die vorgelegte Fläche in AE breiter als in LR ist, der abgeschnittene Theil in AS verhältnißmäßig breiter, als in LQ oder LU werde.

Die Aufgabe ist p. 200. in der Anmerkung gelöst.

XIX. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid BFHE Fig. 92. Fig. 92. vorgelegt, man soll aus dem Punkte K, wo die verlängerten Seiten BF und EH zusammentreffen, eine Linie KGD durchs Trapezoid so führen, daß die abgeschnittene BFGD oder die Fläche EHGD eine begehrte Zahl s □R. enthält.

Auch diese Aufgabe ist §. 37. IV. gelöst.

Fig. 93. XX. Aufgabe. Es ist Fig. 93. ein Trapezoid BCFG vorgelegt, man soll in demselben eine Theilungslinie DE so ziehen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche BCDE oder die Fläche GFDE eine gewisse Zahl s □R. enthält, sondern auch CF zu CD sich verhält, wie BG zu BE.

Auch diese Aufgabe findet man §. 37. V. oder pag. 202. gelöst.

§. 59.

Theilung der einfachen krummlinigen Figuren durch gerade Linien.

Unter einfache krummlinige Figuren verstehen wir solche, welche nur flache, regelmäßige und nicht zu

zu lange Bögen mit einer einzigen Krümmung enthalten. Lange und stark einwärts oder auswärts gehende Bögen werden wie zusammengesetzte behandelt, wovon weiter unten die Rede seyn wird. Auch dann, wenn eine drey oder viereckige Figur mit unter auch gerade Linien enthält, wird sie zu den krummen gerechnet, wenn nur eine einzige Seite derselben krumm ist.

Bey Theilung der einfachen krummlinigen Figuren kommen nun folgende Aufgaben vor.

I. Aufgabe. Auf einer geraden Linie AB ist ein auswärts gehender Bogen BCD, wie in Fig. 203., oder ein einwärts gehender Bogen, wie in Fig 204. errichtet, man soll aus A zu einem Punkt I des Bogens eine solche Theilungslinie AI führen, daß die abgeschnittene Fläche BCIA eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthalte. Fig. 203 — 204.

Auflösung. Man messe AB = a, dividire 2s durch a, oder s durch $\frac{1}{2}$ a, mache die auf AB errichtete Senkrechte FE = dem erhaltenen Quotienten $\frac{2s}{a}$, ziehe aus E die Parallele EG zu AB und schneide dadurch den Bogen BCD in G, so wird schon das geradlinige △ ABG = s □R. und mithin in Fig. 203. die Fläche ABCG um den Abschnitt BGC zu groß und in Fig. 204. die Fläche ABCG um den Abschnitt BGC zu klein seyn. Man suche nach §. 45. die Fläche dieses Abschnittes BGC = u □R.; so ist in Fig. 203. das bogige △ ABCG = △ ABG + ⌓ BGC = s + u □R. und es muß daher von der Fläche ABCG ein △ GAI abgeschnitten werden, das so groß als der Abschnitt BGC = u □R. ist, wenn ABCI = s □R. werden soll. Dagegen ist aber in Fig. 204. die Fläche ABCG = △ ABG — ⌓ BGC = s — u und es muß daher zum bogigen △ ABCG ein geradliniges △ GIA von u □R. kommen, wenn ABCI wirklich = s □R. werden soll. Um nun in beyden Figuren das △ GAI = u □R. zu machen, ziehe man zum kleinen Bogen GI, welcher hier als eine gerade Linie angesehen werden kann,

einer Tangente GH, fälle darauf aus A die Senkrechte AH; dividire 2u durch AH und mache die Grundlinie $GI = \frac{2u}{AH}$, so wird das Dreyeck GIA wirklich = u □R. und demnach auch das bogige △ ABCI = s □R. seyn, wie begehrt wird.

II. Aufgabe. Auf einer geraden Linie AB
Fig. 205. stehen zwey parallele Senkrechte AC und BF Fig 205.
— 206. und 206. und von C nach F ist ein auswärts oder einwärts gehender Bogen CDEF gezogen, man soll eine Parallele HK zu CA oder BF so führen, daß die abgeschnittene Fläche ACDHK = s □R. werde.

Auflösung. Man mache, wie §. 58. XI., die auf AC errichtete Senkrechte CG oder $AI = \frac{s}{AC}$, ziehe über I oder G die Parallele IE oder IG, welche den Bogen in E schneidet, mache IG = AC oder führe aus C die Parallele CG zu AB, welche IG in G schneidet, mache die Sehnen CD und DE so ziemlich einander gleich oder theile den Bogen CE durch den Punkt D so ziemlich richtig in zwey gleiche Theile, ziehe aus G zu ID die Parallele GH, welche den Bogen CDEF in H schneidet und ziehe aus H die Theilungslinie HK parallel zu CA. Jetzt berechne man nun die abgeschnittene Fläche ACDHK und vergleiche sie mit s. □R., so wird man sie entweder ganz richtig, oder um wenige □R. zu klein oder zu groß finden. Ist nun.

1) die Fläche ACDHK richtig = s □R., so ist auch HK die richtige Theilungslinie. Ist aber

2) die Fläche ACDHK um wenige u □R. kleiner als s, so muß man rechts neben HK noch eine schmale Fläche von u □R. zuzulegen, im Gegentheile aber abzubrechen suchen, wenn die Fläche ACDHK um etwas zu groß seyn sollte. Dieß Zulegen oder Abbrechen der fehlenden oder überschüssigen u □R. geschieht nun nach folgenden Regeln.

Fig. 207. Angenommen, daß man in Fig. 207. schon eine Fläche NFCA = t. □R. angelegt habe, welche bey-

nahe s □ ist, und daß t um u □R. kleiner oder größer als s sey, so muß im ersten Falle der Fläche NFCA noch eine schmale Fläche ACKI zugelegt und im andern Falle von der Fläche NFCA noch eine schmale Fläche AGML abgeschnitten werden. Eine solche schmale Fläche von wenigen u □R. kann nun auf folgende Art leicht hingelegt werden.

1) Wenn u sehr klein, dagegen aber AC ziemlich lang ist, oder wenn der kurze Bogen CK oder CM zu AI oder AL beynahe parallel läuft, so findet man AI oder AL schon dadurch, daß man u durch AC dividirt, indem ACKI oder ACML wie ein Parallelogramm angesehen werden kann.

2) Liegt die Tangente CH des kurzen Bogens KCM sehr schief gegen BN und ist zu besorgen, daß die schmale Fläche schon ziemlich breit ausfällt, so wird der Durchschnittspunkt H der Tangente CH und der Abscissenlinie BN gesucht, AH = a und AC = c gemessen und wenn ACKI = u □R. werden soll, $HI = \sqrt{a\left(a + \frac{2u}{c}\right)}$, oder AI = HI − AH gemacht. Soll aber ACML = u werden, so muß man $HL = \sqrt{a\left(a - \frac{2u}{c}\right)}$ oder AL = AH − HL machen.

Die Gründe hierzu findet man §. 58. XII und XIII.

Auf dieselbe Art verfährt man auch, wenn der Bogen DCE einwärts und nicht wie der vorige Bogen FCG auswärts geht. Hat man nämlich schon bereits eine Fläche NDCA angelegt, welche nur noch um die schmale Fläche ACKI zu klein oder um ACML zu groß ist, so denkt man sich ebenfalls die Tangente CH gezogen und macht $HI = \sqrt{a\left(a + \frac{2u}{c}\right)}$ oder $HL = \sqrt{a\left(a - \frac{2u}{c}\right)}$.

III. Anmerkung. Ein Trapez ABCDEF Fig. 208. mit zwey gegenüber stehenden Bögen verwandelt man Fig. 208.

in ein anderes EGHID, welches nur einen Bogen HID hat, wenn man die Senkrechte GE auf DE oder AB und mehre Parallelen SP, IF, WT und HA zu DE zieht; AB in GH, TV in UW, FC in KI. PR in PS trägt und zu den äußern Punkten die krumme Linie HWISD führt. Schneidet man alsdann in diesem verwandelten Trapeze durch eine gezogene Theilungslinie QM eine verlangte Fläche GHOMG von s □R. nach voriger Anleitung ab, ist dieß zugleich auch die Theilungslinie NML fürs vorgelegte Trapez ABCDFF und ABNLA ebenfalls = s □R.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens überzeugt man sich, wenn man bedenkt, daß das schmale Trapez GHWU = ABVT; UWOM = TVNL; MOIK = LNCF; u. s. f. ist.

Gehen beyde Bögen AFB und BCD stark aus oder stark einwärts, so muß man die Figur wie eine zusammengesetzte behandeln.

Fig. 209. IV. Aufgabe. Ein Trapezoid ACEKHF Fig. 209. besteht aus zwey gegenüber stehenden geraden Seiten FA und KE und zwey krummen Seiten ACE und FHK, man soll aus dem Punkte Q, wo die verlängerten Gräden sich schneiden, eine Theilungslinie QBG oder QDI dergestalt ziehen, daß die dadurch abgeschnittene Fläche FABG oder FABCDIHG eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthält

Auflösung. Man verwandele, wie jetzt sogleich gezeigt werden soll, das bogige Trapezoid ACEKHF in ein bogiges Dreyeck QLMNOP dergestalt, daß zwischen den Schenkeln QF und QG die Fläche des Dreyeckes LQM = der Fläche des Trapezoides FABG; zwischen den Schenkeln QG und QH das △ MQN = □ GBCH; ferner △ NQS = □ HCRT; △ SQO = □ TRDI und △ OQP = □ IDEK wird, ziehe im bogigen Dreyecke QLMNOP eine Theilungslinie QM oder QO nach I. dergestalt, daß die abgeschnittene Fläche LMQ oder LMNOQ = s □R. werde, so werden diese Theilungslinien QBMG oder QDOI, wenn sie gehörig verlängert werden, zu-

gleich auch vom vorgelegten bogigen Trapezoide eine Fig. 209.
Fläche FABG oder FABDIHGF von = □R. ab-
schneiden.

Die Verwandlung selbst geschieht, wenn man QA = a und QF = b mißt und QL = x aus der Formel $x = \sqrt{(b+a)(b-a)}$ berechnet. Setzt man QB = a und QG = b, so findet man QM = x aus derselben Formel. Eben so findet man QN = x aus QC = a und QH = b; und QO = x aus QD und QI und endlich QP aus QE und QK. Nachdem man die Punkte L, M, N, O, P in den Strahlen QL, QM, QN ꝛc. berechnet hat, so zieht man über diese gefundenen Punkte die begehrte krumme Linie LMNOP zum Dreyecke LNPQ aus freyer jedoch mit fester Hand.

Beweis. Denkt man sich aus dem Punkte Q lauter unendlich nahe gezogene Strahllinien QH und QT, so muß überall zwischen zwey solcher Strahlen das △ NQS = Viereck HCRT werden. Man sehe QH, QN, QC als Grundlinien der Dreyecke QHT; QNS und QCR an, setze wie vorher, QH = b; QN = x und QC = a, und setze ferner die Höhe in HT = mb, so wird die Höhe in NS = mx und in CR = ma seyn, weil QH : HT = QN : NS = QC : CR oder b : mb = x : mx = a : ma ist. Da nun $\triangle QHT = QH \times \frac{HT}{2} = \frac{b.mb}{2} = \frac{mb^2}{2}$; $\triangle QNS = \frac{1}{2} QN \times NS = \frac{x\,mx}{2} = \frac{mx^2}{2}$ und $\triangle QCR = \frac{ma^2}{2}$, so ist auch Viereck HCRT $= \triangle HQT - \triangle CQR = \frac{mb^2}{2} - \frac{ma^2}{2} = \frac{m}{2}(b^2 - a^2)$ und weil △ NQS = Viereck HCRT werden soll, so folgt aus der Gleichung $\frac{mx^2}{2} = \frac{m}{2}(b^2 - a^2)$ der Werth von $x = \sqrt{(b^2 - a^2)} =$

$\sqrt{(b+a)(b-a)}$. Würde man neben einen jeden andern Strahl QF einen unendlich nahen aus Q ziehen, QF = b, QL = x und QA = a setzen, so würde man auf dieselbe Art finden, daß auch QL = x = $\sqrt{(b+a)(b-a)}$ ist. Da nun überall zwischen je zwey Strahlen QF und QG das △ LQM = □ FABG ist so wird, wenn LQM = s ist, auch □ FABG = s □R. seyn. Werden daher durch die gezogene Theilungslinie QBMG vom Dreyecke s □R. abgeschnitten, so hält das inliegende Viereck FABG ebenfalls auch s □R.

X. Aufgabe. Es ist ein Abschnitt ABD Fig. 210. mit einem regelmäßigen Bogen BCDEA vorgelegt, man soll zur Sehne BA eine Parallele CE so führen, daß die abgeschnittene Fläche ECD = s □R. wird. Fig. 210.

Auflösung. Man messe die Sehne AB = b und die höchste Höhe GD = c des Abschnittes und berechene nach §. 33. III. den Radius = a des Bogens aus der Formel $a = \frac{b^2}{4c} + c$ und suche den Werth der Formel $w = \sqrt[3]{\left(\frac{3s}{\sqrt{6}a^2}\right)^2}$, und mache $DF = 2a.\left[w + \frac{1.w^2}{5} + \frac{22w^3}{5.^27} + .\right]$, so wird die über F geführte Parallele EC die verlangte Fläche ECD = s □R. abschneiden.

Ist der Abschnitt schmal, so kann man bloß $DF = \sqrt[3]{\frac{3^4s^2}{32.a}}$ setzen.

Den Grund zu diesen Formeln findet man pag. 513. ꝛc. und p. 159.

VI. Aufgabe. Es ist der Mittelpunkt C und der Radius CB = CH = a zu einem Abschnitte DIHFB Fig. 24. nebst der Entfernung CA eines Punktes A (außerhalb des Kreises) vom Mittelpunkte C gegeben oder berechnet, man soll aus A eine Thei- Fig. 24.

lungslinie AKI durch den Abschnitt so führen, daß die abgeschnittene Fläche FIH = s □R. werde.

Diese Aufgabe mit der Auflösung findet man pag. 316.

VII. Anmerkung. Wie man krummlinige Figuren mit stark aus- oder einwärts gehenden und zusammengesetzten Bögen behandelt und wie man alle Theilungen mit gehöriger Vorsicht verrichten müsse, soll beym Theilen der zusammengesetzten Figuren umständlicher nachgewiesen werden.

§. 60.

Theilung der krummlinigen Figuren durch krumme Linien.

I. Aufgabe. Ein Trapez ACEKHF Fig. 211. enthält zwey gerade parallele Seiten AF und EK und zwey gegenüber stehende krumme Seiten ACE und FHK, man soll krumme Theilungslinien LNP und QSU dergestalt führen, daß nicht nur jeder Theil ACEPNL; LNPUSQ und QSUKHF eine vorausbestimmte Zahl □R. enthält, sondern auch diese Theile in AL schmäler als in EP ausfallen, weil auch die vorgelegte Figur in AF schmäler als in EK ist. Fig. 211.

Auflösung. Man ziehe mehre Parallellinien CH, BG und DI zwischen AF und EK und, wenn

1) die ganze Figur in n oder 3 gleiche Theile getheilt werden soll, so theile man alle diese Parallellinien ebenfalls in n oder 3 gleiche Theile, wodurch man die Punkte L und Q in AF, die Punkte M und R in BG; N und S in CH, u. s. f. zu den verlangten Theilungslinien LMNOP und QRSTU erhält. Soll aber

2) ein solcher Theil ACEPNL eine vorausbestimmte Zahl s □R. enthalten, so muß man nach §. 45. zuvor die Fläche f der ganzen Figur ABCDEKIHGF und den Werth des Quotienten $\frac{s}{f} = m$ suchen und

dann AL = m.AF; BM = m.BG; CH = m.CH; DO = m.DI und EP = m.EK machen und zu den gefundenen Punkten L, M, N, O, P die begehrte krumme Theilungslinie LMNOP ziehen.

Beweis. Wenn überall zwischen je zwey unendlich nahe gezogenen Parallelen CH und VZ der Theil VZHC der ganzen Fläche zum Theil VWNC der hinzulegenden Fläche sich verhält, wie f zu s, so wird sich auch BGHC zu BMNC wie f zu s, und AFHC zu ALNC und ACEKHF zu ACEPNL wie f zu s verhalten, und wenn in der Proportion

ACEKHF : ACEPNL = f : s

das erste Glied ACEKHF = dem dritten Gliede f ist, so wird auch das zweyte Glied ACEPNL = dem vierten s seyn. (Man vergleiche damit §. 106. Nr. 10. des ersten Bandes der allg. Math.)

Liegen aber die Parallelen VZ und CH unendlich nahe, so können die Flächen VZHC und VWNC als Parallelogramme angesehen werden und es ist, wenn VW = x, WZ = a und der Abstand WN = c gesetzt wird, das Parallelogramm VWCN = x.c, und weil die Proportion

VZHC : VWNC = f : s

Statt finden soll, so wird auch

ac : xc = f : s seyn

aus welcher Proportion der Werth von

$$x = \frac{a.s}{f} \text{ folgt.}$$

Nun setze man den Werth des Quotienten $\frac{s}{f} = m$, so $x = a.m = ma$.

Wird neben AF eine unendlich nahe Parallele gezogen und AL = x und AF = a gesetzt, so findet man auf demselben Wege

x = m.a nämlich

AL = m. AF, und eben so ist

BM = m. BG, u. s. f.

Fig. 212. II. Aufgabe. Es ist Fig. 212. ein Dreyeck ACEIGFA mit einer geraden und zwey krummen Sei-

ten vorgelegt, man soll aus A bogige Theilungslinien Fig. 212.
AKLMN und AOPQR so führen, daß nicht nur die abgeschnittenen Flächen ACENLA und ALNRPQA eine vorausbestimmte Zahl □R. enthalten, sondern auch, wenn Parallellinien CG zu EI gezogen werden, EI : EN = CG : CL ist.

Auflösung. Wenn die einzeln abgeschnittenen Flächen = $\frac{s}{f}$ oder $\frac{1}{n}$ der ganzen Fläche ACEIGFA werden soll, so theilt man alle zu EI gezogene Parallellinien in drey gleiche Theile und zieht wie vorher, in diese Theilungspunkte AKLMN und AOPQR. Soll aber die abgeschnittene Fläche ACENLKA = s □R. werden, so sucht man zuvor die ganze Fläche des vorgelegten krummlinigen Dreyeckes ACEIGFA = f, und den Werth des Quotienten $\frac{s}{f}$ = m und macht sodann EN = m. EI; DM = m. DH; CL = m. CG; BK = m. BF und führt über die gefundenen Punkte AKLMN die begehrte krumme Theilungslinie.

Der Grund zu dieser Verfahrungsart ist derselbe, wie in I.; indem alle einzelne Trapeze BKLC, welche zwischen sehr nahe Parallelen BF und CG und über der Theilungslinie KL liegen, = $\frac{s}{f}$ des ganzen Trapezes BFGC sind, und mithin auch alle Trapezien zusammen, welche über der Linie AKLMN liegen, = $\frac{s}{f}$ der ganzen Fläche ACEIGA seyn müssen.

III. Aufgabe. In einem Dreyecke AGEC Fig. 213. Fig. 213., welches zwey gerade und eine krumme Seite enthält, soll eine krumme Theilungslinie HKB parallel zur krummen GEC so gezogen werden, daß das abgeschnittene Dreyeck AHKB = $\frac{m}{n}$ der ganzen Fläche AGEC oder = s □R. werde.

Fig. 213. Auflösung. Man ziehe aus A mehre Strahlen AF; AE und AD und mache $AH = AG \times \sqrt{\frac{m}{n}}$; $AI = AF \times \sqrt{\frac{m}{n}}$; $AK = AE \times \sqrt{\frac{m}{n}}$ und $AB = AC \times \sqrt{\frac{m}{n}}$ und ziehe über die gefundenen Punkte H, I, K, B die begehrte Theilungslinie. Soll aber das $\triangle$ AHIKB $= s$ □R. werden, so muß man zuvor die Fläche des vorgelegten Dreyeckes AGFEDC $= f$ □R. und den Werth der Formel $\sqrt{\frac{s}{f}} = p$ suchen und dann $AH = p.\ AF$; $AK = p.\ AE$ u. s. f. machen.

Beweis. Man denke sich aus A unendlich nahe gezogene Strahlen AM und AE und dadurch die vorgelegte Figur in lauter schmale Dreyecke abgetheilt, so wird jedes Dreyeck NKA, welches über der Theilungslinie NK liegt, $= \frac{s}{f}$ des zugehörigen ganzen Dreyeckes MEA werden müssen, und wenn alle Dreyecke HIA; IKA; KLA und LBA, welche über HIKB liegen, $= \frac{s}{f}$ der zugehörigen ganzen Dreyecke GFA; FEA; EDA und DCA sind, so wird auch die ganze Fläche AHIKLB, welche über der Linie HIKB liegt $= \frac{s}{f}$ der ganzen vorgelegten Fläche AGFEDC seyn.

Ist aber AM an AE unendlich nahe, so können wir die Dreyecke ANK und AME als einander ähnlich ansehen, und setzen wir $AM = a$ und $AN = pa$, so gilt folgende Proportion:

$\triangle$ ANK : $\triangle$ AME $= AN^2 : AM^2$

nämlich $\triangle$ ANK : $\triangle$ AME $= p^2a^2 : a^2$.

Nun soll auch nach oben, $\triangle$ ANK : $\triangle$ AME $= s : f$ seyn, daher auch

$p^2a^2 : a^2 = s : f$, wo

$p^2 f = s$ und

$p = \sqrt{\frac{s}{f}}$ und $AN = p.a = p.$ AM.

Eben so ist auch $AH = p.$ AG; $AI = p.$ AF, ꝛc.

Anmerkung. Wird $AE = a$ und $AK = ma$, $\triangle AEM = u$ □R. gesetzt, so ist $\triangle AKN = m.^2 u$, weil $AE^2 : \triangle AEM = AK^2 : \triangle AKN$ nämlich $a^2 : u = m^2a^2 : \triangle AKN$ und mithin $\triangle AKN = m^2u$ ist.

IV. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid ABCNLI Fig. 214. mit zwey graden fast parallel laufenden, und zwey gegenüber stehenden krummen Seiten vorgelegt, man soll eine krumme Theilungslinie DEFGH so führen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche AKCHFD $= s$ □R. werde, sondern auch AI : AD $=$ BL : BE $=$ CN : CH sey. Fig. 214.

Auflösung. Man ziehe aus A und C Linien AK und CM, welche zu einander parallel laufen und ungefähr die Winkel IAK und NCM einander gleichmachen, suche die Fläche des krummlinigen Trapezes ABCMLK $= u$ und die Fläche der anliegenden Dreyecke KAI $= v$ und MCN $= w$, suche die Summe dieser Dreyecke $v + w = k$ und den Werth Bruchs $m = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4ks}}{2k}$, mache AD $=$ m. AI; AE $=$ m. AK; BF $=$ m. BL; CG $=$ m. CM und CH $=$ m. CN und ziehe über die gefundenen Punkte D, E, F, G, H die begehrte krumme Theilungslinie.

Beweis. Wenn ABCMLK $= u$, so ist (nach I.) ABCGFE $= mu$, und wenn $\triangle$ IAK $= v$ und $\triangle$ NCM $= w$, so ist (nach III) $\triangle$ DAE $= m^2v$ und $\triangle$ GCH $= m^2w$ und da $\triangle$ DAE + □EABCGF + $\triangle$ GCH = □ DABCHGFE, so ist auch

$m^2v + mu + m^2w = s$ oder

$m^2(v + w) + mu = s$, oder

$m.^2k + mu = s$

Entwickelt man nun aus dieser quadratischen Gleichung den Werth für m, so erhält man

$$m = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4ks}}{2k}$$

und daß AD = m. AI; AE = m. AK, u. s. seyn soll, liegt schon in der Bedingung der Aufgabe.

V. Aufgabe. Ein krummliniges Trapezoid Fig. 215. ABCIHG Fig. 215., dessen zwey gerade Seiten GA und IC sehr schief gegen einander liegen, durch eine krumme Theilungslinie DEF, wie vorher, so zu theilen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche CBADEF = s □R. werde, sondern sehr richtig auch AG : AD = BH : BE = CI : CF sey.

Auflösung. Man suche den Durchschnittspunkt K der verlängerten Schenkel GA und IC, messe KA = a; KG = b, setze KD = x und die ganze Fläche ABCIHG = f und berechne x aus der Formel

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{s}{f} \cdot (b^2 - a^2)}.$$

Wird in dieser Formel KB = a und KH = b, gesetzt, so findet man daraus KE = x, und eben so findet man AF = x, wenn KC = a und KI = b gesetzt wird. Sind die Punkte D, E und F bekannt, so kann man auch die begehrte Theilungslinie DEF ziehen.

Beweis. Man setze in den ähnlichen Dreyecken KHN; KEM und KBL (wo KN unendlich nahe an KH liegt) die Höhe HN = mb, so ist EM = mx und BL = ma; $\triangle$ HKN = $\frac{b.mb}{2} = \frac{mb^2}{2}$; $\triangle$ EKM = $\frac{mx}{2}$ und $\triangle$ BKL = $\frac{ma^2}{2}$; Trapez HBLN = $\triangle$ HKN − $\triangle$ BKL = $\frac{mb^2}{2} - \frac{ma^2}{2} = \frac{m}{2} \times (b^2 - a^2)$; Trapez EBLM = $\triangle$ EKM − $\triangle$ BKL = $\frac{mx^2}{2} - \frac{ma^2}{2} = \frac{m}{2} (x^2 - a^2)$. Wenn nun alle Trapeze EBLM welche zwischen zwey Schenkel KH

und KN und über der Theilungslinie DEF liegen, Fig. 225
$= \frac{s}{f}$ des zugehörigen ganzen Trapezes HBLN zwischen denselben Schenkeln sind, so wird auch die Fläche ABCFED $= \frac{s}{f}$. ABCIHG $= \frac{s}{f}$. f $=$ s seyn.

Es folgt aber aus EBLM $= \frac{s}{f}$. HBLN nämlich aus $\frac{m}{2}(x^2 - a^2) = \frac{s}{f}$. $(b^2 - a^2)$. $\frac{m}{2}$, der Werth von $x = \sqrt{a^2 + \frac{s}{f}(b^2 - a^2)}$.

Anmerkung. Ist ein Trapezoid GHIFED von f □R. vorgelegt und soll man an dieses noch ein anderes DEFCBA von u □R. anlegen, dergestalt, daß GD : DA $=$ IF : FC ist, so wird KD $=$ a und KG $=$ b gemessen und KA $=$ x aus der Formel

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{s}{f}(b^2 - a^2)}$$

berechnet. Setzt man in dieser Formel KE $=$ a und KH $=$ b, so findet man KB $=$ x, u. s. f. KC $=$ x aus KF $=$ a und KI $=$ b.

Denn es ist hier, wenn HN $=$ mb gesetzt wird, EM $=$ am und BL $=$ mx; △ KHN $= \frac{b.mb}{2} = \frac{mb^2}{2}$; △ KEM $= \frac{m.a^2}{2}$ und △ KBL $= \frac{mx^2}{2}$, daher Trapez HEMN $= \frac{m}{2} \times (b^2 - a^2)$ und Trap. EBLM $= \frac{m}{2}(a^2 - x^2)$ und weil $\frac{m}{2}(b^2 - a^2) : \frac{m}{2}(a^2 - x^2) = f : s$ seyn soll, so ist $a^2 - x^2 = \frac{s}{f}(b^2 - a^2)$ und

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{s}{f}(b^2 - a^2)}.$$

Fig. 216. VI. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid ABGF[illegible] Fig. 216. vorgelegt, wo nicht nur die zwey ge[illegible] über stehenden Seiten ABC und FED, sondern [illegible] eine oder auch die beyden übrigen Seiten AGD [illegible] AHD und CIF oder CKF Bögen sind, man soll [illegible] Theilungslinie PQR oder SIU so ziehen, daß [illegible] abgeschnittene Fläche ABCRQP oder die Fläche ABCUTS = a □R. werde.

Auflösung. Man sehe zuerst AD und CF [illegible] gerade Linien an und lege darin nach voriger Anl[eitung] eine Fläche ABCOVN von s □R. an. Ist n[illegible] ABCOVG um NAG und OCK zu groß, so muß ei[ne] Fläche GVKROP abgeschnitten werden, welche = NAG + OCK ist. Ist aber ABCIVH um NAH [illegible] OCI = u □R. zu klein, so muß noch eine Fläch[e] HVICTS von u □R. zugelegt werden. Dieß [illegible] [illegible] oder Zulegen einer Fläche geschieht, wen[n] man die Trapezoide PGL und RKM oder HSW u[nd] [illegible] [illegible] und die Fläche GVKROP aus Trapezoi[d] GVKMFEDL [illegible] oder die Fläche HVICTS vo[m] Trapezoide HV.TEW nach voriger Anleitung a[b]schneidet.

VII. Anmerkung. Sehen die Bögen AGD un[d] CKF [illegible] [illegible]

[illegible]

X. [illegible]

[illegible]

[illegible]

Theilungslinien IK, LM, NO, PQ, welche parallel zu CF gezogen werden, in n oder 5 gleiche, oder auch in Theile AIK; KILM; LMNO ꝛc. vom begehrten Inhalte theilen. Fig. 212.

Auflösung. Man ziehe aus jeder Ecke B, D und E der vorgelegten Figur Parallellinien BG; DH und EZ zu CF und theile dadurch die ganze Figur in lauter Dreyecke und Trapeze als ABG; GBCF; FCDH und HDE ein, ziehe die Senkrechte AZ auf EZ oder auf CF, messe ARS; SU; UY und UZ und die Parallelen BG; CF; DH, und berechne den Flächeninhalt der einzelnen Dreyecke und Trapeze, als $\triangle ABG = \frac{1}{2} BG \times AS$; $\square GBCF = \frac{1}{2} (GB + CF) \times SU$; $\square FCDH = \frac{1}{2} (FC + HD) \times UY$ und $\triangle HDE = \frac{1}{2} HD \times YZ$; suche den Inhalt der ersten zwey Flächen zusammen, nämlich die Fläche ABCFA; den Inhalt der drey ersten Flächen zusammen, nämlich die Fläche ABCDEHFA und endlich den Inhalt aller Flächen zusammen, so wird die letzte Summe den Inhalt = f der ganzen Fläche ABCDEFA vorstellen, welche man zur Vorsicht auch noch auf einem andern Wege berechnen und mit f vergleichen muß.

Wenn nun die ganze Fläche in 5 gleiche Theile getheilt werden soll, so muß auch jeder Theil = $\frac{1}{5}$ f □R. und zwar AIK = $\frac{1}{5}$ f; ABLMA = $\frac{2}{5}$ f; ABCNOFA = $\frac{3}{5}$ f; ABCPQFA = $\frac{4}{5}$ f ꝛc. werden. Soll aber der erste Theil AIK = p □R., der zweyte KILM = q, der dritte MLNO = s; der vierte ONPQ = u und der fünfte QPDE = v □R. werden, so muß p + q + s + u + v = f seyn und dann ist ABLMA = p + q; ABCNOFA = p + q + s; ABCPQF = p + q + s + u.

Um nun die erste Theilungslinie IK zu ziehen, muß man bedenken, daß die Fläche p □R. des ersten Theiles AIK kleiner als △ ABG ist und daß man daher im Dreyecke ABG eine Parallele IK zu BG so zu ziehen hat, daß die abgeschnittene Fläche AIK = p □R. werde. Da nun AS = h und BG = a

Fig. 217. schon gemessen sind, so finden wir AR = x durch die Formel $x = \sqrt{\frac{2hs}{a}}$, vermöge §. 58. IX.

Um die zweyte Theilungslinie LM im Trapeze GBCF zu ziehen, muß man entweder die Fläche GBLM oder die Fläche FCLM berechnen. Die erste Fläche GBLM ergiebt sich, wenn man von ABLMA = p + q das △ ABG subtrahirt, und die zweyte Fläche FCLM erhält man, wenn man von ABCFA die Fläche ABLM = p + q subtrahirt. Nun haben wir §. 58. X., XI., XII., XIII. und XIV. gelernt, wie man zu BG oder zu CF eine Parallele LM so ziehen könne, daß die abgeschnittene Fläche GBLM oder FCLM wirklich die begehrte Anzahl □R. enthält, es wird daher auch, wenn die Linie LM nach der dortigen Anleitung richtig gezogen wird, KILM = q □R. werden.

Die dritte Theilungslinie NO, welche ins Trapez FCDH fällt, wird auf dieselbe Art gezogen, wenn man zuvor die abzuschneidende Fläche FCNO = (p + q + s) — ABCFGA berechnet. Sollte aber FH ∥ zu CD laufen, so kann man auch NO nach §. 58. II, ziehen.

Die vierte Theilungslinie PQ fällt in dasselbe Trapez HDCF und schneidet darin die Fläche HDPQ = ABCDHFGA — (p + q + s + u) ab.

Der fünfte Theil QPDE muß von selbst = v □R. werden.

Anmerkung. Wären manche Seiten AB oder BC, CD ꝛc. der vorgelegten Figur bogig, so würde man beym Theilen derselben der Hauptsache nach auf dieselbe Art verfahren, nur müßte man die Theilungslinien IK, LM, ꝛc. welche in ein bogiges Dreyeck oder Trapez fallen, nach §. 59. II. ziehen.

II. Aufgabe. Man soll die Fläche ABCDEFA
Fig. 217. Fig. 217. durch eine gezogene Linie C^zD^z welche parallel zu AZ läuft, in zwey gleiche Theile theilen.

Auflösung. Man ziehe aus den Ecken A und E die Parallellinien AA^z und XE, welche dem Augenmaaße noch am nächsten an der zu ziehenden Theilungs-

lungslinie C^1D^1 zu liegen kommen, berechne den Theil AA^1DCB der vorgelegten Figur, ingleichen auch die übrigen Theile AA^1EX und XEF, addire diese drey Theile und sehe zu, ob die Summe mit der Fläche f der ganzen Figur übereinstimmt; wo nicht, so ist ein Fehler in der Arbeit, welchen man sogleich aufsuchen und verbessern muß. Hat man nun die Fläche der einzelnen Theile richtig gefunden, so dividirt man f durch 2, denkt sich C^1FED^1 oder $C^1D^1DCBA = \frac{f}{2}$ und subtrahirt XFE von $\frac{f}{2}$, so wird man die Fläche XED^1C^1 durch □R. ausgedrückt finden, welche man im Trapeze XEA^1A durch die Theilungslinie D^1C^1 (und zwar ebenfalls nach §. 58. X. bis XIII.) abschneiden kann.

Ist die Theilungslinie C^1D^1 gezogen, so kann man ferner jeden Theil C^1D^1DCBA und $C^1D^1EFC^1$ durch gezogene Senkrechte IR, LT ꝛc. wieder in 5, 10 und 20 gleiche Theile nach I theilen, dergestalt, daß man jedes Forstrevier in 40 bis 80 gleiche Jahresschläge eintheilen kann, wovon 20 oder 40 über — und eben so viele Theile unter der Hauptlinie C^1D^1 liegen.

III. Aufgabe. Eine Waldwand ABGDEF Fig. 217. besteht aus mehren Bestandsflächen, und zwar ist der erste Bestand ABG = 16 Morgen groß gefunden und daselbst der Morgen zu 8 Klftr. Holzertrag abgeschätzt worden, dagegen ist der zweyte Bestand GBCF = 15 Morgen und der Morgen auf 10 Klftr. geschätzt, der dritte Bestand FCDH hält 14 Morgen und der Morgen ist zu 12 Klftr. und endlich der vierte Bestand HDE ist 10 Morgen groß und der Morgen daselbst auf 10 Klftr. künftigen Holzertrag abgeschätzt. Man soll die ganze Waldfläche in fünf solche Jahresschläge AIK; KILM; MLNO; ONPQ und QPE eintheilen, daß auf jedem Jahresschlage gleichviel Holz gewonnen wird. Fig. 217.

Fig. 217. Diese Aufgabe ist einerlei mit der folgenden: Ein Feldbezirk ABCDEF besteht aus mehren besondern Flächen von verschiedener Größe und Güte. Die erste Fläche ABG hält 16 Morgen,
die zweyte GBCF ist = 15 Morgen
die dritte FCDH ist = 14 Morgen und
die vierte HDE ist = 10 Morgen;
der Morgen der ersten Fläche ist 8 fl. werth,
= = = zweyten = = 10 = =
= = = dritten = = 12 = =
= = = vierte = = 10 = =
Man fragt, wie man das ganze Grundstück in fünf solche Theile theilen könne, daß jedes Grundstück gleichviel werth sey?

Auflösung. Der Werth
der ersten Fläche ist = 16 × 8 = 128 fl.;
= zweyten = = = 15 × 10 = 150 =;
= dritten = = = 14 × 12 = 168 =
= vierten = = = 10 × 10 = 100 =
und mithin ist das ganze Grundstück so viel als die Summe 546 fl. werth. Nun soll das ganze Grundstück nach dem Werthe in 5 gleiche Theile getheilt werden, es muß daher jeder Theil AIK; KILM; MLNO u. $\frac{546}{5}$ = 109,2 fl. werth seyn. Hieraus folgt, daß der Werth von zwey Theilen zusammen (nämlich von AILMK) = 2 × 109,2 = 218, 4 fl.; der Werth von AILNOMK = 3 × 109,2 = 327,6; von AILNPQOMK = 436,8 und der Werth von allen fünf Theilen zusammen = dem Werthe 546 fl. der ganzen Fläche sey. Da △ AIK im Werthe = 109,2 fl. werden soll und jeder Morgen daselbst 8 fl. gilt, so wird man das △ AIK = $\frac{109,2}{8}$ Morgen = $\frac{109,2}{8}$ × 160 □R. = 2184 □R. machen müssen, wenn das Dreyeck oder der erste Theil AIK den Werth 109,2 fl. erhalten soll. Jetzt ist nun im Dreyeck ABG die Seite BG, die Senkrechte AS und

die abzuschneidende Fläche AIK = 2184 □R. bekannt, man wird daher auch nach §. 58. IX. den Abstand AR der zu ziehenden Theilungslinie IK berechnen können. Fig. 217.

Um die zweyte Theilungslinie LM zu ziehen, beachte man, daß die beyden ersten Theile zusammen, nämlich AILMK = 218,4 fl. werth seyn müssen, daß aber das △ ABG nur 128 fl. werth ist; man wird daher aus dem Trapeze GBCF noch eine Fläche GBLM nehmen und diese dem Dreyecke ABG zulegen müssen, welche 218,4 − 128,0 = 90,4 fl. werth ist, damit der Werth des Dreyeckes ABG und des Trapezes GBLM zusammen wirklich = 128,0 + 90,4 = 218,4 fl. werde. Wenn aber der Werth des Trapezes GBLM = 90,4 fl. werden soll, so muß man es, weil daselbst jeder Morgen 10 fl. gilt, $\frac{90,4}{10}$ Morgen oder $\frac{90,4}{10} \times 160$ □R. = 1446,4 □R. groß machen; schneiden wir daher im Trapeze GBCF durch eine vorgezogene Theilungslinie LM eine Fläche GBLM von 1446,4 □R. nach §. 58. X., XI. oder XII., XIII. ab, so wird auch AILMK richtig den Werth von 218,4 fl. und KILM den Werth 109,2 fl. erhalten.

Die dritte und vierte Theilungslinie NO und PQ kann ebenfalls leicht gezogen werden, wenn wir zuvor die Flächen FCNO und ECPQ oder HDPQ nach □R. berechnen, welche im Trapeze FCDH durch NO und PQ abgeschnitten werden müssen. Nämlich es ist der Werth von zwey Bestandsflächen ABG und GBCF zusammen oder von ABCFG = 128 + 150 = 278 fl., von drey Bestandsflächen ABG, GBCF und FCDH zusammen oder von ABCDHFG = 128 + 150 + 168 = 446, der Werth von drey Theilen nämlich von AILNOMK = 327,6 und von AILNPQOMK = 436,8 fl. woher der Werth des Trapezes FCNO = dem Werthe von AILNOMK weniger dem Werthe von ABCFG und mithin der

Werth des Trapezes FCNO = 327,6 — 278,0 = 49,6 fl., und der Werth des Trapezes FCPQ = Werth von AILNPQOMK weniger den Werth von ABCFG = 436,8 — 278, = 158,8 fl., oder der Werth des Trapezes HDPQ = dem Werthe ABCDHFG weniger dem Werthe AILNPQOMK = 446,0 — 436,8 = 9,2 fl. Da nun im Trapeze FCDH der Morgen 12 fl gilt, das Trapez FCNO = 49,6., das Trapez FCPQ = 158,8 fl. und das Trapez HDPQ = 9,2 fl. werth seyn soll, so wird man das Trapez FCNO = $\frac{49,6}{12}$ Morgen = $\frac{49,6 \times 160 \square R.}{12} = 661,3 \square R.$; die Fläche des Trapezes FCPQ = $\frac{158,8 \times 160}{12} = 2117,3 \square R.$ und die Fläche des Trapezes HDPQ = $\frac{9,2 \times 160}{12}$ = 122,7 □R. zu machen haben, zu welchen Trapezien nun jetzt die begehrten Theilungslinien NO und PQ nach §. 58. X. bis XIV. gezogen werden können.

Fig. 218. IV. Aufgabe. Ein Trapez ADQN Fig. 218. enthält mehre Bestandsflächen, als DQPC, wo der Morgen u Kltr. oder die Quadrathruthe $\frac{u}{160}$ = m Klr. trägt, oder wo die Quadratruthe m fl. werth ist, ferner eine Bestandsfläche CPOB, wo die Quadratruthe n fl. und eine Bestandsfläche ABON, wo die Quadrathruthe p fl. werth ist; man soll eine Theilungslinie IKLMY parallel zu AD oder NQ dergestalt ziehen, daß der Werth der abgeschnittenen Fläche ADMI, welche ebenfalls wieder aus mehren besondern Flächen von verschiedener Güte besteht = k fl. werde.

Auflösung. Man suche, wie nachher sogleich gezeigt werden soll, zum vorgelegten, aus mehren Beständen zusammengesetzten, Trapeze ADQN ein anderes AVZN, welches nicht nur eben so viel werth als das vorgelegte ist, sondern wo auch keine Verschieden-

heit der Bestände angetroffen wird, indem man daselbst jede Quadratruthe zu v = 10 oder 20 fl. Werth anschlägt; schneide alsdann in dem verwandelten Trapeze AVZN durch eine vorgezogene Theilungslinie YI ein Trapez AVYI ab, das den Werth k fl. oder die Fläche $\frac{k}{v}$ □R. hat, so wird die gefundene Theilungslinie YMI zugleich auch die richtige Theilungslinie MI für die vorgelegte Figur seyn indem diese Linie YI von der vorgelegten Figur eine Fläche ADMI abschneidet, deren Bestände CDML, BCLK und ABKI zusammen ebenfalls k fl. werth sind. Fig. 218.

Um die vorgelegte ungleichartig bestandene Fläche ADQN in eine andere gleichartig bestandene AVZN zu verwandeln, mache man

$$AV = \frac{CD \times m + BC.\ n + AB.\ p}{v};$$

$$NZ = \frac{PQ.\ m + OP.\ n + NO.\ p}{v};$$

und ziehe von V nach Z eine Linie VZ. Wäre OP = o oder COB eine Dreyeck, so würde auch n. OP = o × OP = o seyn. Und wären einige oder alle Bestandslinien DMQ, CLP; BKO; AIN Bögen, so müßte man zwischen AD und NQ noch mehre Parallelen ziehen und diese auf dieselbe Art verwandeln, wie wir AD in AV und NQ in NZ verwandelt haben, und dann würde die Linie VYZ ebenfalls auch bogig ausfallen. Aber selbst auch in diesem Falle würden AVYI und ADMI gleichviel werth seyn. Wäre CPOB eine Blöße, so muß man den Werth einer Quadratruthe daselbst, nämlich n = o setzen.

Beweis. Man denke sich EH oder EW an AD oder AV unendlich nahe und parallel, setze den senkrechten Abstand RS dieser Parallelen = h, ferner CD = a; BC = b; AB = c und AV = x, so wird man CDHG als Parallelogramm ansehen und dasselbe = a.h setzen können. Eben so ist ACGF = b.h; ABFE = c.h und AVWE = x.h □R.

Entwickelt man nun aus dieser quadratischen Gleichung den Werth für m, so erhält man

$$m = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4ks}}{2k}$$

und daß AD = m. AI; AE = m. AK, ꝛc. seyn soll, liegt schon in der Bedingung der Aufgabe.

V. Aufgabe. Ein krummliniges Trapezoid ABCIHG Fig. 215., dessen zwey gerade Seiten GA und IC sehr schief gegen einander liegen, durch eine krumme Theilungslinie DEF, wie vorher, so zu theilen, daß nicht nur die abgeschnittene Fläche CBADEF = $\frac{1}{3}$ □R. werde, sondern sehr richtig auch AG : AD = BH : BE = CI : CF sey.

Fig. 215.

Auflösung. Man suche den Durchschnittspunkt K der verlängerten Schenkel GA und IC, messe KA = a; KG = b, setze KD = x und die ganze Fläche ABCIHG = f und berechne x aus der Formel

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{s}{f}.(b^2 - a^2)}.$$

Wird in dieser Formel KB = a und KH = b, gesetzt, so findet man daraus KE = x, und eben so findet man AF = x, wenn KC = a und KI = b gesetzt wird. Sind die Punkte D, E und F bekannt, so kann man auch die begehrte Theilungslinie DEF ziehen.

Beweis. Man setze in den ähnlichen Dreyecken KHN; KEM und KBL (wo KN unendlich nahe an KH liegt) die Höhe HN = mb, so ist EM = mx und BL = ma; $\triangle$ HKN = $\frac{b.mb}{2} = \frac{mb^2}{2}$; $\triangle$ EKM = $\frac{mx}{2}$ und $\triangle$ BKL = $\frac{ma^2}{2}$; Trapez HBLN = $\triangle$ HKN − $\triangle$ BKL = $\frac{mb^2}{2} - \frac{ma^2}{2} = \frac{m}{2} \times (b^2 - a^2)$; Trapez EBLM = $\triangle$ EKM − $\triangle$ BKL = $\frac{mx^2}{2} - \frac{ma^2}{2} = \frac{m}{2}(x^2 - a^2)$. Wenn nun alle Trapeze EBLM welche zwischen zwey Schenkel KH

und KN und über der Theilungslinie DEF liegen, die zu $= \frac{s}{f}$ des zugehörigen ganzen Trapezes HBLN zwischen denselben Schenkeln sind, so wird auch die Fläche ABCFED $= \frac{s}{f}$. ABCIHG $= \frac{s}{f}$. $f = s$ seyn.

Es folgt aber aus EBLM $= \frac{s}{f}$. HBLN nämlich aus $\frac{m}{2}(x^2 - a^2) = \frac{s}{f}$. $(b^2 - a^2)$. $\frac{m}{2}$, der Werth von $x = \sqrt{a^2 + \frac{s}{f}. (b^2 - a^2)}$.

Anmerkung. Ist ein Trapezoid GHIFED von f □R. vorgelegt und soll man an dieses noch ein anderes DEFCBA von u □R. anlegen, dergestalt, daß GD : DA = IF : FC ist, so wird KD = a und KG = b gemessen und KA = x aus der Formel

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{s}{f}(b^2 - a^2)}$$

berechnet. Setzt man in dieser Formel KE = a und KH = b, so findet man KB = x, u. s. f. KC = x aus KF = a und KI = b.

Denn es ist hier, wenn HN = mb gesetzt wird, EM = am und BL = mx; △ KHN $= \frac{b.mb}{2} = \frac{mb^2}{2}$; △ KEM $= \frac{m.a^2}{2}$ und △ KBL $= \frac{mx^2}{2}$, daher Trapez HEMN $= \frac{m}{2} \times (b^2 - a^2)$ und Trap. EBLM $= \frac{m}{2}. (a^2 - x^2)$ und weil $\frac{m}{2}(b^2 - a^2) : \frac{m}{2}(a^2 - x^2) = f : s$ seyn soll, so ist $a^2 - x^2 = \frac{s}{f}(b^2 - a^2)$ und

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{s}{f}(b^2 - a^2)}.$$

Fig. 216. VI. Aufgabe. Es ist ein Trapezoid ABCFED Fig. 216. vorgelegt, wo nicht nur die zwey gegenüber stehenden Seiten ABC und FED, sondern auch eine oder auch die beyden übrigen Seiten AGD oder AHD und CIF oder CKF Bögen sind, man soll eine Theilungslinie PQR oder STU so ziehen, daß die abgeschnittene Fläche ABCRQP oder die Fläche ABCUTS = s □R. werde.

Auflösung. Man sehe zuerst AD und CF als gerade Linien an und lege darin nach voriger Anleitung eine Fläche ABCOVN von s □R. an. Ist nun ABCKVG um NAG und OCK zu groß, so muß eine Fläche GVKROP abgeschnitten werden, welche = NAG + OCK ist. Ist aber ABCIVH um NAH + OCI = u □R. zu klein, so muß noch eine Fläche HVIUTS von u □R. zugelegt werden. Dieß Abbrechen oder Zulegen einer Fläche geschieht, wenn man die Tangenten PGL sind RKM oder HSW und IUY zieht und die Fläche GVKROP ans Trapezoid GVKMFEDL legt oder die Fläche HVIUTS vom Trapezoide HVIYEW nach voriger Anleitung abschneidet.

VII. Anmerkung. Gehen die Bögen AGD und CKF Fig. 216. stark aus- oder einwärts, so muß man schon im voraus AD in N; BE in V und CF in O halbiren und den Theilungsbogen GNVOK ziehen und dann hat man im Trapezoide ABCKVG eine verlangte Fläche von s □R. anzulegen oder wenn dieß Trapezoid nicht groß genug seyn sollte, so muß man die noch fehlende Fläche GVKUTS im Trapezoide GVKFED abschneiden.

§. 61.

Theilung der zusammengesetzten Figuren von einerley und verschiedenen Werthe durch Parallelen.

Fig. 217. I. Aufgabe. Es ist eine vielseitige Figur ABCDEFA Fig. 217. vorgelegt, man soll sie durch

Theilungslinien IK, LM, NO, PQ, welche parallel zu CF gezogen werden, in n oder 5 gleiche, oder auch in Theile AIK; KILM; LMNO ꝛc. vom begehrten Inhalte theilen.

Fig. 272.

Auflösung. Man ziehe aus jeder Ecke B, D und E der vorgelegten Figur Parallellinien BG; DH und EZ zu CF und theile dadurch die ganze Figur in lauter Dreyecke und Trapeze als ABG; GBCF; FCDH und HDE ein, ziehe die Senkrechte AZ auf EZ oder auf CF, messe ARS; SU; UY und UZ und die Parallelen BG; CF; DH, und berechne den Flächeninhalt der einzelnen Dreyecke und Trapeze, als $\triangle ABG = \frac{1}{2} BG \times AS$; $\square GBCF = \frac{1}{2} (GB + CF) \times SU$; $\square FCDH = \frac{1}{2} (FC + HD) \times UY$ und $\triangle HDE = \frac{1}{2} HD \times YZ$; suche den Inhalt der ersten zwey Flächen zusammen, nämlich die Fläche ABCFA; den Inhalt der drey ersten Flächen zusammen, nämlich die Fläche ABCDEHFA und endlich den Inhalt aller Flächen zusammen, so wird die letzte Summe den Inhalt = f der ganzen Fläche ABCDEFA vorstellen, welche man zur Vorsicht auch noch auf einem andern Wege berechnen und mit f vergleichen muß.

Wenn nun die ganze Fläche in 5 gleiche Theile getheilt werden soll, so muß auch jeder Theil = $\frac{1}{5}$ f □R. und zwar AIK = $\frac{1}{5}$ f; ABLMA = $\frac{2}{5}$ f; ABCNOFA = $\frac{3}{5}$ f; ABCPQFA = $\frac{4}{5}$ f ꝛc. werden. Soll aber der erste Theil AIK = p □R., der zweyte KILM = q, der dritte MLNO = s; der vierte ONPQ = u und der fünfte QPDE = v □R. werden, so muß p + q + s + u + v = f seyn und dann ist ABLMA = p + q; ABCNOFA = p + q + s; ABCPQF = p + q + s + u.

Um nun die erste Theilungslinie IK zu ziehen, muß man bedenken, daß die Fläche p □R. des ersten Theiles AIK kleiner als △ ABG ist und daß man daher im Dreyecke ABG eine Parallele IK zu BG so zu ziehen hat, daß die abgeschnittene Fläche AIK = p □R. werde. Da nun AS = h und BG = a

Fig. 217. schon gemessen sind, so finden wir AR = x durch die Formel $x = \sqrt{\frac{2hs}{a}}$, vermöge §. 58. IX.

Um die zweyte Theilungslinie LM im Trapeze GBCF zu ziehen, muß man entweder die Fläche GBLM oder die Fläche FCLM berechnen. Die erste Fläche GBLM ergiebt sich, wenn man von ABLMA = p + q das △ ABG subtrahirt, und die zweyte Fläche FCLM erhält man, wenn man von ABCFA die Fläche ABLM = p + q subtrahirt. Nun haben wir §. 58. X., XI., XII., XIII. und XIV. gelernt, wie man zu BG oder zu CF eine Parallele LM so ziehen könne, daß die abgeschnittene Fläche GBLM oder FCLM wirklich die begehrte Anzahl □R. enthält, es wird daher auch, wenn die Linie LM nach der dortigen Anleitung richtig gezogen wird, KILM = q □R. werden.

Die dritte Theilungslinie NO, welche ins Trapez FCDH fällt, wird auf dieselbe Art gezogen, wenn man zuvor die abzuschneidende Fläche FCNO = (p + q + s) — ABCFGA berechnet. Sollte aber FH ∦ zu CD laufen, so kann man auch NO nach §. 58. II, ziehen.

Die vierte Theilungslinie PQ fällt in dasselbe Trapez HDCF und schneidet darin die Fläche HDPQ = ABCDHFGA — (p + q + s + u) ab.

Der fünfte Theil QPDE muß von selbst = v □R. werden.

Anmerkung. Wären manche Seiten AB oder BC, CD ꝛc. der vorgelegten Figur bogig, so würde man beym Theilen derselben der Hauptsache nach auf dieselbe Art verfahren, nur müßte man die Theilungslinien IK, LM, ꝛc. welche in ein bogiges Dreyeck oder Trapez fallen, nach §. 59. II. ziehen.

II. Aufgabe. Man soll die Fläche ABCDEFA
Fig. 217. Fig. 217. durch eine gezogene Linie C^xD^x welche parallel zu AZ läuft, in zwey gleiche Theile theilen.

Auflösung. Man ziehe aus den Ecken A und E die Parallellinien AA^x und XE, welche dem Augenmaaße noch am nächsten an der zu ziehenden Theilungs-

lungslinie C^1D^1 zu liegen kommen, berechne den Theil AA^1DCB der vorgelegten Figur, ingleichen auch die übrigen Theile AA^1EX und XEF, addire diese drey Theile und sehe zu, ob die Summe mit der Fläche f der ganzen Figur übereinstimmt; wo nicht, so ist ein Fehler in der Arbeit, welchen man sogleich aufsuchen und verbessern muß. Hat man nun die Fläche der einzelnen Theile richtig gefunden, so dividirt man f durch 2, denkt sich C^1FED^1 oder $C^1D^1DCBA = \frac{f}{2}$ und subtrahirt XFE von $\frac{f}{2}$, so wird man die Fläche XED^1C^1 durch □R. ausgedrückt finden, welche man im Trapeze XEA^1A durch die Theilungslinie D^1C^1 (und zwar ebenfalls nach §. 58. X. bis XIII.) abschneiden kann.

Ist die Theilungslinie C^1D^1 gezogen, so kann man ferner jeden Theil C^1D^1DCBA und $C^1D^1EFC^1$ durch gezogene Senkrechte IR, LT ꝛc. wieder in 5, 10 und 20 gleiche Theile nach I theilen, dergestalt, daß man jedes Forstrevier in 40 bis 80 gleiche Jahresschläge eintheilen kann, wovon 20 oder 40 über — und eben so viele Theile unter der Hauptlinie C^1D^1 liegen.

III. Aufgabe. Eine Waldwand ABGDEF Fig. 217. besteht aus mehren Bestandsflächen, und Fig. 217. zwar ist der erste Bestand ABG = 16 Morgen groß gefunden und daselbst der Morgen zu 8 Klftr. Holzertrag abgeschätzt worden, dagegen ist der zweyte Bestand GBCF = 15 Morgen und der Morgen auf 10 Klftr. geschätzt, der dritte Bestand FCDH hält 14 Morgen und der Morgen ist zu 12 Klftr. und endlich der vierte Bestand HDE ist 10 Morgen groß und der Morgen daselbst auf 10 Klftr. künftigen Holzertrag abgeschätzt. Man soll die ganze Waldfläche in fünf solche Jahresschläge AIK; KILM; MLNO; ONPQ und QPE eintheilen, daß auf jedem Jahresschlage gleichviel Holz gewonnen wird.

Fig. 217. Diese Aufgabe ist einerlei mit der folgenden: Ein Feldbezirk ABCDEF besteht aus mehren besondern Flächen von verschiedener Größe und Güte. Die erste Fläche ABG hält 16 Morgen,
die zweyte GBCF ist = 15 Morgen
die dritte FCDH ist = 14 Morgen und
die vierte HDE ist = 10 Morgen;
der Morgen der ersten Fläche ist 8 fl. werth,
= = = zweyten = = 10 = =
= = = dritten = = 12 = =
= = = vierte = = 10 = =
Man fragt, wie man das ganze Grundstück in fünf solche Theile theilen könne, daß jedes Grundstück gleichviel werth sey?

Auflösung. Der Werth
der ersten Fläche ist = 16 × 8 = 128 fl.;
= zweyten = = = 15 × 10 = 150 =;
= dritten = = = 14 × 12 = 168 =
= vierten = = = 10 × 10 = 100 =
und mithin ist das ganze Grundstück so viel als die Summe 546 fl. werth. Nun soll das ganze Grundstück nach dem Werthe in 5 gleiche Theile getheilt werden, es muß daher jeder Theil AIK; KILM; MLNO ꝛc. $\frac{546}{5}$ = 109,2 fl. werth seyn. Hieraus folgt, daß der Werth von zwey Theilen zusammen (nämlich von AILMK) = 2 × 109,2 = 218, 4 fl.; der Werth von AILNOMK = 3 × 109,2 = 327,6; von AILNPQOMK = 436,8 und der Werth von allen fünf Theilen zusammen = dem Werthe 546 fl. der ganzen Fläche sey. Da △ AIK im Werthe = 109,2 fl. werden soll und jeder Morgen daselbst 8 fl. gilt, so wird man das △ AIK = $\frac{109,2}{8}$ Morgen = $\frac{109,2}{8}$ × 160 □R. = 2184 □R. machen müssen, wenn das Dreyeck oder der erste Theil AIK den Werth 109,2 fl. erhalten soll. Jetzt ist nun im Dreyeck ABG die Seite BG, die Senkrechte AS und

die abzuschneidende Fläche AIK = 2184 □R. bekannt, man wird daher auch nach §. 58. IX. den Abstand AR der zu ziehenden Theilungslinie IK berechnen können. Fig. 217.

Um die zweyte Theilungslinie LM zu ziehen, beachte man, daß die beyden ersten Theile zusammen, nämlich AILMK = 218,4 fl. werth seyn müssen, daß aber das △ ABG nur 128 fl. werth ist; man wird daher aus dem Trapeze GBCF noch eine Fläche GBLM nehmen und diese dem Dreyecke ABG zulegen müssen, welche 218,4 — 128,0 = 90,4 fl. werth ist, damit der Werth des Dreyeckes ABG und des Trapezes GBLM zusammen wirklich = 128,0 + 90,4 = 218,4 fl. werde. Wenn aber der Werth des Trapezes GBLM = 90,4 fl. werden soll, so muß man es, weil daselbst jeder Morgen 10 fl. gilt, $\frac{90,4}{10}$ Morgen oder $\frac{90,4}{10} \times 160$ □R. = 1446,4 □R. groß machen; schneiden wir daher im Trapeze GBCF durch eine vorgezogene Theilungslinie LM eine Fläche GBLM von 1446,4 □R. nach §. 58. X., XI. oder XII., XIII. ab, so wird auch AILMK richtig den Werth von 218,4 fl. und KILM den Werth 109,2 fl. erhalten.

Die dritte und vierte Theilungslinie NO und PQ kann ebenfalls leicht gezogen werden, wenn wir zuvor die Flächen FCNO und ECPQ oder HDPQ nach □R. berechnen, welche im Trapeze FCDH durch NO und PQ abgeschnitten werden müssen. Nämlich es ist der Werth von zwey Bestandsflächen ABG und GBCF zusammen oder von ABCFG = 128 + 150 = 278 fl., von drey Bestandsflächen ABG, GBCF und FCDH zusammen oder von ABCDHFG = 128 + 150 + 168 = 446, der Werth von drey Theilen nämlich von AILNOMK = 327,6 und von AILNPQOMK = 436,8 fl. woher der Werth des Trapezes FCNO = dem Werthe von AILNOMK weniger dem Werthe von ABCFG und mithin der

Werth des Trapezes FCNO = 327,6 — 278,0 = 49,6 fl., und der Werth des Trapezes FCPQ = Werth von AILNPQOMK weniger den Werth von ABCFG = 436,8 — 278, = 158,8 fl., oder der Werth des Trapezes HDPQ = dem Werthe ABCDHFG weniger dem Werthe AILNPQOMK = 446,0 — 436,8 = 9,2 fl. Da nun im Trapeze FCDH der Morgen 12 fl gilt, das Trapez FCNO = 49,6., das Trapez FCPQ = 158,8 fl. und das Trapez HDPQ = 9,2 fl. werth seyn soll, so wird man das Trapez FCNO = $\frac{49,6}{12}$ Morgen = $\frac{49,6 \times 160}{12}$ □R. = 661,3 □R.; die Fläche des Trapezes FCPQ = $\frac{158,8 \times 160}{12}$ = 2117,3 □R. und die Fläche des Trapezes HDPQ = $\frac{9,2 \times 160}{12}$ = 122,7 □R. zu machen haben, zu welchen Trapezien nun jetzt die begehrten Theilungslinien NO und PQ nach §. 58. X. bis XIV. gezogen werden können.

Fig. 218. IV. Aufgabe. Ein Trapez ADQN Fig. 218. enthält mehre Bestandsflächen, als DQPC, wo der Morgen u Kltr. oder die Quadrathruthe $\frac{u}{160}$ = m Kltr. trägt, oder wo die Quadratruthe m fl. werth ist, ferner eine Bestandsfläche CPOB, wo die Quadratruthe n fl. und eine Bestandsfläche ABON, wo die Quadrathruthe p fl. werth ist; man soll eine Theilungslinie IKLMY parallel zu AD oder NQ dergestalt ziehen, daß der Werth der abgeschnittenen Fläche ADMI, welche ebenfalls wieder aus mehren besondern Flächen von verschiedener Güte besteht = k fl. werde.

Auflösung. Man suche, wie nachher sogleich gezeigt werden soll, zum vorgelegten, aus mehren Beständen zusammengesetzten, Trapeze ADQN ein anderes AVZN, welches nicht nur eben so viel werth als das vorgelegte ist, sondern wo auch keine Verschieden-

heit der Bestände angetroffen wird, indem man da- Fig. 218.
selbst jede Quadratruthe zu $v = 10$ oder 20 fl. Werth anschlägt; schneide alsdann in dem verwandelten Trapeze AVZN durch eine vorgezogene Theilungslinie YI ein Trapez AVYI ab, das den Werth k fl. oder die Fläche $\frac{k}{v}$ □R. hat, so wird die gefundene Theilungslinie YMI zugleich auch die richtige Theilungslinie MI für die vorgelegte Figur seyn indem diese Linie YI von der vorgelegten Figur eine Fläche ADMI abschneidet, deren Bestände CDML, BCLK und ABKI zusammen ebenfalls k fl. werth sind.

Um die vorgelegte ungleichartig bestandene Fläche ADQN in eine andere gleichartig bestandene AVZN zu verwandeln, mache man

$$AV = \frac{CD \times m + BC.\ n + AB.\ p}{v};$$

$$NZ = \frac{PQ.\ m + OP.\ n + NO.\ p}{v};$$

und ziehe von V nach Z eine Linie VZ. Wäre $OP = o$ oder COB eine Dreyeck, so würde auch $n.\ OP = o \times OP = o$ seyn. Und wären einige oder alle Bestandslinien DMQ, CLP; BKO; AIN Bögen, so müßte man zwischen AD und NQ noch mehre Parallelen ziehen und diese auf dieselbe Art verwandeln, wie wir AD in AV und NQ in NZ verwandelt haben, und dann würde die Linie VYZ ebenfalls auch bogig ausfallen. Aber selbst auch in diesem Falle würden AVYI und ADMI gleichviel werth seyn. Wäre CPOB eine Blöße, so muß man den Werth einer Quadratruthe daselbst, nämlich $n = o$ setzen.

Beweis. Man denke sich EH oder EW an AD oder AV unendlich nahe und parallel, setze den senkrechten Abstand RS dieser Parallelen $= h$, ferner $CD = a$; $BC = b$; $AB = c$ und $AV = x$, so wird man CDHG als Parallelogramm ansehen und dasselbe $= a.h$ setzen können. Eben so ist ACGF $= b.h$; $ABFE = c.h$ und $AVWE = x.h$ □R.

Fig. 218. Es ist aber die □R. des ersten Parallelogramms m fl., des zweyten = n fl. und des dritten p fl. werth und der Werth einer □R. des Parallelogramms AVWE soll = v fl. werden, mithin ist

das Parallelogramm CDHG werth ; ah × m;
— — BCGF — bh × n;
— — ABFE — ch × p
und — — AVWE werth x.h.v.

Nun soll der Werth xhv des letzten Parallelogramms eben so viel, als der Werth aller drey ersten Parallelogramms zusammen betragen, wir müssen daher auch

$$xhv = ahm + bhn + chp$$

oder $xv = am + bn + cp$ setzen, aus welcher Gleichung der Werth von

$$x = \frac{am + bn + cp}{v}$$ folgt.

Setzen wir hier jede andere zu AV gezogene Parallele IY oder NZ = x und ML = a, LK = b und KI = c, oder QP = a, PO = b und ON = c, so findet man IY oder NZ = x durch dieselbe Formel

$$x = \frac{am + bn + cp}{v}.$$

Denken wir uns sowohl die vorgelegte ungleichartige, als die gesuchte gleichartig bestandene Fläche durch viele gezogene Parallellinien, AV, EW, IY, NZ ꝛc. in lauter Parallelogramme oder Trapeze abgetheilt, so wird überall der Werth zwischen je zwey Parallelen AV und EW der gefundenen Figur AVWE = dem Werthe von CDHG + BCGF + ABFE und demnach der Werth von AVYI = dem Werthe von CDML + BCLK + ABKI und der Werth von IYZN = dem Werthe von LMQP + KLPO + IKON seyn.

Wir haben aber statt der ungleichartigen Fläche ADQN eine andere Fläche AVZN geschaffen, wo jede Quadratruthe v fl. werth ist; sollen wir daher im neu geschaffenen Trapeze AVZN durch eine Linie YI

eine Fläche AVYI abschneiden, welche k fl. werth ist, so muß die Fläche selbst $= \frac{k}{v}$ □R. groß gemacht werden, welches sehr leicht nach §. 58. geschehen kann.

V. Anmerkungen. 1) Der Werth w eines Trapezes ADMQNI Fig. 218., das mehre Bestandsflächen vom verschiedenen Werthe enthält, wird gefunden, wenn man die Fläche eines jeden Bestandes CDMQPL, CLPOKB und BKONIA besonders sucht und mit dem Werthe m, n oder p einer Quadratruthe daselbst multiplicirt und die Produkte $m \times$ CDQP $+ n$. BCPO $+$ p. ABON addirt. Soll nun durch die Linie MI eine Fläche ADMI dergestalt abgeschnitten werden, daß sie halb so viel werth als die ganze Fläche ist, so muß man den Werth k der Fläche ADMI $= \frac{1}{2}$ w setzen. Fig. 218.

2) Haben in Fig. 218. die Bestandlinien DQ, CP oder BO, AN Ecken, oder sind diese Bestandslinien aus mehren Linien, welche einen Winkel machen, zusammen gesetzt, so muß man eben so viele Parallellinien zu VA ziehen, als Ecken vorhanden sind und dadurch die vorgelegte Figur in lauter Trapezien abtheilen, worin die Bestandslinien gerad laufen oder nur einen flachen Bogen machen. Es wird sodann der Werth eines jeden Trapezes, das freylich aus mehren Bestandsflächen zusammengesetzt ist, besonders gesucht, und, wenn die Figur getheilt werden soll, so vergleicht man, wie in III, den Werth eines oder mehrer Trapezien zusammen mit dem Werthe der hinzulegenden Theile, verrichtet aber die Theilung selbst eines solchen Trapezes wie eben jetzt in IV. gezeigt worden ist.

3) Wären in Fig. 217. die einzelnen Flächen ABG; GBCF; FCDH und HDE noch durch besondere eckige Bestandslinien quer durchzogen, so müßte man nicht nur zu den Ecken B, C, D des äußern Umfangs Parallellinien BG, CF, DH, sondern auch zu den innern Ecken der Bestandslinien dergleichen Fig. 217

Parallelen ziehen und hierdurch die vorgelegte Figur in lauter Trapezien von der Gestalt Fig. 218. abtheilen, übrigens aber die Theilung selbst auf die in Nr. 2. bemerkte Art verrichten.

4) Geht der Bogen AGI oder ACE Fig. 218. stark aus- oder einwärts, so muß man sogleich die vorgelegte Fläche AEIGFA durch gezogene Parallelen EI und CG in mehre besondere Flächen ACGF und GCEI abtheilen und dann die vorgelegte Figur ansehen, als wäre sie aus mehren Flächen zusammengesetzt. Die Theilung wird jetzt ungleich sicherer geschehen können.

§. 62.

Theilung der zusammengesetzten Figuren von einerley und verschiedenen Werthe durch Strahllinien, welche aus einem festen Punkte gezogen werden.

I. Aufgabe. Es ist ein Drey- oder ein Vier-
Fig. 219. eck ABCD Fig. 219. vorgelegt, man soll dasselbe durch Theilungslinien ED, EF, EG, welche aus einem festen Punkte E (der innerhalb der Figur gegeben ist) gezogen werden, dergestalt theilen, daß jeder Theil $\frac{m}{n}$ der ganzen Fläche f ist, oder daß der erster Theil DEFA = u, der zweyte FEGB = v und der dritte GEDC = w □R. wird und wo demnach u + v + w = f seyn muß.

Auflösung. Man ziehe aus E in jede Ecke der Figur einen Strahl EA, EB, EC, ED und theile dadurch die vorgelegte Figur in lauter Dreyecke AEB; BEC, CED und DEA ein; sehe die äußern Seiten AB, BC, CD und DA als Grundlinien und die darauf aus E gefällten Senkrechten EH, EI, EK und EL als Höhen dieser Dreyecke an, suche den Inhalt eines jeden besondern Dreyeckes, als △ EAB =

$\frac{1}{2}$ AB × EH; △ EBC = $\frac{1}{2}$ BC × EI; △ ECD = $\frac{1}{2}$ CD × EK; △ EDA = $\frac{1}{2}$ DA × EL und vergleiche ihre Summe mit dem Inhalte f der ganzen Figur, welche man auch noch auf eine andere Art berechnen kann. Soll nun die ganze Figur in drey gleiche Theile getheilt werden, so muß man jeden Theil DEFA, FEGB und GEDC = $\frac{1}{3}$ f □R. machen, wornach die Fläche EDABGE = $\frac{2}{3}$ f werden muß. Soll aber der erste Theil u □R. und der andere v □R. erhalten, so muß der dritte Theil den Rest f — u — v bekommen und die Fläche EDABGE = u + v werden. Fig. 219.

Angenommen, daß ED schon eine vorgezogene Theilungslinie sey und daß man hierzu noch eine zweyte Theilungslinie EF so ziehen müsse, daß EDAF = u oder = $\frac{1}{3}$ f werde, so muß man die Fläche des Dreyeckes EDA, welches kleiner als u seyn soll, von u □R. abziehen und den Rest = dem Dreyecke AFE setzen. Da nun jetzt die Fläche des Dreyeckes AFE und die zugehörige Höhe EH bekannt ist, so findet man die Grundlinie AF, wenn man die Fläche AFE durch $\frac{1}{2}$ HE dividirt. Um die Theilungslinie EG im Dreyecke BCE zu ziehen, müssen wir die Fläche des abzuschneidenden Dreyeckes BGE kennen und diese wird gefunden, wenn man von EDABGE nämlich von u + v □R. die Summe der beyden Dreyecke DEA + EAB nämlich EDABE subtrahirt. BG muß man sodann = △ BGE : durch $\frac{1}{2}$ IE machen. Der dritte oder letzte Theil GEDC muß von selbst = w oder = $\frac{1}{3}$ f werden, welcher = △ GEC + △ CDE ist.

Anmerkung. Wären manche oder alle Seiten, als z. B. AB, BC bogig, und zwar stark aus- oder einwärts gebogen, so zieht man ebenfalls auch gleich Anfangs in allen Ecken der Figur und in die Mitte der starken Bögen Strahlinien EA; EB ꝛc. und nach Befinden der Bögen noch mehre Strahlinien darzwischen, und theilt dadurch die Figur ebenfalls in lauter Dreyecke, berechnet diese und vergleicht sie, wie vorher, mit der Fläche der hinzulegenden Theile,

verrichtet aber die Theilung eines solchen Dreyeckes selbst nach §. 59. I.

II. Aufgabe. Es ist ein Vieleck ABCDEF Fig. 220. vorgelegt, man soll dasselbe durch Theilungslinien GIN, GLP, welche aus einem festen Punkte G (der außerhalb der Figur liegt) gezogen werden, dergestalt theilen, daß die abgeschnittenen Flächen FAIN, NILP und PLCD eine begehrte Zahl u, v, w, □R. enthalten.

Fig. 220.

Auflösung. Man ziehe aus G in alle Ecken der Figur Strahlen GA; GHF; GBO; GKE und GMD und theile dadurch die ganze Figur in lauter Drey- und Vierecke ein, als AFH; FHBO; OBKE; EKMD und DMC; addire diese Drey- und Vierecke zusammen und vergleiche die Summe mit der Fläche f der ganzen Figur, welche man auch noch auf eine andere Art berechnen muß. Soll nun die ganze Fläche in 3 gleiche Theile getheilt werden, so muß der erste Theil FAIN = u = $\frac{1}{3}$ f und so ein jeder Theil NILP = v = $\frac{1}{3}$ f und AILPNF = u + v = $\frac{2}{3}$ f werden. Soll aber der erste Theil eine gewisse Anzahl u und der zweyte v □R. enthalten, so muß der dritte Theil schlechterdings = f — u — v □R. werden.

Da der erste Theil FAIN beynahe = FABO ist, so ziehe man FAIN von FABO ab, so bleibt die Fläche OBIN übrig, welche man im Trapezoide OBHF durch eine aus G gezogene Theilungslinie GIN abzuschneiden hat. Wie man nun diese Fläche OBIN, welche in □R. gegeben ist, abschneiden könne, lehrt §. 58. XVI. ꝛc. Vergleichen wir die Summe ABKEOF der einzelnen Abtheilungen FABO + OBKE mit der Summe AILPNF der beyden ersten Theile FAIN + NILP, nämlich mit u + v, und ziehen wir jene Summe von dieser ab, so bleibt die Fläche EKLP übrig, welche man im Trapezoide EKMD durch eine aus dem Punkte G gezogene Theilungslinie GLP nach genannten §. 58. XVI.; XVII. ꝛc. abzuschneiden hat. Der dritte und letzte Theil PLCD muß von selbst w □R. enthalten.

III. Aufgabe. Ein Waldbezirk ABCDEF Fig. 220. enthält mehre Bestände vom verschiedenen Holzgehalte eines Morgens, und zwar ist der Bestand FABE a Morgen groß und auf einem Morgen daselbst können m Klftr. geschlagen werden, ferner hält der Bestand EBCD b Morgen und jeder Morgen daselbst n Klftr. Man soll den Waldbezirk in drey solche Theile FAIN, NILP und PLCD theilen, daß auf jedem Theile gleichviel Holz geschlagen wird. Fig. 220.

Anmerkung. Es ist hier gemeint, daß alle drey Waldflächen AINF, NILP, PLCD zugleich geschlagen werden. Würde die zweyte und dritte Fläche ein und zwey Jahre später gehauen, so würde sich daselbst das Holz um den Zuwachs vermehren und man würde daher auch auf der zweyten und dritten Fläche mehr Holz als auf der ersten finden, weil die erste Fläche sogleich geschlagen wird und kein Zuwachs darauf erfolgt. Findet man auf dem Morgen der Fläche FAIN schon in diesem Jahre m Klftr. dagegen aber auf dem Morgen der Fläche NIBE erst nach einem Jahre m Klftr. und auf dem Morgen der Fläche BEK nach einem Jahre n Klftr. und endlich auf dem Morgen der Fläche PLCD nach zwey Jahren n Klftr.; so kann die Hauung der drey Flächen FAIN; NILP und PLCD ein Jahr ums andere geschehen und es wird dennoch jedes Jahr gleichviel Holz gewonnen werden. Sollen wir daher einen Waldbezirk in Schläge abtheilen, welche ein Jahr ums andere abgetrieben werden, aber gleichviel Holz gewähren, so müssen wir im Stande seyn, diejenigen Waldflächen, welche erst nach mehren Jahren in Abtrieb kommen, auf den künftigen Holzertrag (eines Morgens) abzuschätzen.

Auflösung der vorgelegten Aufgabe.

Man ziehe, wie vorher, aus G in alle Ecken der Figur und der Bestandslinien die Strahlen GA, GHF, GBO, GKE, GMD; theile dadurch die vorgelegte Figur in lauter Partialflächen ein und suche den Inhalt dieser Partialflächen nach □R. und Morgen, als FABO = t Morgen, OBE = u, EBA = v und

Fig. 209. EKCD = w Morgen, wo nun auch t + u = s und v + w = b, der Holzgehalt von FABO = t.m; von OBE = u.m; von BEK = v.n und von EKCD = w.n Kltr., und zwar ist der Holzgehalt von FABE = tm + um = (t + u)m = sm und von EBCD = vn + wn = (v + w)n = bn Kltr., daher der Holzgehalt der ganzen Fläche = sm + bn Kltr. Soll nun diese Summe von Holz zu 3 gleichen Portionen abgetrieben werden, so muß jeder Schlag AINF, NIKE und PLCD $\frac{sm+bn}{3}$ Kltr. = p geben. Ziehen wir den Holzgehalt p Kltr. des Schlages FAIN von den tm Kltrn. der Fläche FABO ab, so finden wir die Kltr. q = tm — p der Fläche OBIN, und da hier auf dem Morgen m Kltr. stehen, so muß die Fläche OBIN selbst = $\frac{p}{m}$ Morgen = $\frac{q.160}{m}$ □R groß gemacht werden. Sind wir nun nach §. 58. XVI., XVII. ꝛc. im Stande im Trapezoide OBHF aus dem Punkte G eine solche Theilungslinie GIN zu ziehen, daß dadurch eine Fläche OBIN von $\frac{q.160}{m}$. □R. abgeschnitten wird, so wird diese geezogene Linie IN zugleich auch den ersten Schlag FAIN richtig abtheilen.

Um die zweyte Theilungslinie GLP richtig zu ziehen, kömmt es darauf an, daß wir die Fläche EKLP berechnen können, welche im Trapezoide EKMD abgeschnitten werden soll. Diese wird gefunden, wenn man vom Holzgehalte 2p Kltr. der beyden ersten Theile zusammen, nämlich vom Holzgehalte der Fläche AILPNF den Holzgehalt sm + vn der Fläche ABKEOF subtrahirt und den gefundenen Holzgehalt der Fläche EKLP = 2p — (sm + vn) Kltr. durch den Ertrag n Kltr. eines Morgens daselbst dividirt.

Wäre der erste Theil FAIN sehr klein, und kleiner als das △ AFH, so müßte man das △ AFH nach §. 58 XV. theilen. Würde eine Theilungslinie

IN oder LP in die Fläche OBKE fallen, welche aus Flächen OBE und EBK von verschiedenem Ertrage zusammen gesetzt ist, so müßte die Theilung dieser Fläche OBKE nach der Lehre des folgenden Paragraphen geschehen.

IV. Aufgabe. Zwischen zwey Schenkeln AG und AT Fig. 221. findet man verschiedene Bestandsflächen, als eine Fläche ACLP, wo der Morgen α Klftr. trägt oder α Gulden werth ist, ferner eine Fläche CLPRME, wo der Morgen β Gulden und eine Fläche EMRTNG, wo der Morgen γ Gulden werth ist. Man soll aus A eine gerade Theilungslinie ALMWN dergestalt ziehen, daß die dadurch abgeschnittene Fläche GAN, welche aus Flächen CAL, CLME und EMNG vom verschiedenen Werthe zusammengesetzt ist, den Werth k Gulden erhält. Fig. 221.

Auflösung. Man verwandele, wie nachher sogleich gezeigt werden soll, die vorgelegte Fläche GNTA, welche aus mehren Bestandsflächen von verschiedener Güte zusammengesetzt ist, in ein bogiges Dreyeck AUWY, wo der Morgen überall φ Gulden werth ist, schneide darin durch eine vorgezogene Theilungslinie eine Fläche UWA von $\frac{k}{\varphi}$ Morgen oder $\frac{k.\ 160}{\varphi}$ □R. nach §. 59. I. ab, so wird diese vorgezogene Linie AWN zugleich auch die gesuchte Theilungslinie für die vorgelegte ungleichartige Fläche seyn.

Die Verwandlung der ungleichartigen Fläche AGNTA in eine gleichartige AUWY geschieht auf folgende Art.

Man halbire AC in B; CE in D und EG in F, messe AC = a, CE = b und EG = c, ingleichen AB = p, AD = q und AF = r und berechne AU = x durch nachstehende Formel:

$$x = \sqrt{\frac{ap.\alpha + b.q\beta + c.r.\gamma}{\frac{1}{2}\varphi}},$$ wo demnach

$$AU = \sqrt{\frac{AC \times AB \times \alpha + CE \times AD \times \beta + EG \times AF \times \beta}{\frac{1}{2}\varphi}};$$

Fig. 231. halbire auch AP in O; PR in Q und RT in S und berechne AY auf dieselbe Art, indem man hier

$$AY = \sqrt{\frac{AP \times AO \times \alpha + PR \times AQ \times \beta + RT \times AS \times \gamma}{\frac{1}{2}\varphi}}$$

setzt; suche auf dieselbe Art, wie wir zu den Schenkeln AG und AT die Abmessungen AU und AY gefunden haben, noch zu mehren gezogenen Zwischenschenkeln AN die Abmessungen AW und führe über die gefundenen Punkte U, W und Y den Bogen UWY zum gesuchten Dreyecke AUWY, welches von der Beschaffenheit ist, daß der Morgen überall φ fl. und zwar der Theil UAV des Dreyeckes eben so viel werth als der Theil GAZ der vorgelegten Figur ist, und eben so ist auch der Werth VAW = den Werthe ZAN und der Werth WAY = dem Werthe NAT.

Beweis. Man sehe EG als Grundlinie und FK als mittlere Höhe des Trapezes GEE^1Z an und setze FK = m. AF = mr, so ist UV = m. AU = mx; DI = m. AD = mq und BH = mp, weil die Dreyecke ABH, ADI und AFK einander ähnlich sind. Nun ist $\triangle ACC^1 = AC \times BH = a.mp$; Trapez $CEE^1C^1 = CF \times DI = b.mq$ und Trapz $EGCE^1 = c.mr$, daher auch, (weil der Morgen des Dreyeckes ACC^1 α fl., des Trapezes CEE^1C^1 β fl. und der Morgen des Trapezes $EGZE^1$ γ fl. werth ist), der Werth des Dreyeckes $ACC^1 = \frac{amp.\ \alpha}{160}$ fl., des Trapezes $CEE^1C^1 = \frac{bmq.\ \beta}{160}$ und des Trapezes $EGZE^1 = \frac{c.mr\ \gamma.}{160}$ fl. Dagegen ist $\triangle AUV = \frac{1}{2} AUV = \frac{1}{2}$ x. $mx = \frac{1}{2}\frac{1}{2} mx^2$ □R. und der Werth dieses Dreyeckes $= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2} mx^2.\ \varphi}{160}$ fl. Es soll aber dieß Dreyeck eben so viel werth seyn, als die drey Flächen ACC^1; CEE^1C^1 und $EGZE^1$ zusammen, daher wir auch

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2} mx^2\ \varphi}{160} = \frac{amp.\ \alpha}{160} + \frac{bmq.\ \beta}{160} + \frac{cmr.\ \gamma}{160}$$ zu setzen

haben, aus welcher Gleichung folgt

$\frac{1}{2}\varphi . x^2 = a.p.\alpha + b.q.\beta + c.r.\gamma$ und

$$x = \sqrt{\frac{ap\alpha + bq\beta + cr\gamma}{\frac{1}{2}\varphi}}.$$

Wird AP = a, PR = b, RT = c, AO = p; AQ = q und AS = r gesetzt, so finden wir AY = x durch dieselbe Formel.

Da überall zwischen zwey Schenkeln AG und AN der Werth des zwischenliegenden Dreyeckes UAW = dem Werthe der zwischenliegenden Bestandsflächen ACL; CLME und EMNG ist, und da das △ UWA den Werth k fl. erlangen soll und jeder Morgen daselbst φ fl. werth ist, so muß natürlich die Fläche dieses Dreyeckes UWA = $\frac{k}{\varphi}$ Morgen = $\frac{k\ 160}{\varphi}$ □R. werden, in welchem Falle das △ UAW und demnach auch die drey Bestandsflächen ACL; CLME; EMNG zusammen gewiß k fl. werth sind.

V. Anmerkungen. 1) Sind in Fig. 220. die einzelnen Flächen AHF, FHBO, OBKE, EKCD durch besondere Bestandslinien quer durchzogen, so muß die Theilungslinie GIN oder GLP nach den Regeln in IV. gezogen werden. Fig. 220.

2) Wird in Figur 221. die eine Bestandsfläche ACLP eine Blöße, so muß man den Werth α eines Morgens daselbst = o setzen und dann verwandelt sich die in IV. angeführte Formel für x in Fig. 221.

$$x = \sqrt{\frac{bq.\beta + cr\gamma}{\frac{1}{2}\varphi}}.$$

3) Ist der Werth einer Bestandsfläche CLPRME so beschaffen, daß der Werth einer Quadratruthe in der Nähe der Linie CLP = 12 Gr., in der Nähe der Linie EMR = 20. Gr. ist und geht der Werth von der Linie CLP zur Linie EMR allmählig von 12 Gr. in 20 Gr. über, so kann die Theilung nach allen bisher gegebenen Sätzen nicht geschehen. Erst dann, wenn die Lehre von Momenten gegeben ist, wird man im Stande seyn, diese Theilung zu verrichten.

Neuntes Kapitel.

Von Nivelliren und Höhenmessen.

§. 63.

Erklärung der verschiedenen Höhen auf unsrer Erdoberfläche.

Nach §. 19. III. wird eine Kugel gebildet, wenn
Fig. 222. sich eine halbe Kreisfläche FABCDEF Fig. 222. um ihren Durchmesser AF, welcher als feste Axe angesehen wird, bewegt. Das Auswendige dieser Kugel heißt Oberfläche, und diese wird durch die Bewegung der bloßen Kreislinie ABCDEF gebildet.

Unser Weltkörper (die Erde) welchen wir bewohnen, hat zwar eine sehr unebenene Oberfläche, indessen sind die Berge und Thäler auf derselben im Verhältnisse des ganzen Erdkörpers so klein, daß die Hauptgestalt desselben dennoch eine ziemlich regelmäßige Kugel bleibt. Was aber die Hauptgestalt der Erde am meisten ändert und geändert hat ist, daß sie sich um ihre Axe dreht und anfangs weich war, wodurch die Theile am Aequator (§. 19. IV. ꝛc.) sich höher als an den Polen gehoben haben und wodurch die Erde eine an den Polen etwas beigedrückte oder abgeplattete Kugelgestalt erhalten hat. Doch ist der

Durch-

Durchmesser AF an den Polen nur gegen $\frac{1}{300}$ bis $\frac{1}{300}$ kürzer, als der Durchmesser HD des Aequators, was kaum bemerkbar ist. Fig. 222.

Setzen wir den mittlern Radius der Erde = r $20^{6}.000000$ natürliche Fuße, so ihr Umfang ABCDEFGHI = $2r\pi$ und da der Umkreis 360 Grade hat, so ist die Länge eines Grades = $\frac{2r\pi}{360}$

$= \frac{40^{6}.000000 \times 3{,}1415928}{360} = 349066$ Fuße.

Nun sollen 15 deutsche Meilen so lang als ein Grad dieses Umkreises seyn, es ist daher die deutsche Meile $= \frac{349066}{15} = 23271$ nat. Fuße, dagegen der mittlere Erdradius ungefähr 860 deutsche Meilen. Da die thüringer Gebirge nur etwa $\frac{1}{7}$ deutsche Meile, die schweizer gegen $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ und die höchsten Gebirge der Erde (in Neu-Granada und Tibet) kaum eine deutsche Meile hoch sind, so kann man fast überall, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, den Erdradius = 860 deutsche Meilen oder 1000 natürliche Meilen setzen. (Siehe den ersten Band §. 78.).

Wären keine Gebirge vorhanden und die Erde ganz vom Meere umflossen, so würde beym ruhigen Winde die Oberfläche des Meeres ganz eben seyn oder wenigstens uns so vorkommen, und die Erde würde vollkommen die Gestalt einer abgeplatteten Kugel haben; und stünd das Meer nicht höher als jetzt, so würde dieß weit unter unsern Gebirgen weggehen. Die jetzt gedachte Oberfläche des Meeres, welche unter unsern Gebirgen weggeht und über welche Fläche die Gebirge erhaben sind, heißt Meeresfläche. Die Gebirge sind desto höher, je länger die Vertikallinie ist, welche man vom Gipfel derselben bis zur drunter stehenden Meeresfläche gezogen denkt.

Obgleich die Oberfläche ABCDEFG ꝛc. des Meeres gekrümmt ist, so kann doch ein kurzer Bogen desselben als gerad, und eine kleine Fläche desselben als eben angesehen werden. Ueberall steht die

Vertikallinie senkrecht auf dem Meere, nämlich RA oder AO senkrecht auf der zum Punkte A gezogenen Tangente KL und PEO senkrecht auf der zum Punkte E gezogenen Tangente NEM, und alle Körper auf der Oberfläche der Erde haben ein Bestreben nach der Mitte O der Erde hin zu fallen. Ist demnach in B ein Berg, so geht seine Vertikale LB ebenfalls nach der Mitte O hin. Abweichungen, welche durch die abgeplattete Gestalt der Erde veranlaßt werden, kommen beym Nivelliren und Höhenmessen fast gar nicht in Betracht. Die in A und E gezogenen Tangenten KL und MN zeigen zugleich die Lage der Horizontallinien daselbst an.

Fig. 223. Es sey ABC Fig. 223. ein Theil der gewölbten Meeresfläche, welche unter den Gebirgen E und I weggeht, ferner habe man parallel zu ABC die Bögen DEF; GHI und KLM gezogen und senkrecht auf ABC die Vertikallinien GAK, HBL und ICM errichtet, so ist die Höhe des Punktes E über der Meeresfläche (ABC) = EB und die Höhe des Punktes I über der Meeresfläche = IC. Dagegen ist die Tiefe des Punktes K, L oder M unter der Meeresfläche = AK = BL oder CM. Die drey Punkte D; E und F liegen gleichhoch über der Meeresfläche und die drey Punkte G, H und I liegen um DG, EH oder FI höher, als jene drey Punkte D, E und F. Es ist daher der Unterschied der Höhe der beyden Punkte E und I = EH = FI. Es ist einerley, ob man sagt: der Punkt I liegt um FI höher als der Punkt E, oder ob man sagt: der Punkt E liegt um IF oder HE tiefer als I.

§. 64.

Abweichung des Erdgewölbes von einer errichteten Horizontalen.

Fig. 222. I. Aufgabe. Es ist (Fig. 222.) die Entfernung AB zweyer Orte A und B auf unsrer Erdober-

fläche, nämlich der Bogen AB, der aus A parallel zur Fig. 112.
Meeresfläche läuft, gemessen und in B die Vertikale BL errichtet, man soll die Linie BL = c berechnen, welche durch eine im Punkte A errichtete Horizontale AL geschnitten wird.

Auflösung. Es sey der Radius OA = CB der Erde = r, die Länge des Bogens AB = α, so ist $BL = c = \frac{\alpha^2}{2r} + \frac{5\alpha^4}{2.3.4.r^3} + \frac{61\alpha^6}{2.3.4.5.6r^5}$ + &c. Da aber α gegen r immer nur klein seyn kann, weil immer nur ein kleiner Theil der Erdoberfläche übersehbar ist, so kann man ohne merklichen Fehler $c = \frac{\alpha^2}{2r}$ setzen.

Beweis. Nach §. 39. V. und VI. ist $AQ = \cos\alpha = r - \frac{\alpha^2}{2.r} + \frac{\alpha^4}{2.3.4r^3} - +$ &c.

Da nun OQ : OB = OA : OL oder
$\cos\alpha : r = r : OL$, so ist

$$OL = \frac{r^2}{\cos\alpha} = r^2 : \left(r - \frac{\alpha^2}{2r} + \frac{\alpha^4}{2\,3.4.r^3} - +\right)$$

Verrichtet man nun diese Division wirklich, so findet man $OL = r + \frac{\alpha^2}{2r} + \frac{5\alpha^4}{24r^3} +$ &c. und wenn man hiervon OB = r abzieht, so bleibt

$$BL = \frac{\alpha^2}{2r} + \frac{5\alpha^4}{24.r^3} +\text{ &c.} = c.$$

II. Anwendung. Setzen wir r = 20.000000 nat. Fuße und α = 20000 Fuße, so finden wir c = 10 Fuße. Wenn daher der Punkt B von A eine natürliche Meile von 20000000 Fußen entfernt ist, so liegt B unter der Horizontalen AL fast ganz genau 10 Fuße.

Wir können durchaus $c = \frac{d^2}{2r}$ setzen, und dann steht BL mit dem Quadrate der Entfernung AB im Verhältnisse.

Wird nämlich α = 10000 F. = $\frac{1}{2}$. 20000 F. gesetzt, so findet man $c = (\frac{1}{2})^2 . 10 = \frac{1}{4} . 10 =$

Fig. 222. $2\frac{1}{2}$ F., und wird AB = 2 Meilen gesetzt, so ist $c = 2^2 . 10 = 40$ F. Hiernach können wir nun leicht die in folgender Tafel aufgestellten Resultate auswendig wissen.

Tafel

für die Entfernung AB = a nat. Fuße und für die vertikale Höhe BL = c nat. F.

Wenn a =	1000, so ist c =	Fuß.
2000		$\frac{1}{10}$
3000		$\frac{9}{10}$
4000		$\frac{3}{5}$
5000		$\frac{2}{5}$
6000		$\frac{9}{10}$
7000	1,2	
8000	1,6	
9000	2,0	
10000	2,5	
11000	3,0	
12000	3,6	
13000	4,2	
14000	4,9	
15000	5,6	
16000	6,4	
17000	7,2	
18000	8,1	
19000	9,0	
20000	10,	
30000	22,5	
40000	40.	
50000	62,5	
60000	90,	

Setzen wir a = 1 deutsche Meile = 23271 natürliche Fuße, so finden wir BL = c = 13,538. Ist daher B von A eine deutsche Meile entfernt, so ist die Vertikale BL = 13,538 nat. Fuße. Dagegen ist bey 2 Meilen BL = 4 × 13,538 = 54 F.; bey 3 Meilen = 121,8; bey 4 Meilen = 216,6 F.,

bey 5 Meilen = 338,5 F., bey 6 Meilen = 487,4 F.,
— 7 — = 663,4 — — 8 — = 866,4 —
— 9 — = 1096,6 — — 10 — = 1353,8 —

Anmerkung. Eigentlich müßten wir den Punkt O, nämlich AO oder BO, berechnen, wo die beyden Vertikalen AQ und AB zusammen treffen, welcher Punkt bey der abgeplatteten Gestalt der Erde in unsrer Gegend ungefähr $\frac{1}{300}$ entfernter liegt, als der mittlere Erdradius groß ist. Setzen wir aber r wirklich = 20.026700 nat. Fuße, so werden obige Resultate sich wenig verändern.

III. Folgesatz. Wenn gleich B weit unter der Horizontalen AL des Punktes A liegt, so wird doch der Ort B in derselben Meeresfläche AB seyn und demnach B nicht höher und nicht tiefer als A liegen, wenn $BL = \frac{a^2}{2r} = \frac{AB^2}{2.AO}$ ist. Es kann daher ein horizontaler Visirstrahl von einem Berge gezogen weit über einen andern entfernten Berg weggehen, und gleichwohl kann der letzte Berg ungleich höher als der erste seyn.

§. 65.

Berechnung des Höhenunterschiedes h zweyer Orte.

Aufgabe. Bekanntlich ist die Entfernung zweyer Orte A und D von einander nichts anders als der Erdbogen AB Fig. 224., der zwischen den beyden zu A und D gezogenen Vertikallinien AG und DG zu liegen kömmt, und eben so ist auch AB die Entfernung der Punkte C und F von A, weil die zu C oder F gezogene Vertikale CF den Bogen AB in B schneidet. Wenn nun in A die Horizontale AC errichtet und aus A nach D, E oder F visirt und demnach der Erhöhungswinkel CAD oder Vertiefungs- Fig. 224.

Fig. 224. winkel CAE und CAF genau beobachtet wird, so entsteht die Frage, um wie viel der Punkt D höher als der Punkt B oder A liegt, und um wie viel der Punkt E oder F höher oder tiefer als der Punkt A liegt.

Auflösung. Wenn AB = a in natürlichen Fußen gegeben und der Winkel CAD = β zum Punkte D gemessen ist, so wird, weil ein Grad des Bogens AB = 349066 Fuße ist, der Bogen AB und mithin auch der Winkel AGB oder AGD = γ = $\frac{a}{349066}$ Grade haben. Nun ist im Dreyecke GAD die Seite GA = r = 20000000 oder 20026700 nebst den anliegenden Winkeln AGD = γ und GAD = 90 + β bekannt, es wird daher der dritte ∠ ADG = 180 − γ − 90 − β = 90° − γ − β seyn. Es gilt aber in jedem Dreyecke GAD die Proportion

sin D : AG = sin A : GD oder
sin (90° − γ − β) : r = sin (90 + β) : GD
oder cos (γ + β) : r = cos β : GD, daher

$$GD = \frac{r.\cos\beta}{\cos(\beta+\gamma)} \text{ und}$$

$$BD = GD - GB = \frac{r\cos\beta}{\cos(\beta+\gamma)} - r = h.$$

Ist der Winkel CAE = β gegeben, so ist ∠ GAE = 90 − β, der ∠ AGE aber wie vorher = γ und mithin der dritte Winkel AEG = 180 − 90 + β − γ = 90 − γ + β und im Dreyecke GAE verhält sich

sin E : AG = sin A : GE oder
cos (γ − β) : r = cos β : GE, wo

$$GE = \frac{r.\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)} \text{ und}$$

$$BE = \frac{r.\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)} - r = h$$

Ist hier β = 0, so findet man h = BC = $\frac{r^2}{\cos\gamma} - r$.

Wird aber $\beta = L\,CAB = \frac{1}{2}\,L\,AGB = \frac{1}{2}\,\gamma$ gesetzt, so ist $h = \frac{r.\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} - r = r - r = o$, und es liegt in diesem Falle der Punkt B in derselben Meeresfläche AB, oder in demselben Erdbogen AB, wie der Punkt A. Ist aber β größer als $\frac{1}{2}\gamma$, z. B. $\beta = L\,CAF = \frac{1}{2}\gamma + \delta$, so wird $h = \frac{r.\cos(\frac{1}{2}\gamma + \delta)}{\cos(\frac{1}{2}\gamma - \delta)} - r = BF$ und h offenbar negativ seyn, weil $\cos(\frac{1}{2}\gamma + \delta)$ kleiner als $\cos(\frac{1}{2}\gamma - \delta)$ und demnach auch $\frac{r.\cos(\frac{1}{2}\gamma + \delta)}{\cos(\frac{1}{2}\gamma - \delta)}$ kleiner als r ist.

Um demnach den Unterschied h der Höhen BD, BC, BE, BF zu finden, wird $AB = \alpha$ in natürlichen Fußen ausgedrückt, der Winkel $CAD = \beta$ oder $L\,CAE = \beta$ oder $L\,CAF = \beta$ über oder unter der Horizontalen AC gemessen, $\frac{\alpha}{349066} = \gamma$ Grade gesetzt und h aus der Formel

$$h = \frac{r.\cos\beta}{\cos(\gamma \pm \beta)} - r$$

berechnet, wo $+\beta$ gilt, wenn CAD ein Erhöhungswinkel ist, und $-\beta$ gilt, wenn CAE, CAB, CAF $= \beta$ Vertiefungswinkel sind und wo $r = 20^{6}.000000$ nat. Fuße ist.

Anmerkung. Liegen A und B Fig. 222. gleich hoch über der Meeresfläche AB und zieht man in A die Vertikale AR und in B die Vertikale BL und zieht man ferner in A die Tangente oder Horizontale AL und in B die Horizontale BR; so werden die dadurch abgeschnittenen Stücke BL und AR der Vertikalen einander gleich seyn, indem man den kurzen Bogen AB als Kreisbogen ansehen darf. Fig. 222.

§. 66.

Errichtung eines horizontalen Visirstrahls.

Dieß kann auf mehre Arten geschehen, jedoch ist die eine Art nur in dem Falle zu gebrauchen, wenn es auf eine große Genauheit nicht ankommt.

Fig. 225. 1) Ein horizontaler Visirstrahl IK Fig. 225. kann mittelst einer sehr gerad abgehobelten und durch eine Libelle horizontal gerichteten Latte EF, woran man wegvisirt, gezogen werden, welche Latte man an vertikalen Stäben AB und CD, worin man Nagelbohrer in G und H eingeschroben hat, festhält und worauf die Latte EF ruht. Natürlich wird zuerst nur ein Nagelbohrer G fest eingeschroben, darauf das eine Ende der Latte EF gelegt und das andere Ende F derselben so weit gehoben oder niedergelassen, bis die Luftblase der darauf gesetzten Libelle in der Mitte steht, in welcher Lage der Latte man sodann auch den zweyten Nagelbohrer in H einschraubt, die Latte darauf ruhen läßt, und, wenn jetzt nicht mehr die Luftblase ganz in der Mitte stehen sollte, den Bohrer etwas auf- oder niederwärts biegt. Visirt man nun jetzt über die horizontal gerichtete Latte FE nach einen ziemlich weit ausgesetzten Stab LI, und über EF nach einem weit ausgesetzten Stab MK, und bemerkt man an diesen Stäben die Punkte I und K, welche durch die Visirstrahlen FI und EK getroffen werden, so ist auch IK horizontal.

Fig. 227. 2) Viel genauer kann man einen horizontalen Visirstrahl ABF Fig. 227. mittelst eines hellen, stark vergrößernden Fernrohrs AB ziehen, worauf eine sehr empfindliche, mit Queckſilber gefüllte Libelle CD befestiget und diese durch eine Richtschraube in E gegen das Rohr so gelegt ist, daß wenn man daß Fernrohr (das wie beym Visirinstrumente in einem vertikalen Kreise AGB beweglich ist) in eine solche Lage bringt, wo die Luftblase der Libelle genau in der Mitte

steht, sodann auch die Axe AB des Fernrohrs horizontal liegt.

Ob ein solches Fernrohr, das nach der jetzt beschriebenen Libelle gerichtet wird, auch einen horizontalen Sehstrahl ABF getreu anzeigt, kann man dadurch untersuchen, daß man zuerst einen horizontalen Sehstrahl IK Fig. 225. mittelst der vorhin beschriebenen Latte zieht, das Fernrohr nachher in I aufstellt und dann Achtung gibt, ob es nach demselben Punkt K eines entfernt gesetzten Stabes MK hinzielt. Sollte hier ein merklicher Unterschied obwalten, so wird das Fernrohr in I genau auf den Punkt K gerichtet und die Libelle in eine solche Lage gebracht, daß ihre Luftblase richtig in der Mitte steht. Nachdem nun auf diese Art das Fernrohr mit der Libelle der Hauptsache nach berichtiget ist, so wird noch folgende Probe anzustellen seyn. Fig. 225.

Man wähle eine Gegend ABC Fig. 226., wo man von einem entfernten Hügel BA zum andern BC horizontale Sehstrahlen GHD und EFI so ziehen kann, daß sie die in C und A vertikal ausgesetzten Stäbe CD und AI treffen; stelle in A das Fernrohr GH mit dem zugehörigen Stative AK richtig nach der darauf befestigten Libelle auf, visire durchs Rohr und bemerke den Punkt D des entfernt ausgesetzten Stabes CD, als wohin das Fadenkreuz des Fernrohrs zielt, und bemerke zugleich auch den Punkt K an einem darneben gesetzten Stabe AI, welcher mit der Axe des Fernrohrs gleichhoch steht. Jetzt suche man auf einem geometrischen Wege die Entfernung AC = a natürliche Fuße und berechne hierzu nach vor. Par. die Abweichung h des Erdgewölbes, mache am Stabe AI die aufwärts gemessene Linie KI = h, ingleichen auch die am Stabe CD vom Punkte D abwärts gemessene Linie DL = h; bringe das Fernrohr EF in den Punkt L oder in eine gleiche Höhe mit demselben, stelle das Rohr nach der Libelle richtig und visire aus L nach den Stab AI; so muß jetzt der Visirstrahl EFI den am Stabe AI vorgezeichneten Punkt I treffen; geschieht dieß nicht und geht der Visirstrahl et- Fig. 226.

was höher oder tiefer nach m oder n, so wird Im oder In in der Mitte aufgetheilt (nämlich der I. ILm oder ILn halbirt) auf diesen Halbirungspunkt das Fernrohr EF gerichtet und die Libelle so geschroben, daß die Luftblase genau in der Mitte steht. Jetzt ist nun das Nivellirinstrument (das Fernrohr mit der Queckſilberlibelle) in einem sehr brauchbaren Stande, ob es ganz richtig zeigt, wird man bald gewahr, wenn man die vorige Arbeit wiederholt.

Anmerkung. Meistens ist es der Fall, daß der Punkt L zu hoch oder zu tief über der Erde hinfällt und daß man das Fernrohr nicht genau in diesen Punkt L aufstellen kann, sondern dasselbe um ein oder etliche Fuße und Zolle tiefer oder höher aufstellen muß. Wird das Fernrohr FE um a Zolle tiefer oder höher als L aufgestellt, so muß man nachher am Stabe AI auch den Punkt K aus welchem man AI = h abmißt, um a Zolle tiefer oder höher setzen.

Zweyte Anmerkung. Um einen aus A abvisirten Punkt D an einer weit entfernt stehenden hohen Stange CD sichbar zu machen und denselben in der Höhe richtig zu bezeichnen, bedient man sich eines in Feldern eingetheilten farbigen Schildes von der Form Fig. 228., inwendig mit einem Kreuze, das seine breite Fläche nach A hinweist und mittelst in Falsen eingelegte an einander geklammerte Leisten in die Höhe und Tiefe geschoben werden kann und wodurch man zugleich die Fuße in CD abmißt. Ob dieß Schild gehoben oder niedergelassen werden soll, muß man aus den vorher verabredeten und nachher in A mit Fahnen gemachten Singnalen erkennen.

Fig. 226. Fig. 228.

§. 67.

Den Höhenunterschied zweyer Orte zu finden, wenn man nicht aus einem zum andern sehen kann.

Aufgabe. Den Höhenunterschied zweyer Orte A und S Fig. 229. zu finden, welche nicht nur fern

Fig. 229.

von einander liegen, sondern wo zugleich auch die Aus- Fig. 229.
sicht von einem zum andern versperrt ist.

Auflösung. Man pfähle zuerst einen Weg aus, der von A nach S führt, setze aber einen Pfahl AB nach dem andern CD so, daß man durch ein darzwischen aufgestelltes Instrument T einen horizontalen Visirstrahl BC von einem Stabe zum andern ziehen kann; ziehe dergleichen horizontale Visirstrahlen DE, FG, HI, KI, MN, OP, QR zwischen einem jeden vorhergehenden und folgenden Stab CD und EF; EF und HG; HG und HI ꝛc. durch ein zwischen gesetztes Instrument T, U, V ꝛc. messe AB, CD, EF, GH, IK, LM, NO, PQ und RS nach Fußen und Zollen, setze die aufwärts gehenden Höhen AB, CD, EF, LM, NO ꝛc. positiv, und die niederwärts gehenden Höhen GH, IK, RS negativ, so wird man aus der Reduktion der Glieder + AB + CD + EF — GH — IK + LM + NO + PQ — RS den Höhenunterschied x der beyden Orte A und S finden, wobey zu merken ist, daß wenn man aus der Reduktion einen positiven Werth erhält, auch sodann S höher als A liegt; im Gegentheile liegt S tiefer als A, wenn sich die genannten Glieder auf eine negative Größe reduciren.

An der Richtigkeit dieser Behandlung zweifelt niemand, der da bedenkt, daß B und C, D und E, F und G, H und I ꝛc. gleichhoch liegen und daß B und C um BA höher als A, daß D und E um AB + CD, und FG um AB + CD + EF höher als A, dagegen aber HI um AB + CD + EF — GH höher als A liegt, u. s. f. Auch dürfen wir nicht unbemerkt lassen, daß wenn das Nivellirinstrument V mitten zwischen den Stäben EF und HG aufgestellt wird, sodann die Abweichung h des Erdgewölbes weiter nicht in Betracht kömmt, sollte aber das Instrunahe an einem Stabe und fern von andern aufgestellt werden, so muß man das Visirzeichen am letzten Stabe um h tiefer herunter setzen, wenn nämlich den

letzte Stab wenigstens 1000 Fuße vom Instrumente entfernt steht, sonst kömmt h auch hier nicht in Betracht. Uebrigens versteht sichs von selbst, daß wenn man aus H nach N sehen kann, man die gesetzten Stäbe Kl und LM nicht nöthig hat.

Was endlich die Entfernung der Stäbe betrifft, die man unter manchen Umständen zu wissen begehrt, so muß sich diese aus der geometrischen Aufnahme der Gegend oder des Weges, welcher abnivellirt werden soll, ergeben.

Anmerkung. Wie man die Höhenunterschiede sehr weit entfernter Orte mittelst des Barometers sehr leicht entdecken könne, soll in der Mechanik gezeigt werden. Es sind aber dergleichen Messungen mittelst des Barometers auch nicht ganz sicher und genau genug.

§. 68.

Anhang,

welcher einige Aufgaben zur Forstkultur enthält.

Erste Aufgabe. Wenn man die Holzpflanzen a Fuß weit von einander in Reihen setzt und die Reihen ebenfalls auch a Fuße weit von einander
Fig. 230. macht, wie die Punkte in Fig. 230. ausweisen, so entsteht die Frage, wie viel Holzpflanzen auf einen Morgen von 160 □R. gehen, wenn die Ruthe 12 Fuße lang ist.

Auflösung. Zieht man Linien AB, CD, EF, GH, welche mitten zwischen je zwey Reihen durchgehen, so erhält man ein Quadrat IMLK, welches offenbar die zu einer einzelnen Pflanze nöthige Fläche an-

zeigt. Da nun der Morgen 160 □R. = 160 × 12. 12 □ Fuße enthält und jede Pflanze eine Fläche IKLM = IK × KL = a. a = a^2 □ Fuße bedarf, so findet man die Zahl x der Pflanzen, wenn man die Quadratfuße eines Morgens durch die Quadratfuße einer Pflanze dividirt, weshalb Fig. 230.

$$x = \frac{160.\ 12.\ 12}{a^2} = \frac{23040}{a^2}.$$

Werden demnach die Pflanzen 4 Fuße weit von einander gesetzt, so gehen auf den Morgen $\frac{23040}{16} = 1440$ Pflanzen.

Wäre die Ruthe 14 Fuße lang und der Morgen ebenfalls 160 □R. groß, so würden auf den Morgen

$$x = \frac{160.\ 14.\ 14}{a^2} = \frac{31360}{a^2}$$ Pflanzen

gehen.

Zweyte Aufgabe. Wie viel Pflanzen gehen auf einen Morgen, wenn sie a Fuße weit von einander in Verband gesetzt werden.

Antwort. Ist die Ruthe 12 Fuße lang und werden 160 □R. auf den Morgen gerechnet, so findet man die gesuchte Zahl x der Pflanzen aus

$$x = \frac{160 \times 12.\ 12}{a^2 \times 0{,}8660254} = \frac{26604}{a^2}.$$

Ist aber die Ruthe 14 Fuß lang, so ist

$$x = \frac{160 \times 14.\ 14}{a^2 \times 0{,}8660254} = \frac{36211}{a^2}.$$

Beweis. In Verband (Quincunx) pflanzen heißt die Pflanzen a, b c, d, e, f Fig. 231. so setzen, daß allemal je drey Pflanzen dae; abe, ebf ꝛc. ein gleichseitiges Dreyeck ausmachen. Zieht man nun hier ebenfalls Linien AB, CD, FE und HG, welche mitten zwischen je zwey Reihen durchgehen, so erhält man eine Raute IKLM, welche aus zwey gleichseitigen Dreyecken IKM und MLK besteht und welche Raute IKLM zugleich die Fläche einer einzelnen Fig. 231.

Pflanze anzeigt. Ist aber die Entfernung der Pflanzen = a Fuße, so ist auch IK = a und IM = MK = a Fuße und wenn aus M eine Senkrechte MN = h gefällt wird, IN = NK = $\frac{1}{2}$ a und $MI^2 = \frac{1}{4} a^2$. Da nun $MN^2 = MI^2 - NI^2$ oder $h^2 = a^2 - \frac{1}{4} a^2 = \frac{3}{4} a^2$, so ist

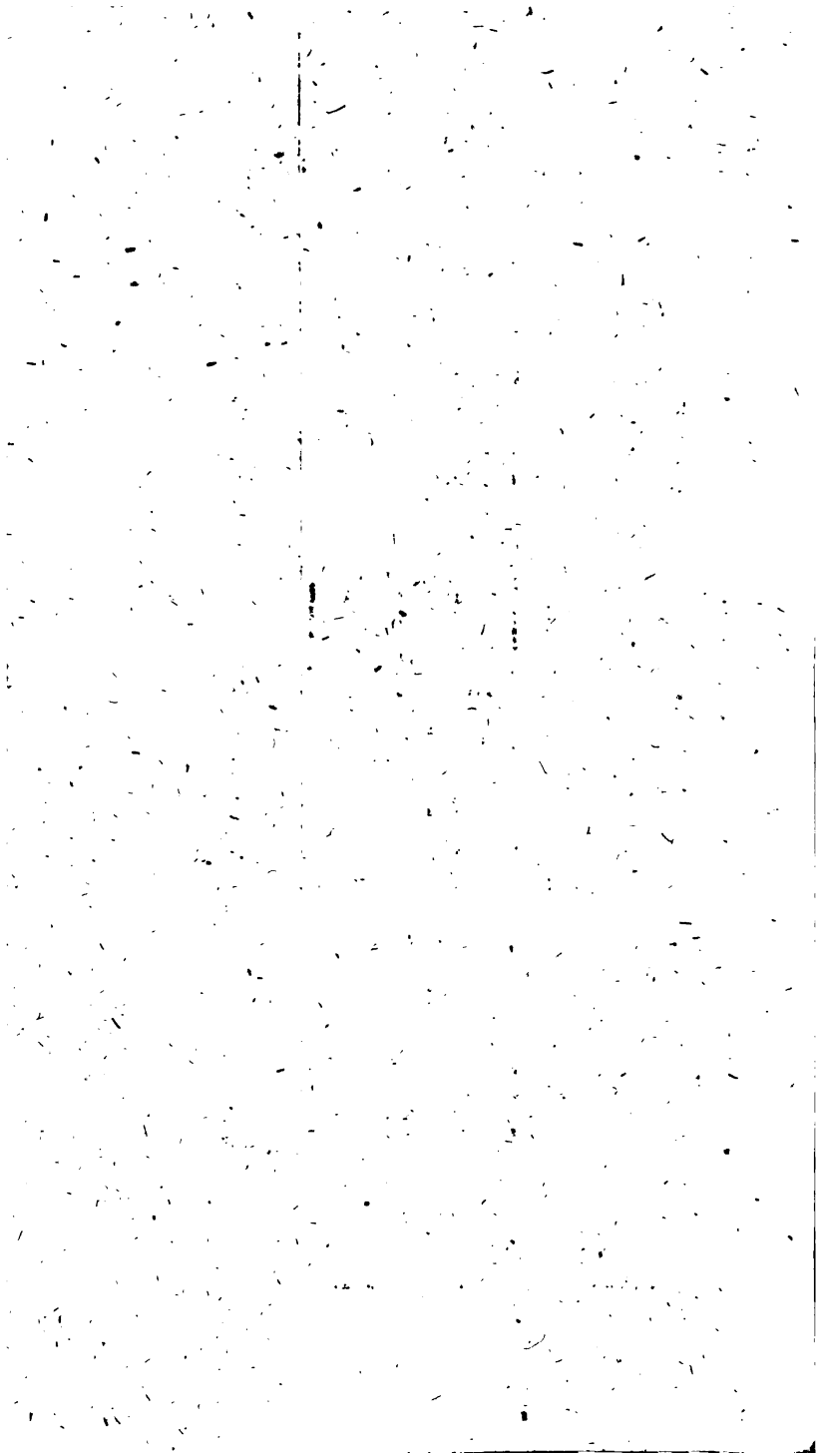
$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a \times 1{,}7320508}{2} =$$

a = 0,8660254 und die Fläche IKLM einer Pflanze = IK × NM = a. h = a × a × 0,8660254 = a^2 × 0,8660254 □F. dividirt man nun mit dieser Fläche einer Pflanze in die Fläche eines Morgens = 160 × 12. 12 □F., so erhält man die Zahl = der Pflanzen = $\frac{160.\ 12^2}{a^2 \times 0{,}8660254}$.

Da man in steinigen oder felsigen Boden die Pflanzen an eine solche Stelle setzt, wo man Erde findet, so können daselbst derley Berechnungen nicht zutreffen.

Zugehörige Horizontale.

Winkel	Cosinus	Winkel	Cosinus
0° 0′	0,880	32°52′	0,840
2°34′	0,879	= 58′	0,839
3°37′	0,878	33° 4′	0,838
4°26′	0,877	= 11′	0,837
5° 8′	0,876	= 17′	0,836
5° 44′	0,875	33°23′	0,835
6° 17′	0,874	= 29′	0,834
= 47′	0,873	= 36′	0,833
7° 15′	0,872	= 42′	0,832
= 44′	0,871	= 48′	0,831
8° 7′	0,870	33°54′	0,830
= 30′	0,869	34° 0′	0,829
= 53′	0,868	= 6′	0,828
9 °15′	0,867	= 12′	0,827
= 36′	0,866	= 19′	0,826
9° 56′	0,865	34°25′	0,825
10°16′	0,964	= 31′	0,824
= 34′	0,863	= 37′	0,823
= 53′	0,862	= 43′	0,822
11°11′	0,861	= 49′	0,821
11°29′	0,860	34°54′	0,820
= 46′	0,859	35° 1′	0,819
12° 2′	0,858	= 7′	0,818
= 19′	0,857	= 13′	0,817
= 35′	0,856	= 19′	0,816
12°50′	0,855	35°25′	0,815
13° 6′	0,854	= 31′	0,814
= 21′	0,853	= 37′	0,813
= 35′	0,852	= 42′	0,812
= 50′	0,851	= 48′	0,811
14° 4′	0,850	35°54′	0,810
= 18′	0,849	36° 0′	0,809
= 32′	0,848	= 6′	0,808
= 46′	0,847	= 12′	0,807
= 59′	0,846	= 18′	0,806
15°12′	0,845	36°23′	0,805
= 25′	0,844	= 29′	0,804
= 38′	0,443	= 35′	0,803
= 51′	0,842	= 41′	0,802
16° 3′	0,841	= 46′	0,801
		= 52′	0,800



Anzeige der Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 4. von unten Z. 4. fehlt vor dem Wörtchen wenn das Wörtchen und.
S. 7. v. u. Z. 7. streiche man das Komma nach etwas weg.
S. 16. v. u. Z. 10. setze zu Ende der Zeile nach zugleich ein Komma.
— 19. v. o. Z. 11. statt geraden Linien — lies — gerade Linien CP, ꝛc.
— 25. v. u. Z. 5. st. sollte l. sollten.
— 28. v. o. Z. 20. st. eine unten, l. eine vertikale, unten.
— 28. v. u. Z. 12. st. Mittelröhre l. Metallröhre.
— 28. v. u. Z. 1. st. schnitten l. schnittenen.
— 29. v. u. Z. 8. st. verwechselt l. verwechsele.
— 34. v. o. Z. 12. st. Grade l. Gerade.
— 41. v. o. Z. 10. st. auf der l. auf den.
— 41. v. u. Z. 4. l. Metallplatte.
— 42. v. o. Z. 7. st. CF l. OF.
— 44. v. o. Z. 8. st. nach D, l. nach G.
— 44. v. o. Z. 15. st. zu liegen kommen l. zu liegen kömmt.
— 45. v. u. Z. 17. st. um l. nun.
— 47. v. o. Z. 22. st. AB, l. OB.
— 48. v. u. Z. 16. st. dieses l. diese.
— 50. v. o. Z. 18. streiche durch weg.
— 51. v. u. Z. 13. streiche den weg.
— 53. v. o. Z. 3. muß seyn: Geht (Fig. 25.) die Gradeintheilung ꝛc.
— 58. v. u. Z. 10. st. berechnen l. bewohnen.
— 66. v. u. Z. 15. st. eine horizontale Richtung l. einen horizontalen Fuß.
— 67. v. o. Z. 16. st. LN. l. LM.
— 68. v. u. Z. 20. l. Fadenkreuz.

S. 69 v. u. Z. 20. st. NGO l. MGP.
— 70. v. o. Z. 18. st. wigt l. neigt.
— 70. v. u. Z. 2. st. MKI. l. KMI.
— 74. v. u. Z. 11. ersehen l. versehen.
— 77. v. u. Z. 19. st. broben l. derb.
— 79. v. o. nach der Zeile 14. kann eingeschaltet werden: Ist der Fuß des Visirinstrumentes mit Stellschrauben versehen, so kann dadurch die begehrte Berichtigung am leichtesten geschehen.
— 79. v. u. Z. 9. nach erhalten ist einzuschalten: oder geschroben werden.
— 81. v. o. Z. 10. streiche das Komma nach vollkommen weg.
— 82. v. o. Z. 11. statt: auf dem Punkte l. pünktlich.
— 86. v. o. Z. 16. st. auswachen l. ausmachen.
— 88. v. o. Z. 5; 8, 10, 13. statt des griechischen χ muß das lateinische x stehen.
— 89. v. o. Z. 21. st. FG. l. FQ.
— 89. v. u. Z. 12. st. GHW. l. GFW.
— 90. v. u. Z. 21. st. Erdpunkte — l. Endpunkte.
— 90. v. u. Z. 1. muß das letzte Wort seyn: so ist.
— 93. v. o. Z. 10. st. ABC — l. APC.
— 93. das unter Nr. 2. gegebene Beyspiel gehört zu Nr 3.
— 93. v. u. Z. 9. st. sin (α-90). l. — sin (α — 90).
— 95. v. u. Z. 20 st. ziehen l. zielen.
— 95. v. u. Z. 2. st. DOF. l. DOE.
— 96. v. o. Z. 1. st. OF. l. OT.
— 96. v. o. Z. 20. st. beschriebt — l. — beschreibt aus O.
— 97. v. o. Z. 7. st. TU. . l. . DU.
— 97. v. o. Z. 11. st. DF und — DF . . lies . . DT und — DT.
— 97. v. o. Z. 17. st. = cot (360 — α) . . m. s... = — cot. (360 — α)
— 101. v. u. Z. 15. st. worden l. werden.
— 102. v. u. Z. 6. st. GD . . . . l. GB.
— 103. v. u. Z. 13. st. einer Parallelen l. von einer Parallelen.
— 104. v. o. Z. 13. st. andern Drepeckes l. andern Dreyeckes GCB.

S. 107. v. o. Z. 5. st. AEB = α l. AEB = β Grade.
— 107. v. o. Z. 6. st. beyde = β l. beyde = α.
— 111. auf dem Rande muß Fig. 53. st. 35. stehen.
— 111. v. o. Z. 16. st. AH auf BG l. AH ⊥ auf BG.
— 112. v. u. Z. 5. streich das Wörtchen von nach Halbkreis weg.
— 115. auf dem Rande setze man Fig. 54. st. Fig. 45.
— 118. v. u. Z. 2. st. DNC. l. PNC.
— 119. v. o. Z. 3. st. NCE. l. NCP.
— 120. v. u. Z. 20. st. FOD. l. TOD.
— 121. v. u. Z. 9. st. BH. l. BG.
— 121. v. u. Z. 4. st. welches l. daher.
— 122. v. o. Z. 10. st. des Winkel l. des Winkels B.
— 122. v. o. Z. 20. st. demnach l. es wäre demnach.
— 124. v. u. Z. 13. st. VI. l. VII.
— 125. v. o. Z. 1. st. VII. l. VIII.
— 126. v. o. Z. 5. DF = DB ist undeutlich gedruckt.
— 127. v. u. Z. 2. st. größe l. Größe.
— 128. v. o. Z. 20 u. 21. muß seyn: Sollte das Zeichen □R. keinen Platz finden, so kann dafür R^2 gesetzt werden.
— 131. v. o. Z. 2. st. — △ CBI l. — △ ABI.
— 131. v. u. Z. 12. st. Verlängerung CE l. Verlängerung CD.
— 133. v. u. Z. 2 u. 3. st. $\frac{s}{\frac{1}{2}DE}$ m. s. $\frac{s}{\frac{1}{2}DF}$, und st. $\frac{2s}{DE}$. m. s. $\frac{2s}{DF}$.
— 134. v. o. Z. 10. st. BG. l. BC.
— 134. v. o. Z. 11. Punkt l. Punkt I.
— 137. v. o. Z. 13. m. s. AB, BC, CD, DE ꝛc.
— 137. v. u. Z. 18. st. EG, l. CG.
— 138. v. u. Z. 11. m. s. AQ : RQ = AB : BF.
— 143. v. o. Z. 2. st. = OC l. 01.
— 143. v. u. Z. 2. st. 01 H l. 01.
— 145. v. o. Z. 18. st. Stab l. Stab I.
— 147. v. o. Z. 6. st. BAC = bac. m. s. BCA = bca.

S. 147. v. u. Z. 13. st. hobbon sogenannte m. s. wovon das eine sogenannte.
— 148. v. o. Z. 16. st. OA m. s. als CA.
— 148. v. u. Z. 15. st. EFA. l. EIA.
— 149. v. u. Z. 19. st. DGFT m. s. DGEF.
— 149. v. u. Z. 10. st. 6. l. b.
— 149. v. u. Z. 6. st. CB. l. SB.
— 150. v. o. Z. 6. st. so würde m. s. so würde man.
— 150. v. u. Z. 9. st. da FA m. s. FK.
— 152. v. u. Z. 5. st. Nebenwinkel m. s. Ergänzungswinkel.
— 153. v. u. Z. 11. st. BC + $\sqrt{}$, m. s. BC = $\sqrt{}$.
— 153. v. u. Z. 7. st. AC^2 — BC. m. s. AC^2 — BC^2.
— 155. v. u. Z. 10. st. △ BKG m. s. BHG.
— 159. auf dieser ganzen Seite muß V statt I gesetzt werden.
— 162. v. o. Z. 3. m. s. $s = \sqrt{\frac{2ac}{d}}$,
— 164. v. o. Z. 13. st. Dreyecke BAE m. s. Dreyecke BAF.
— 166. v. o. Z. 12. m. s. $\angle DAB = \angle GDC = \beta$.
— 167. hier muß überall DV statt DI und überhaupt V statt I stehen.
— 167. v. u. Z. 7. m. s. längerung in B schneidet und wenn.
— 168. v. o. Z. 4. m. s. $y = -n + \sqrt{n(n + 2a)}$.
— 169. v. o. Z. 14 u. 15. m. s. $y + n = \sqrt{n(n + 2a)}$ und $y = -n + \sqrt{n(n + 2a)}$.
— 169. v. o. Z. 19 u. 20. m. s. $\sqrt{KA \times (2BK - KA)} = \sqrt{m(2d + 2m - m)}$, $= \sqrt{m(m + 2d)}$ und
— 169. v. o. Z. 22. m. s. $AI = m + \sqrt{m(m + 2d)} = x$.
— 169. v. u. Z. 5. m. s. die Fläche $s = \sqrt{u(u - a)(u - b)(u - c)}$.
— 173. v. o. Z. 2. m. s. $r^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, woher
— 173. v. u. Z. 9. m. s. 13) $\sin\alpha = \sqrt{r^2 - \cos^2\alpha}$.

S. 173. v. u. Z. 8. m. f. $= \frac{r \cdot \text{tang } \alpha}{\sqrt{(r^2 + \text{tang}^2 \alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 7. m. f. $= \frac{r \sqrt{(\sec^2 \alpha - r^2)}}{\sec \alpha}$

$= \frac{r^2}{\text{cosec } \alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \cot^2 \alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 6. m. f. 14) $\cos \alpha = \sqrt{(r^2 - \sin^2 \alpha)}$ $= \text{ꝛc.}$

— 173. v. u. Z. 5. m. f. $\frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \text{tang}^2 \alpha)}} =$

$\frac{r \cdot \cot \alpha}{\text{cosec } \alpha} = \frac{r \cdot \cot \alpha}{\sqrt{(r^2 + \cot^2 \alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 4. m. f. $\frac{r \sqrt{(\text{cosec}^2 \alpha - r^2)}}{\text{cosec } \alpha}$

— 173. v. u. Z. 3. m. f. 15) $\text{tang } \alpha = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} =$

$\frac{r \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(r^2 - \sin^2 \alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 2. m. f. $= \frac{r \sqrt{(r^2 - \cos^2 \alpha)}}{\cos \alpha} = \text{ꝛc.}$

— 173. v. u. Z. 1. m. f. $\sqrt{(\sec^2 \alpha - r^2)} =$

$\frac{r^2}{\sqrt{(\text{cosec}^2 \alpha - r^2)}}$

— 175. v. u. Z. 6. ſt. $=$ L DBC m. f. $=$ L BCA.

— 176. v. o. Z. 10. nach Fig. 84. ſchalte man ein: Tab. XI.

— 177. v. o. Z. 2. ſt. CF l. CG.

— 177. v. o. Z. 7. ſt. in M. m. f. in der Mitte M.

— 177. v. u. Z. 15. ſt. HE l. AE.

— 179. v. u. Z. 15. ſt. HK l. AK.

— 181. v. u. Z. 4. ſt. $= \frac{EE \times (AD + DC)}{2}$

m. f. $= \frac{EF \times (AB + DC)}{2}$

— 182. v. o. Z. 9. m. f. KC : FE $=$ IG : LE oder.

— 182. v. u. Z. 15. ſt. $=$ AM $\times$ EG l. $=$ AM $\times$ EF.

S. 182. v. u. Z. 11. ſt. Mitte F m. ſ. Mitte G.
— 183. v. o. Z. 13. ſt. ABCF m. ſ. EBCF.
— 184. v. u. Z. 3. ſt. T und R m. ſ. T und Q.
— 185. v. o. Z. 5. ſt. aus oder K m. ſ. aus G oder K.
— 185. v. u. Z. 5. ſt. $=$ △ HGH. m. ſ. △ ACH.
— 186. v. o. Z. 4. m. ſ. $\frac{AT^2}{AR} = RA + \frac{2.s}{CH}$
— 186. v. o. Z. 6. ſt. $AF = \sqrt{}$ m. ſ. $AT = \sqrt{}$.
— 187. v. o. Z. 5. ſt. $AF = \frac{2.s}{CI}$ m. ſ. $HF = \frac{2.s}{CI}$.
— 187. v. o. Z. 7. ſt. $\left[\frac{AH + 2s}{CI}\right]$ AH m. ſ.
$\left[AH + \frac{2.s}{CI}\right] \times AH.$
— 189. v. o. Z. 3. ſt. UEFS m. ſ. UEFT.
— 189. v. u. Z. 8. ſt. „von Ω„ l. von XΩ.
— 190. v. o. Z. 8 ſt. $\frac{s}{UB}$ l. $\frac{s}{UE}$
— 191. v. o. Z. 6. ſt. EL $= x$ l. FL $= x$.
— 191. v. o. Z. 8. m. ſ. $\sqrt{\left[a^2 - \frac{2.s\,(s-b)}{c}\right]}$ und ꝛc.
— 192. v. o. Z. 5. m. ſ. $y = \sqrt{\left(a^2 + \frac{2.s\,(b-a)}{c}\right)}$
— 193. v. o. Z. 13. m. ſ. in $y = \sqrt{\left(a^2 - \frac{2s(s-b)}{c}\right)}$
— 195. v. o. Z. 11. ſt. SGKU m. ſ. SGHT.
— 196. v. o. Z. 6. ſt. BC l. RC.
— 198. v. o. Z. 6. füge hinten und am Rande an: Fig. 94.
— 198. v. o. Z. 21. ſt. FCG l. ECG.
— 200. am Rande muß Fig. 90. ſt. Fig. 84. ſtehen.
— 202. v. o. Z. 10. m. ſ. lellinien HL zu FB und FM zu BD, ſo ꝛc.
— 202. v. u. Z. 9. m. ſ. ſo ſetze man $\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{GB} + \frac{AC}{FC}\right)$ $= p$ und ꝛc.
— 206. v. o. Z. 18. m. ſ. Da nun △ OCK ∽ △ OEL, ꝛc.

S. 212. v. o. Z. 5. m. f. 42. $\frac{\cos\gamma + \cos\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} =$
$\frac{\cot\frac{\pi}{2}(\gamma+\delta).\cos\frac{\pi}{2}(\gamma-\delta)}{r^2}$

— 214. v. o. Z. 10. m. f. 59. $r^2 + \tan g^2\alpha = \frac{r^4}{\cos^2\alpha}$.

— 218. v. o. Z. 3. zu Ende muß ſtatt + ꝛc. ſtehen: — + ꝛc.

— 218. v. u. Z. 8. ſtreiche zu Ende der Zeile das Zeichen: hinter + weg.

— 220. in den Formeln nach Zeile 8. darf nur einmal o = und nur ein vertikaler Bogen vorgezogen ſeyn.

— 220. v. u. Z. 14. ſt. α l. a.

— 220. v. o. Z. 7. ſtreiche in $a^7 = \ldots\ldots$: $\sin^7\alpha + $ ꝛc. das Zeichen : weg.

— 220. v. o. Z. 10. ſt. α. $\sin^3\alpha$ m. f. a. $\sin^3\alpha$.

— 225. Die Formel zu Ende dieſer Seite rechts des vertikalen Bogens muß dieſelbe Geſtalt haben, wie die folgende Formel auf Seite 225. XIV.

— 233. v. u. Z. 10. ſt. BB m. f. AB.

— 234. v. u. Z. 15. m. f. AC oder CA.

— 239. v. u. Z. 16. ſt. Log. 64°46′ m. f. Log. sin 64°46′.

— 240. v. u. Z. 15. ſt. A und E m. f. A und C.

— 245. v. u. Z. 12. zu Ende ein Komma ſtatt eines Punktes.

— 247. v. u. Z. 3. m. f. $\sqrt{b^2+c^2-2bc+\frac{2^8.bc.\sin^2\frac{\pi}{2}\alpha}{r^2}}$

— 252. v. o. Z. 8. ſt. B oder γ m. f. C oder γ.

— 256. v. o. Z. 7. m. f. sin C = sin (180 — C) = $\frac{AB.\sin A}{BC}$.

— 259. v. u. Z. 1. ſt. CA m. f. CH.

— 262. v. o. Z. 15, ſt. ABD = δ. m. f. ABC = δ.

— 266. v. o. Z. 10. zu Ende ſt. DCA = β m. f. DCB = β.

— 271. v. o. kann nach Zeile 5. eingeſchaltet werden: Wenn k = λ und ψ = 90°, ſo iſt

$\cot \varpi = \frac{\cot 90^0 \times \sin 2\lambda}{\sin 0^\circ} = \frac{0}{0}$ und demnach ϖ eine willkührliche Größe, weshalb auch in diesem Falle der vierte Ort D unbestimmt, nämlich $\varphi = \psi - \omega$ und $\mu = \psi + \omega$ ist.

— 273. v. o. Z. 3. muß seyn: $\frac{a \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha \times \sqrt{2n}}{r}$.

— 273. v. o. Z. 14. m. s. vorhin $\frac{nr}{m} = \cos \alpha$, so ist

— 278. v. o. Z. 6. m. s. $mx^2 + ax + b = 0$.

— 280. v. u. Z. 12. m. s. $L\sqrt{mb} = $ ꝛc.

— 282. v. u. Z. 15. m. s. Wenn hier p positiv ꝛc.

— 282. v. u. Z. 13. m. s. diesem Wege nicht geschehen.

— 287. v. o. Z. 5. st. $u = \frac{x}{y}$ m. s. $u = \frac{v}{y}$,

— 287. v. o. Z. 6. st. $x = \frac{y}{x}$ m. s. $x = \frac{y}{v}$.

— 288. v. o. Z. 7. streiche hinten AG weg.

— 293. v. o. Z. 1. st. für $f = \frac{p}{2\pi}$ m. s. für. $r = \frac{p}{2\pi}$.

— 297. v. o. Z. 7. hinten muß heißen = ADE × AC.

— 297. v. o. Z. 14. st. wir = n m. s. wir = u.

— 298. v. o. Z. 2. m. s. ADC : ADEC = ꝛc.

— 305. v. u. Z. 10. st. AG = AC m. s. AF = AC.

— 312. v. o. Z. 12. st. CAB = v m. s. CBD = v □R.

— 216. v. o. Z. 13. m. s. Auflösung. Denken wir uns ꝛc.

— 316. v. u. Z. 3. m. s. Soll Abschnitt IFGH, eine verlangte Zahl s □R, ꝛc.

— 319. v. u. Z. 4. st. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{}\ldots$ m. s. $\frac{1}{4}a\sqrt{}\ldots$

— 320. v. u. Z. 6. m. s. $c = \frac{1}{4}a\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$.

— 321. v. u. Z. 4. m. s. $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = b$, ꝛc.

— 322. v. o. Z. 5. st. $= \frac{1}{4}x^2 -$ m. s. $\frac{1}{4}x^4 -$

— 328. v. o. Z. 14. st. setzen, auch m. s. setzen. Auch.

— 331. v. o. Z. 14. st. Fig. 32. m. s. Fig. 42.

— 332. v. o. Z. 5. st. Dreyecke BFH m. s. Dreyecke BIH.

— 335. v. o. Z. 12. st. vorschieben l. verschieben.

— 336. v. o. Z. 16. st. DD m. s. DE.

S. 338. v. u. Z. 18. st. A nach B m. s. A nach D.
— 348. v. o. Z. 20. st. US l. VS.
— 348. v. u. Z. 11. st. lassen l. lasse.
— 351. v. u. Z. 15. st. UST l. $\sqrt{}$ ST.
— 357. v. o. Z. 17. st. in G l. in C.
— 358. v. u. Z. 9. st. Aufschieben m. s. Abschieben.
— 359. v. u. Z. 10. st. H. auf, daß m. s. H auf, so daß ꝛc.
— 259. v. u. Z. 6. lies: den Strahl dh,
— 360. v. o. Z. 21. st. an AG l. an KG.
— 362. v. u. Z. 12. st. fa und oa l. fa auf oa.
— 362. v. u. Z. 11. st. größer l. kleiner.
— 364. v. u. Z. 10. m. s. das Netz NOPQKN.
— 368. v. u. Z. 6. m. s. Denn es sey L LMS $=$ L lKP $=$ ꝛc.
— 369. v. o. Z. 14. m. s. den können, daß L stu $=$ ꝛc.
— 374. v. o. Z. 3. die Figur habcdek.
— 383. v. u. Z. 19. st. Spitzwinkel $b^x c^x k^x$ m. s. Spitzwinkel $l^x c^x g^x$.
— 386. v. u. Z. 12 u. 15. st. aus D l. aus B.
— 389. v. o. Z. 15. st. Mittelpunkt l. Anfangspunkt.
— 400. v. u. Z. 21. streiche Stad weg.
— 401. v. o. Z. 13. st. CB l. CP.
— 418. v. u. Z. 1 bis 6 und
— 419. v. o. Z. 1 bis 5 muß überall A statt O stehen.
— 421. v. o. Z. 7. und 8. st. von 6 bis 17. m. s. von 6 bis 18.
— 421. v. o. Z. 8. streiche von „17 zu 18„ weg.
— 426. v. u. Z. 15. Bestándes l. Beständen.
— 452. v. o. Z. 5. st. worden l. werden.
— 453. v. u. Z. 1. st. Verrichtung l. Vorrichtung.
— 455. v. u. Z. 9. st. I die l. I. der.
— 470. v. o. Z. 5. in der rechten Spalte muß stehen $\sqrt{}$ 21 $=$ 4,5826.
— 470. v. u. Z. 6. st. Stück ABC l. Stück AB.
— 473. v. o. Z. 2. st. EH l. AH.
— 473. v. u. Z. 7. st. AK l. BK.
— 474. v. u. Z. 2. m. s. $\frac{ac}{b-a} = p$.
— 476. v. o. Z. 1. m. s. $-p + \sqrt{p\left(p + \frac{2s}{a}\right)}$ oder ꝛc.

S. 477. v. u. Z. 1. m. f. $= -2sx$,

— 478. v. o. Z. 1. m. f. $= x^2 + \frac{2sx}{n-a}$ — ꝛc.

— 478. v. o. Z. 3. m. f. $x^2 + 2px - 2mp = 0$

— 478. v. o. Z. 6. m. f. $x^2 + 2px + p^2 =$ ꝛc.

— 478. v. o. Z. 8. m. f. $x + p = \sqrt{}$ ꝛc.

— 478. v. o. Z. 9. m. f. $x = -p + \sqrt{p(p+2m)}$.

— 478. v. o. Z. 12. m. f. $x = +p - \sqrt{p(p-2m)}$.

— 478. v. o. Z. 13. ſt. $q = m$. f. $p =$.

— 479. v. u. Z. 15. ſt. oder AL l. der AL.

— 484. v. o. Z. 5. m. f. in KI; PR in QS trägt ꝛc.

— 495. v. o. Z. 10. ſt. UZ l. YZ.

— 499. v. u. Z. 12. ſt. ECPQ m. f. FCPQ.

— 501. v. u. Z. 17. ſt. $=$ o. OP $=$ o m. f. $=$ $n \times o = o$.

— 508. v. o. Z. 15. ſt. $= \frac{p}{m}$ m f. $\frac{q}{m}$.

— 510. v. u. Z. 12. ſt. Trapez EGCE^2 m. f. EGZE^2

— 511. v. u. Z. 14. m. f. 2) Wäre in Figur. 221 ꝛc.

— 513. v. o. Z. 6 u. 7. ſt. 21π m. f. $2r\pi$.

— 517. v. o. Z. 6. ſt. AB. l. LP.

Bücher-Anzeige.

Abhandlung, theoretisch-praktische, über die Geburtshülfe und Krankheiten der Schwangern, Kindbetterrinnen und neugebornen Kinder. Aus dem Französischen übersetzt. Mit Anmerkungen und einer Vorrede vom Herrn Hofrath J. Ch. Stark 2 Thle. gr. 8. 3 thlr. 16 gr.

Abhandlung historisch-statistische, über Rußland, a. d. Fr. des Ritters d'Eon von Beaumont. 8. 1 thlr. 4 gr.

Addisons Anmerk über verschiedene Theile von Italien. 8. 14 gr.

Alderson, J., Versuch über das Rhus Toricodendron, haarichte Gifteiche oder Giftsumach, nebst Krankengeschichten, welche die Wirksamkeit dieses Mittels in porolitischen Krankheiten beweisen. Aus dem Engl. überf. v. D. L. Fr. Froriep. 8. 6 gr.

Andre, Ch. K. Merkwürdigkeiten der Natur, Kunst und des Menschenlebens. für allerlei Leser, besonders für die Besitzer meiner Schriften. 2 Thle 8. 1 thlr. 12 gr.

Anweisung zur Dichtkunst, ein Leitfaden für Lehrer und Lernende 8. 8. gr.

Anweisung zur Redekunst, ein Leitfaden für Lehrer und Lernende. 8. 8 gr.

Anweisung für Anfänger im Kupferstechen, herausgegeben von J. F. A. C. 8. 3 gr.

Batsch, Dr. A. J. C., erste Gründe der systematischen Chemie, zum Unterrichte für Anfänger und zu leichterer Uebersicht tabellarisch vorgetragen. gr. 8. 1 thlr.

Batsch, Dr. A. J. C., Versuch einer Anleitung zur Kenntniß und Geschichte der Thiere und Mineralien für akademische Vorlesungen entworfen. 2 Theile mit Kupf. gr. 8. schwarz 2 thlr mit illum. Kupfern. 2 thlr. 12 gr.

Bechstein, Dr. J. M., Forstbotanik, oder vollständige Naturgeschichte der deutschen Holzpflanzen und einiger fremden. Ein Handbuch für Forstmänner und solche, die es werden wollen. Zweite verbesserte und wohlfeilere Ausgabe. Mit Kupfern. gr. 8. 13 thlr.

— — die Waldbeschützungslehre für angehende und ausübende Forstmänner und Cameralisten. gr. 8. 1 thlr.

— — Forstinsektologie oder Naturgeschichte der für den Wald schädlichen und nützlichen Insekten, nebst Einleitung in die Insektenkunde überhaupt, für angehende und ausübende Forstmänner und Cameralisten. Mit 4 illum. Kupf. gr. 8. 2 thlr. 12 gr.

Bellermann, J. J., Abhandlung, ökonomischen, technologischen, naturwissenschaftlichen und vermischten Inhalts. 8. 8 gr.

Bericht der von dem Könige in Frankreich ernannten Bevollmächtigten zur Untersuchung des thierischen Magnetismus 8. 1785. 12 gr.

Bernhardi's, Dr. J. J., Handbuch der Botanik. mit Kupfrn. gr. 8. 1 thlr 16 gr.

— — Bemerkungen über die Pflanzen-Gefäße, und eine neue Art derselben Mit Kpfrn gr. 8. 14 gr.

— — von Beurtheilung des gesunden und kranken Zustandes organisirter Körper 8. 6 gr.

Briefwechsel, verbotener, oder Theodor Franquoir's, eines neufränkischen Soldaten, Denkwürdigkeiten, von ihm selbst aufgesetzt während seiner Kriegsgefangenschaft bei den Kaiserlichen. Ein Beitrag zur Geschichte des durch den franz. Revolutionskrieg hervorgebrachten Elends. 3 Thle. 8. 2 thlr.

Büse, G. H., Kunst die Weine ohne alle Vorkenntniß und ohne Nachtheil der Gesundheit zu verbessern, nebst Anzeige der besten Quellen sie wohlfeil und ächt zu erhalten, schadhafte gut zu machen und dieselben vor Nachtheil zu bewahren, aus Erfahrung praktischer Weinhändler und Chemiker. Nebst einem Anhange alle Liquere selbst und auf die möglichst wohlfeilste Art so wie künstliche Weine aus Beeren zu verfertigen Ein Handbuch für Weinhändler, Weintrinker und Liquerfabrikanten. gr 8. 1 thlr. 12 gr.

Cavallo's, Tib., ausführliches Handbuch der Experimentalnaturlehre in ihren reinen und angewandten Theilen. Aus dem Engl., mit Anmerkungen von Dr. J. B. Trommsdorff. 4 Bde. Mit Kpfrn. gr. 8. 7 thlr. 8 gr.

— — leicht faßliche Darstellung der Lehre der Elektricität, des Galvanismus und des Magnetismus Aus dem Englischen der neuesten Aufl mit Anmerkungen übersetzt von Dr. J. Barth Trommsdorff (Aus Cavallo's Handbuch der Naturlehre besonders abgedruckt) Mit Kpfrn. 8. 1 thlr. 8 gr.

Chambre, de la, Anleitung zur Menschenkenntniß, übers. und mit einer Abhandlung herausgegeb. von C. Chr. E. Schmidt. 8. 1 thlr. 8 gr.

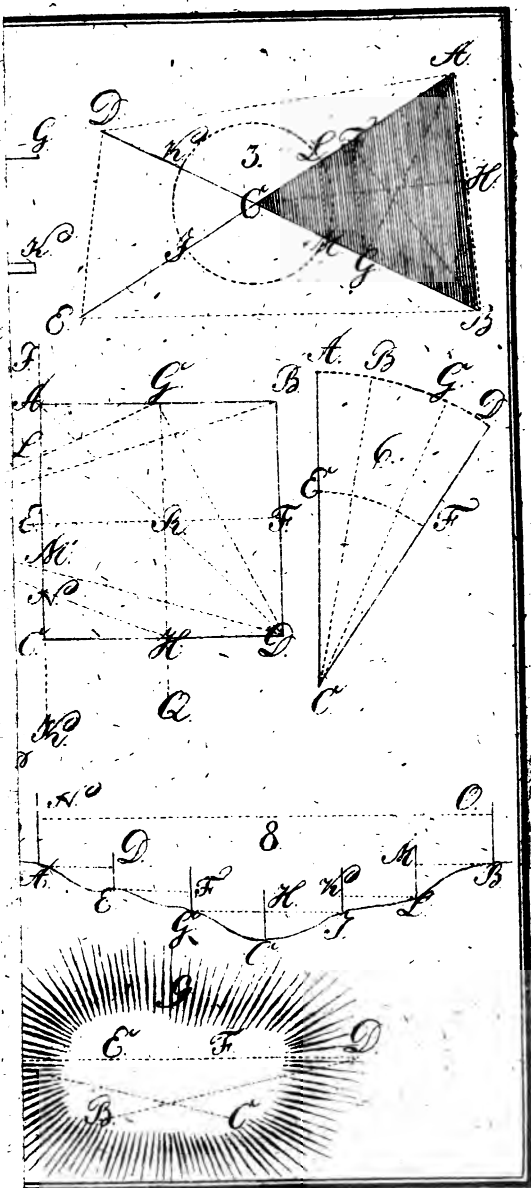
Cicero's Gedanken über den Geist des Naturrechts, aus dem Latein. von Dr Chr. W. Wehrn 8. 3 gr.

— — erste Rede gegen den Prätor Verres, neu übers. v. J. A. v. L 8. 3 gr.

— — Abhandlung über die Zulänglichkeit der Tugend zur Glückseligkeit Eine von dessen Tusculanischen Untersuchungen; verdeutscht und mit Anm. und Vorerinnerungen begleitet, von Chr Fr. Böhme. 8. 8 gr.

Colbatsch Abhandlungen von dem Mistel und dessen Nutzen in der Arzneiwissenschaft. Aus dem Englischen mit Zusätzen und Anmerkungen eines deutschen Arztes versehen. 8. 3 gr.

I.



S. 147. v. u. Z. 13. st. wovon sogenannte m. s. wovon das eine sogenannte.
— 148. v. o. Z. 16. st. OA m. s. als CA.
— 148. v. u. Z. 15. st. EFA. l. EIA.
— 149. v. u. Z. 19. st. DGFT m. s. DGEF.
— 149. v. u. Z. 10. st. b. l. b.
— 149. v. u. Z. 6. st. CB. l. SB.
— 150. v. o. Z. 6. st. so würde m. s. so würde man.
— 150. v. u. Z. 9. st. da FA m. s. FK.
— 152. v. u. Z. 5. st. Nebenwinkel m. s. Ergänzungswinkel.
— 153. v. u. Z. 11. st. BC + $\sqrt{}$, m. s. BC = $\sqrt{}$.
— 153. v. u. Z. 7. st. $AC^3 - BC$. m. s. $AC^2 - BC^2$.
— 155. v. u. Z. 10. st. △ BKG m. s. BHG.
— 159. auf dieser ganzen Seite muß V statt I gesetzt werden.
— 162. v. o. Z. 3. m. s. $a = \sqrt{\frac{2 \cdot c}{d}}$,
— 164. v. o. Z. 13. st. Dreyecke BAE m. s. Dreyecke BAF.
— 166. v. o. Z. 12. m. s. $\angle DAB = \angle GDC = \beta$.
— 167. hier muß überall DV statt DI und überhaupt V statt I stehen.
— 167. v. u. Z. 7. m. s. längerung in B schneidet und wenn.
— 168. v. o. Z. 4. m. s. $y = -n + \sqrt{n(n + 2a)}$.
— 169. v. o. Z. 14 u. 15. m. s. $y + n = \sqrt{n(n + 2a)}$ und $y = -n + \sqrt{n(n + 2a)}$.
— 169. v. o. Z. 19 u. 20. m. s. $\sqrt{KA \times (2BK - KA)} = \sqrt{m(2d + 2m - m)}$, $= \sqrt{m(m + 2d)}$ und
— 169. v. o. Z. 22. m. s. $AI = m + \sqrt{m(m + 2d)} = \text{&c.}$
— 169. v. u. Z. 5. m. s. die Fläche $s = \sqrt{u(u - a)(u - b)(u - c)}$.
— 173. v. o. Z. 2. m. s. $r^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, woher
— 173. v. u. Z. 9. m. s. 18) $\sin\alpha = \sqrt{r^2 - \cos^2\alpha}$.

S. 173. v. u. Z. 8. m. f. $= \frac{r \cdot \text{tang } \alpha}{\sqrt{(r^2 + \text{tang}^2\alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 7. m. f. $= \frac{r \sqrt{(\sec^2\alpha - r^2)}}{\sec \alpha}$

$= \frac{r^2}{\text{cosec } \alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \cot^2\alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 6. m. f. 14) $\cos \alpha = \sqrt{(r^2 - \sin^2\alpha)}$

$= \text{tc.}$

— 173. v. u. Z. 5. m. f. $\frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + \text{tang}^2\alpha)}} =$

$\frac{r \cdot \cot \alpha}{\text{cosec } \alpha} = \frac{r \cdot \cot \alpha}{(\sqrt{r^2 + \cot^2\alpha})}$

— 173. v. u. Z. 4. m. f. $\frac{r \cdot \sqrt{(\text{cosec}^2\alpha - r^2)}}{\text{cosec } \alpha}$

— 173. v. u. Z. 3. m. f. 15) $\text{tang } \alpha = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} =$

$\frac{r \cdot \sin \alpha}{\sqrt{(r^2 - \sin^2\alpha)}}$

— 173. v. u. Z. 2. m. f. $= \frac{r \cdot \sqrt{(r^2 - \cos^2\alpha)}}{\cos \alpha} = \text{tc.}$

— 173. v. u. Z. 1. m. f. $\sqrt{(\sec^2\alpha - r^2)} =$

$\frac{r^2}{\sqrt{(\text{cosec}^2\alpha - r^2)}}$

— 175. v. u. Z. 6. ſt. $=$ L DBC m. f. $=$ L BCA.

— 176. v. o. Z. 10. nach Fig. 84. ſchalte man ein: Tab. XI.

— 177. v. o. Z. 2. ſt. CF l. CG.

— 177. v. o. Z. 7. ſt. in M. m. f. in der Mitte M.

— 177. v. u. Z. 15. ſt. HE l. AE.

— 179. v. u. Z. 15. ſt. HK l. AK.

— 181. v. u. Z. 4. ſt. $= \frac{EE \times (AD + DC)}{2}$

m. f. $= \frac{EF \times (AB + DC)}{2}$

— 182. v. o. Z. 9. m. f. KC : FE $=$ IG : LE oder.

— 182. v. u. Z. 15. ſt. $=$ AM $\times$ EG l. $=$ AM $\times$ EF.

S. 182. v. u. Z. 11. st. Mitte F m. s. Mitte G.
— 183. v. o. Z. 13. st. ABCF m. s. EBCF.
— 184. v. u. Z. 3. st. T und R m. s. T und Q.
— 185. v. o. Z. 5. st. aus oder K m. s. aus G oder K.
— 185. v. u. Z. 5. st. = △ HGH. m. s. △ ACH.
— 186. v. o. Z. 4 m. s. $\frac{AT^2}{AR} = RA + \frac{2s}{CH}$
— 186. v. o. Z. 6. st. $AF = \sqrt{}$ m. s. $AT = \sqrt{}$.
— 187. v. o. Z. 5. st. $AF = \frac{2s}{CI}$ m. s. $HF = \frac{2s}{CI}$.
— 187. v. o. Z. 7. st. $\left[\frac{AH + 2s}{CI}\right]$ AH m. s. $\left[AH + \frac{2s}{CI}\right] \times AH$.
— 189. v. o. Z. 3. st. UEFS m. s. UEFT.
— 189. v. u. Z. 8. st. „von Ω„ l. von XΩ.
— 190. v. o. Z. 8 st. $\frac{s}{UB}$ l. $\frac{s}{UE}$
— 191. v. o. Z. 6. st. EL = x l. FL = x.
— 191. v. o. Z. 6. m. s. $\sqrt{\left[a^2 - \frac{2s(s-b)}{c}\right]}$ und ꝛc.
— 192. v. o. Z. 5. m. s. $y = \sqrt{\left(a^2 + \frac{2s(b-a)}{c}\right)}$
— 193. v. o. Z. 13. m. s. in $y = \sqrt{\left(a^2 - \frac{2s(s-b)}{c}\right)}$
— 195. v. o. Z. 11. st. SGKU m. s. SGHT.
— 196. v. o. Z. 6. st. BC l. RC.
— 198. v. o. Z. 6. füge hinzu und am Rande an: Fig. 94.
— 198. v. o. Z. 21. st. FCG l. ECG.
— 200. am Rande muß Fig. 90. st. Fig. 84. stehen.
— 202. v. o. Z. 10. m. s. Hellinien HL zu FB und FM zu BD, so ꝛc.
— 202. v. u. Z. 9. m. s. so setze man $\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{GB} + \frac{AC}{FC}\right) = p$, und ꝛc.
— 206. v. o. Z. 18. m. s. Da nun △ OCK ∽ △ OEL, ꝛc.

S. 212. v. o. Z. 5. m. f. 42. $\frac{\cos\gamma + \cos\delta}{\cos\delta - \cos\gamma} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}(\gamma+\delta).\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)}{r^2}$

— 214. v. o. Z. 10. m. f. 59. $r^2 + \tan g^2\alpha = \frac{r^4}{\cos^2\alpha}$.

— 218. v. o. Z. 3. zu Ende muß ſtatt + ꝛc. ſtehen: — + ꝛc.

— 218. v. u. Z. 8, ſtreiche zu Ende der Zeile das Zeichen: hinter + weg.

— 220. in den Formeln nach Zeile 3. darf nur einmal o = und nur ein vertikaler Bogen vorgezogen ſeyn.

— 220. v. u. Z. 14. ſt. α l. a.

— 220. v. o. Z. 7. ſtreiche in $a^7 = \ldots$.: $\sin^7\alpha$ + ꝛc. das Zeichen: weg.

— 220. v. u. Z. 10. ſt. $\alpha.\sin^3\alpha$ m. ſ. $a.\sin^3\alpha$.

— 225. Die Formel zu Ende dieſer Seite rechts des vertikalen Bogens muß dieſelbe Geſtalt haben, wie die folgende Formel auf Seite 225. XIV.

— 233. v. u. Z. 10. ſt. BB m. ſ. AB.

— 234. v. u. Z. 15. m. ſ. AC oder CA.

— 239. v. u. Z. 16. ſt. Log. $64°46^x$ m. ſ. Log. sin $64°46^x$.

— 240. v. u. Z. 15. ſt. A und E m. ſ. A und C.

— 245. v. u. Z. 12. zu Ende ein Komma ſtatt eines Punktes.

— 247. v. u. Z. 3. m. ſ. $\sqrt{b^2+c^2-2bc+\frac{2^2.bc.\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{r^2}}$

— 252. v. o. Z. 3. ſt. B oder γ m. ſ. C oder γ.

— 256. v. o. Z. 7. m. ſ. sin C = sin (180 — C) = $\frac{AB.\sin A}{BC}$

— 259. v. u. Z. 1. ſt. CA m. ſ. CH.

— 262. v. o. Z. 15, ſt. ABD = δ. m. ſ. ABC = δ.

— 266. v. o. Z. 10. zu Ende ſt. DCA = β m. ſ. DCB = β.

— 271. v. o. kann nach Zeile 5. eingeſchaltet werden: Wenn $k = \lambda$ und $\psi = 90°$, ſo iſt

$\cot \omega = \frac{\cot 90^0 \times \sin 2\lambda}{\sin 0^0} = \frac{0}{0}$ und demnach ω eine willkührliche Größe, weshalb auch in diesem Falle der vierte Ort D unbestimmt, nämlich $\varphi = \psi - \omega$ und $\mu = \psi + \omega$ ist.

— 273. v. o. Z. 3. muß seyn: $\frac{a \cdot \cos \frac{1}{2}\alpha \times \sqrt{2n}}{r}$.

— 273. v. o. Z. 14. m. s. vorhin $\frac{nr}{m} = \cos \alpha$, so ist

— 278. v. o. Z. 6. m. s. $mx^2 + ax + b = 0$.

— 280. v. u. Z. 12. m. s. $L\sqrt{mb} = $ ꝛc.

— 282. v. u. Z. 15. m. s. Wenn hier p positiv ꝛc.

— 282. v. u. Z. 13. m. s. diesem Wege nicht geschehen,

— 287. v. o. Z. 5. st. $u = \frac{x}{y}$ m. s. $u = \frac{v}{y}$,

— 287. v. o. Z. 6. st. $x = \frac{y}{x}$ m. s. $x = \frac{y}{v}$.

— 288. v. o. Z. 7. streiche hinten AG weg.

— 293. v. o. Z. 1. st. für $t = \frac{p}{2\pi}$ m. s. für. $t = \frac{p}{2\pi}$.

— 297. v. o. Z. 7. hinten muß heißen = ADE × AC.

— 297. v. o. Z. 14. st. wir = n m. s. wir = u.

— 298. v. o. Z. 2. m. s. ADC : ADEC = ꝛc.

— 305. v. u. Z. 10. st. AG = AC m. s. AF = AC.

— 312. v. o. Z. 12. st. CAB = v m. s. CBD = v □R.

— 216. v. o. Z. 13. m. s. Auflösung. Denken wir uns ꝛc.

— 316. v. u. Z. 3. m. s. Soll Abschnitt IFGH, eine verlangte Zahl s □R. ꝛc.

— 319. v. u. Z. 4. st. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{}$ .... m. s. $\frac{1}{4}a\sqrt{}$...

— 320. v. u. Z. 6. m. s. $c = \frac{1}{4}a\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$.

— 321. v. u. Z. 4. m. s. $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = b$, ꝛc.

— 322. v. o. Z. 5. st. = $\frac{1}{4}x^2$ — m. s. $\frac{1}{4}x^4$ —

— 328. v. o. Z. 14. st. setzen, auch m. s. setzen. Auch.

— 331. v. o. Z. 14. st. Fig. 32. m. s. Fig. 42.

— 332. v. o. Z. 5. st. Dreyecke BFH m. s. Dreyecke BIH.

— 335. v. o. Z. 12. st. vorschieben l. verschieben.

— 336. v. o. Z. 16. st. DD m. s. DE.

S. 338. v. u. Z. 18. st. A nach B m. s. A nach D.
— 348. v. o. Z. 20. st. US l. VS.
— 348. v. u. Z. 11. st. lassen l. lasse.
— 351. v. u. Z. 15. st. UST l. $\sqrt{}$ ST.
— 357. v. o. Z. 17. st. in G l. in C.
— 358. v. u. Z. 9. st. Aufschieben m. s. Abschieben.
— 359. v. u. Z. 10. st. H. auf, daß m. s. H auf, so daß ꝛc.
— 259. v. u. Z. 6. lies: den Strahl dh,
— 360. v. o. Z. 21. st. an AG l. an KG.
— 362. v. u. Z. 12. st. fa und oa l. fa auf oa.
— 362. v. u. Z. 11. st. größer l. kleiner.
— 364. v. u. Z. 10. m. s. das Netz NOPQKN.
— 368. v. u. Z. 6. m. s. Denn es sey L LMS $=$ L lKP $=$ ꝛc.
— 369. v. o. Z. 14. m. s. den können, daß L stu $=$ ꝛc.
— 374. v. o. Z. 3. die Figur habcdef.
— 383. v. u. Z. 19. st. Spitzwinkel $b^z c^z k^z$ m. s. Spitzwinkel $l^z c^z g^z$.
— 386. v. u. Z. 12 u. 15. st. aus D l. aus B.
— 389. v. o. Z. 15. st. Mittelpunkt l. Anfangspunkt.
— 400. v. u. Z. 21. streiche Stad weg.
— 401. v. o. Z. 13. st. CB l. CP.
— 418. v. u. Z. 1 bis 6 und
— 419. v. o. Z. 1 bis 5 muß überall A statt O stehen.
— 421. v. o. Z. 7. und 8. st. von 6 bis 17. m. s. von 6 bis 18.
— 421. v. o. Z. 8. streiche von „17 zu 18„ weg.
— 426. v. u. Z. 15. Bestandes l. Beständen.
— 452. v. o. Z. 5. st. worden l. werden.
— 453. v. u. Z. 1. st. Verrichtung l. Vorrichtung.
— 455. v. u. Z. 9. st. I die l. I. der.
— 470. v. o. Z. 5. in der rechten Spalte muß stehen $\sqrt{}$ 21 $=$ 4,5826.
— 470. v. u. Z. 6. st. Stück ABC l. Stück AB.
— 473. v. o. Z. 2. st. EH l. AH.
— 473. v. u. Z. 7. st. AK l. BK.
— 474. v. u. Z. 2. m. s. $\frac{ac}{b-a} = p$.
— 476. v. o. Z. 1. m. s. $-p + \sqrt{p\left(p + \frac{2s}{a}\right)}$ oder ꝛc.

S. 477. v. u. Z. 1. m. f. $= -2sx$,

— 478. v. o. Z. 1. m. f. $= x^2 + \frac{2sx}{n-a} -$ ꝛc.

— 478. v. o. Z. 3. m. f. $x^2 + 2px - 2mp = 0$

— 478. v. o. Z. 6. m. f. $x^2 + 2px + p^2 =$ ꝛc.

— 478. v. o. Z. 8. m. f. $x + p = \sqrt{}$ ꝛc.

— 478. v. o. Z. 9. m. f. $x = -p + \sqrt{p(p+2m)}$.

— 478. v. o. Z. 12. m. f. $x = +p - \sqrt{p(p-2m)}$.

— 478. v. o. Z. 13. ſt. $q = m$. f. $p =$.

— 479. v. u. Z. 15. ſt. oder AL f. der AL.

— 484. v. o. Z. 5. m. f. in KI; PR in QS trägt ꝛc.

— 495. v. o. Z. 10. ſt. UZ f. YZ.

— 499. v. u. Z. 12. ſt. ECPQ m. f. FCPQ.

— 501. v. u. Z. 17. ſt. $= o$. OP $= o$ m. f. $= n \times o = o$.

— 508. v. o. Z. 15. ſt. $= \frac{p}{m}$ m f. $\frac{q}{m}$.

— 510. v. u. Z. 12. ſt. Trapez EGCE² m. f. EGZE¹

— 511. v. u. Z. 14. m. f. 2) Wäre in Figur. 221 ꝛc.

— 513. v. o. Z. 6 u. 7. ſt. 21π m. f. $2r\pi$.

— 517. v. o. Z. 6. ſt. AB. f. LP.

Bücher-Anzeige.

Abhandlung, theoretisch-praktische, über die Geburtshülfe und Krankheiten der Schwangern, Kindbetterinnen und neugebornen Kinder. Aus dem Französischen übersetzt. Mit Anmerkungen und einer Vorrede vom Herrn Hofrath J. Ch. Stark 2 Thle. gr. 8. 3 thlr. 16 gr.

Abhandlung historisch-statistische, über Rußland, a. d. Fr. des Ritters d'Eon von Beaumont. 8. 1 thlr. 4 gr

Addisons Anmerk über verschiedene Theile von Italien. 8. 14 gr.

Alderson, J., Versuch über das Rhus Toricodendron, haarichte Gifteiche oder Giftsumach, nebst Krankengeschichten, welche die Wirksamkeit dieses Mittels in porolitischen Krankheiten beweisen. Aus dem Engl. übers. v. D. L. Fr. Froriep. 8. 6 gr.

Andre, Ch. K. Merkwürdigkeiten der Natur, Kunst und des Menschenlebens, für allerlei Leser, besonders für die Besitzer meiner Schriften. 2 Thle 8. 1 thlr. 12 gr.

Anweisung zur Dichtkunst, ein Leitfaden für Lehrer und Lernende 8. 8. gr.

Anweisung zur Redekunst, ein Leitfaden für Lehrer und Lernende. 8. 8 gr.

Anweisung für Anfänger im Kupferstechen, herausgegeben von J. F. A. C. 8. 3 gr.

Batsch, Dr. A. J. C., erste Gründe der systematischen Chemie, zum Unterrichte für Anfänger und zu leichterer Uebersicht tabellarisch vorgetragen. gr. 8. 1 thlr.

Batsch, Dr. A. J. C., Versuch einer Anleitung zur Kenntniß und Geschichte der Thiere und Mineralien für akademische Vorlesungen entworfen. 2 Theile mit Kupf. gr. 8. schwarz 2 thlr mit illum. Kupfern. 2 thlr. 12 gr.

Bechstein, Dr. J. M., Forstbotanik, oder vollständige Naturgeschichte der deutschen Holzpflanzen und einiger fremden. Ein Handbuch für Forstmänner und solche, die es werden wollen. Zweite verbesserte und wohlfeilere Ausgabe. Mit Kupfern. gr. 8. 13 thlr.

— — die Waldbeschützungslehre für angehende und ausübende Forstmänner und Cameralisten. gr. 8. 1 thlr.

— — Forstinsektologie oder Naturgeschichte der für den Wald schädlichen und nützlichen Insekten, nebst Einleitung in die Insektenkunde überhaupt, für angehende und ausübende Forstmänner und Cameralisten. Mit 4 illum. Kupf. gr. 8. 2 thlr. 12 gr.

Bellermann, J. J., Abhandlung, ökonomischen, technologischen, naturwissenschaftlichen und vermischten Inhalts. 8. 8 gr.

Bericht der von dem Könige in Frankreich ernannten Bevollmächtigten zur Untersuchung des thierischen Magnetismus a. 1785. 12 gr.

Bernhardi's, Dr. J. J., Handbuch der Botanik. mit Kupfrn. gr. 8 1 thlr. 16 gr.

— — Bemerkungen über die Pflanzen-Gefäße, und eine neue Art derselben Mit Kpfrn gr. 8. 14 gr.

— — von Beurtheilung des gesunden und kranken Zustandes organisirter Körper. 8. 6 gr.

Briefwechsel, verbotener, oder Theodor Franquoir's, eines neufränkischen Soldaten, Denkwürdigkeiten, von ihm selbst aufgesetzt während seiner Kriegsgefangenschaft bei den Kaiserlichen. Ein Beitrag zur Geschichte des durch den franz. Revolutionskrieg hervorgebrachten Elends. 3 Thle. 8. 2 thlr.

Büse, G. H., Kunst die Weine ohne alle Vorkenntniß und ohne Nachtheil der Gesundheit zu verbessern, nebst Anzeige der besten Quellen sie wohlfeil und ächt zu erhalten, schadhafte gut zu machen und dieselben vor Nachtheil zu bewahren, aus Erfahrung praktischer Weinhändler und Chemiker. Nebst einem Anhange alle Liquere selbst und auf die möglichst wohlfeilste Art so wie künstliche Weine aus Beeren zu verfertigen Ein Handbuch für Weinhändler, Weintrinker und Liquerfabrikanten. gr. 8. 1 thlr. 12 gr.

Cavallo's, Tib., ausführliches Handbuch der Experimentalnaturlehre in ihren reinen und angewandten Theilen. Aus dem Engl., mit Anmerkungen von Dr. J. B. Trommsdorff. 4 Bde. Mit Kpfrn. gr. 8. 7 thlr. 8 gr.

— — leicht faßliche Darstellung der Lehre der Elektricität, des Galvanismus und des Magnetismus Aus dem Englischen der neuesten Aufl. mit Anmerkungen übersetzt von Dr. J. Barth Trommsdorff (Aus Cavallo's Handbuch der Naturlehre besonders abgedruckt) Mit Kpfrn. 8. 1 thlr. 8 gr.

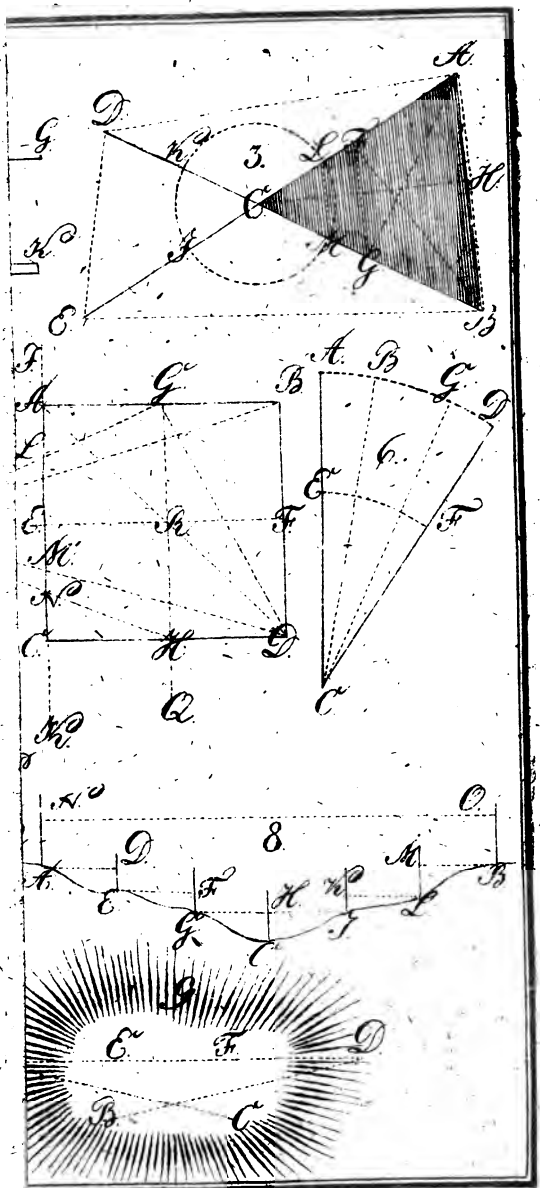
Chambre, de la, Anleitung zur Menschenkenntniß, übers. und mit einer Abhandlung herausgegeb. von C. Chr. E. Schmidt. 8. 1 thlr. 8 gr.

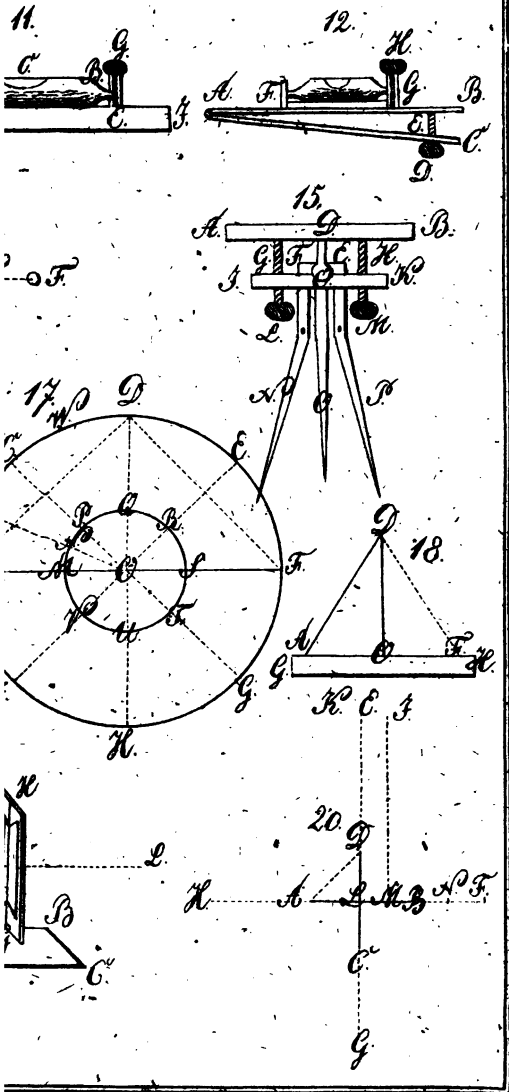
Cicero's Gedanken über den Geist des Naturrechts, aus dem Latein. von Dr Chr. W. Wehrn. 8. 3 gr.

— — erste Rede gegen den Prätor Verres, neu übers. v. F. A. v. L. 8. 3 gr.

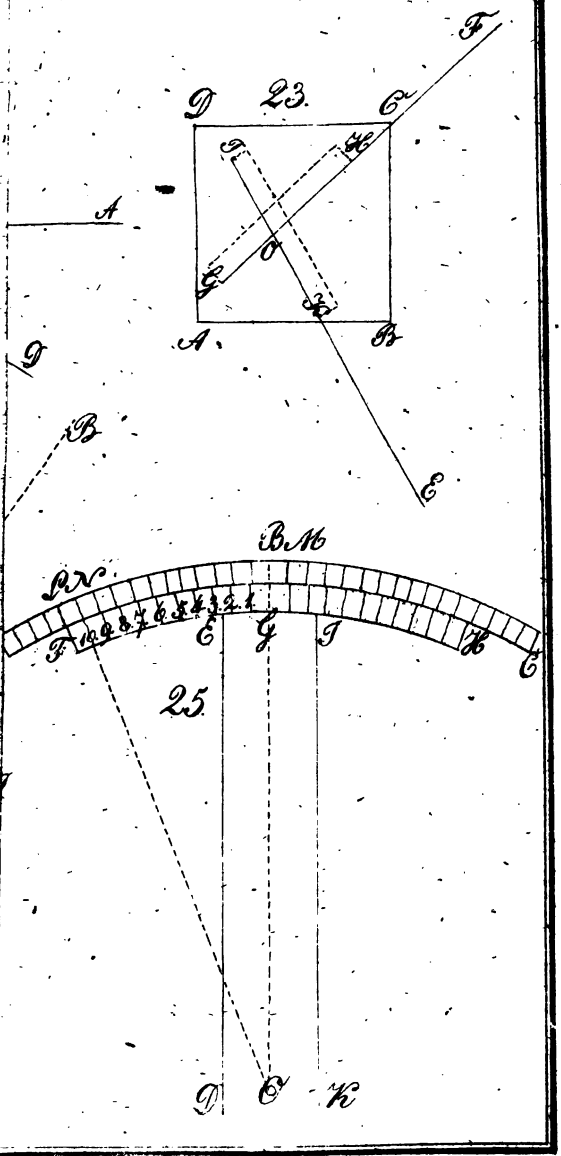
— — Abhandlung über die Zulänglichkeit der Tugend zur Glückseligkeit Eine von dessen Tusculanischen Untersuchungen; verdeutscht und mit Anm. und Vorerinnerungen begleitet, von Chr Fr. Böhme. 8. 8 gr.

Colbatsch Abhandlungen von dem Mistel und dessen Nutzen in der Arzneiwissenschaft. Aus dem Englischen mit Zusätzen und Anmerkungen eines deutschen Arztes versehen. 8. 3 gr.

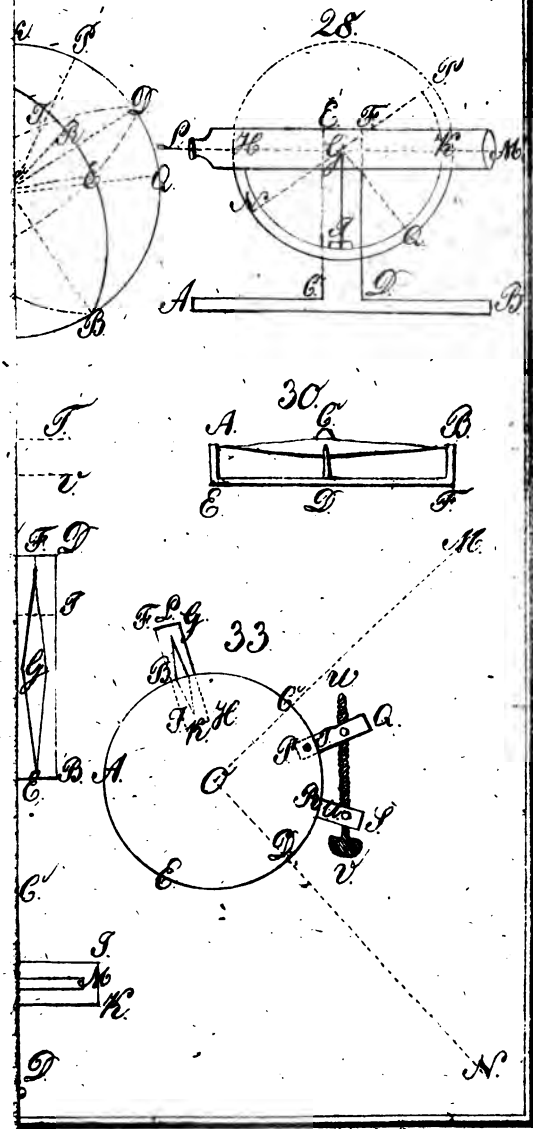

3.
8.


11.
12.
15.
17.
18.
20.

III.

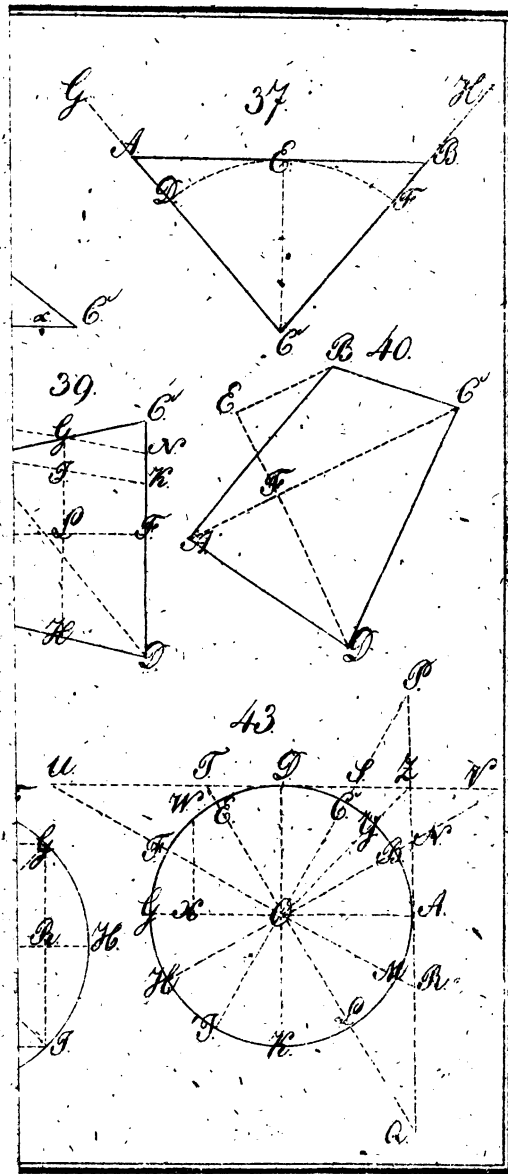


Fec. Uckermann.

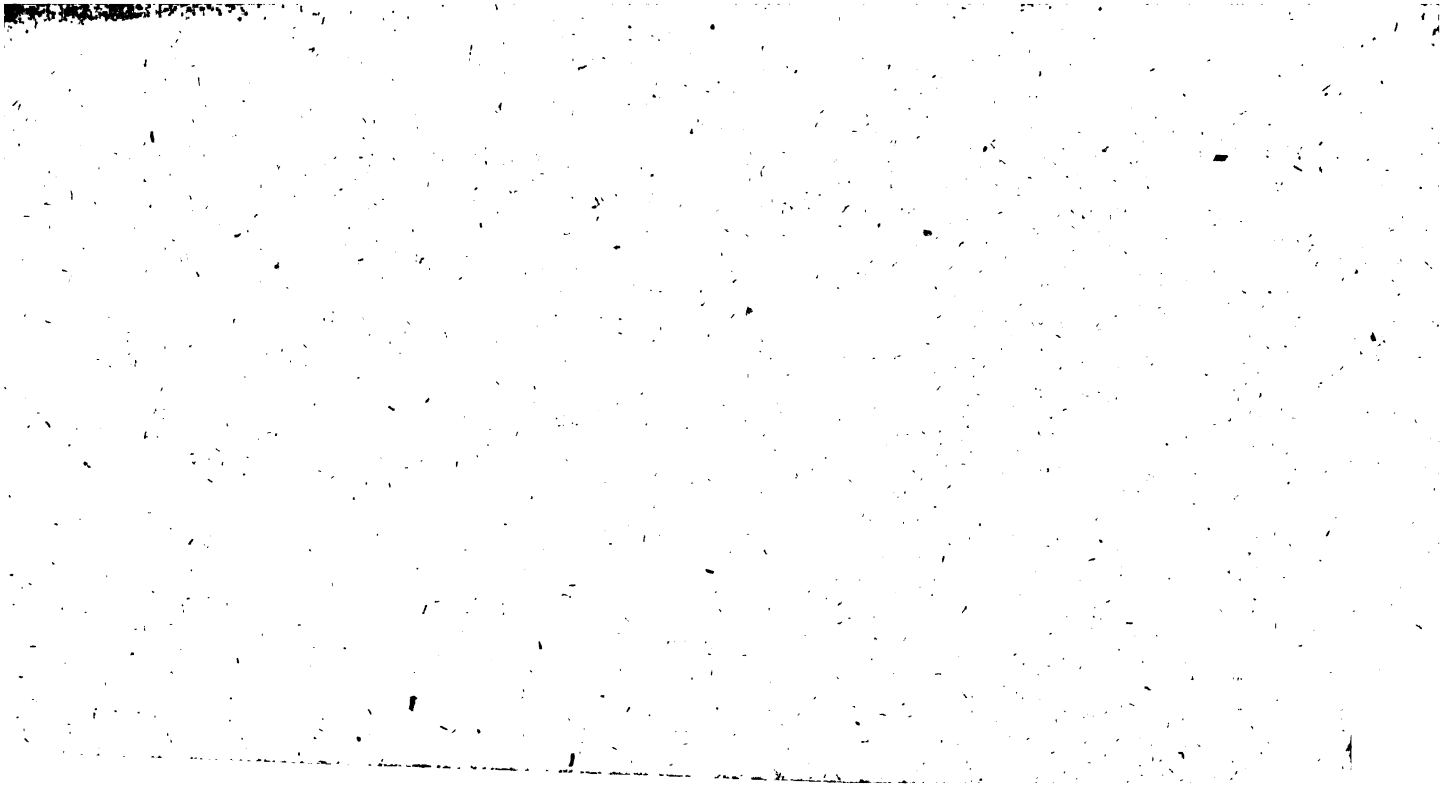


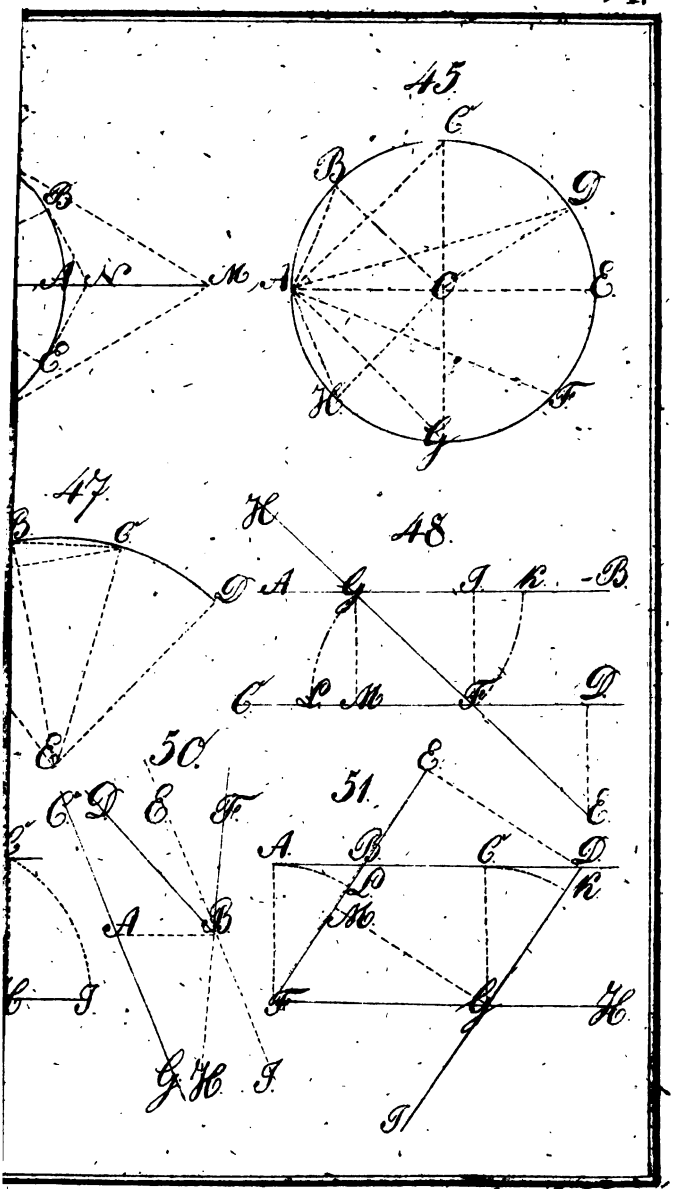
fec. Ruckermann

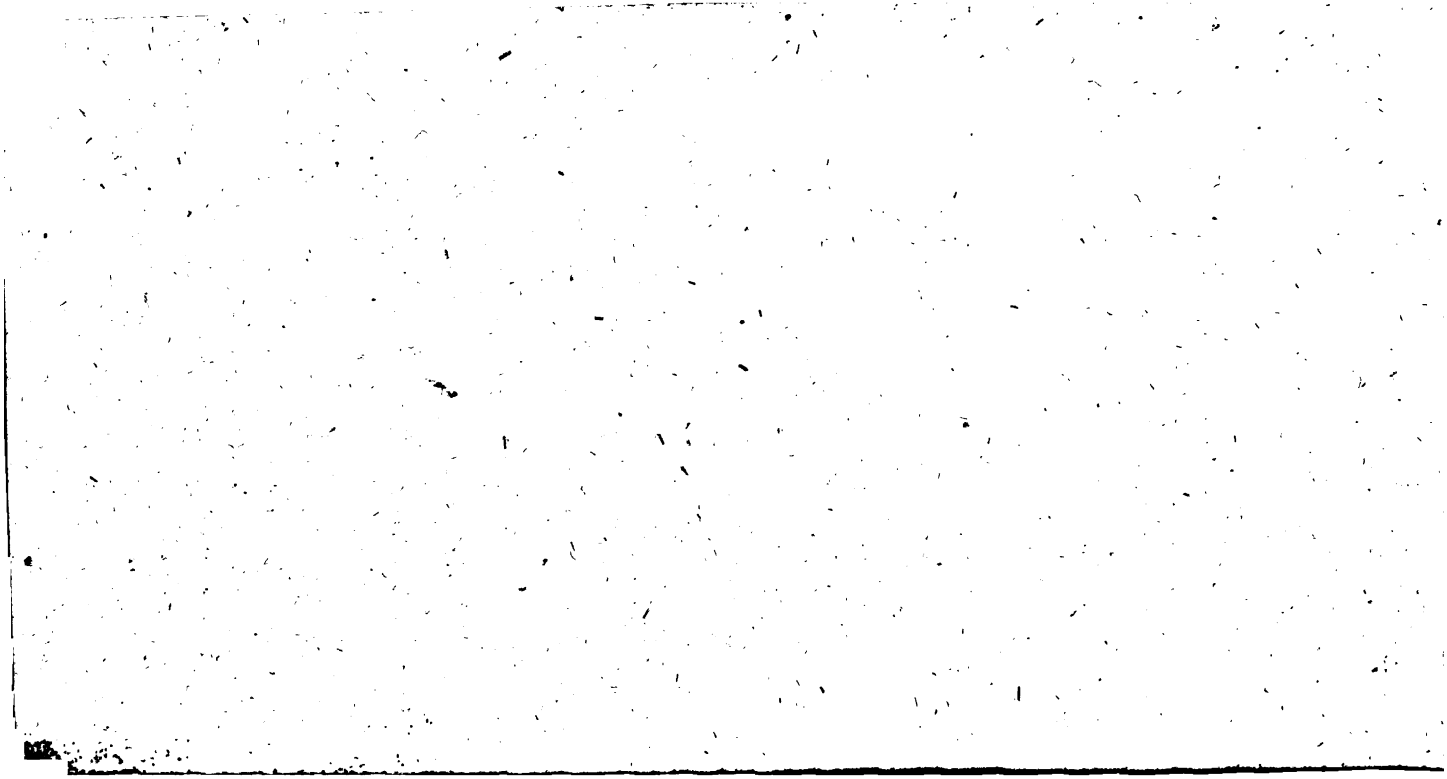
V.

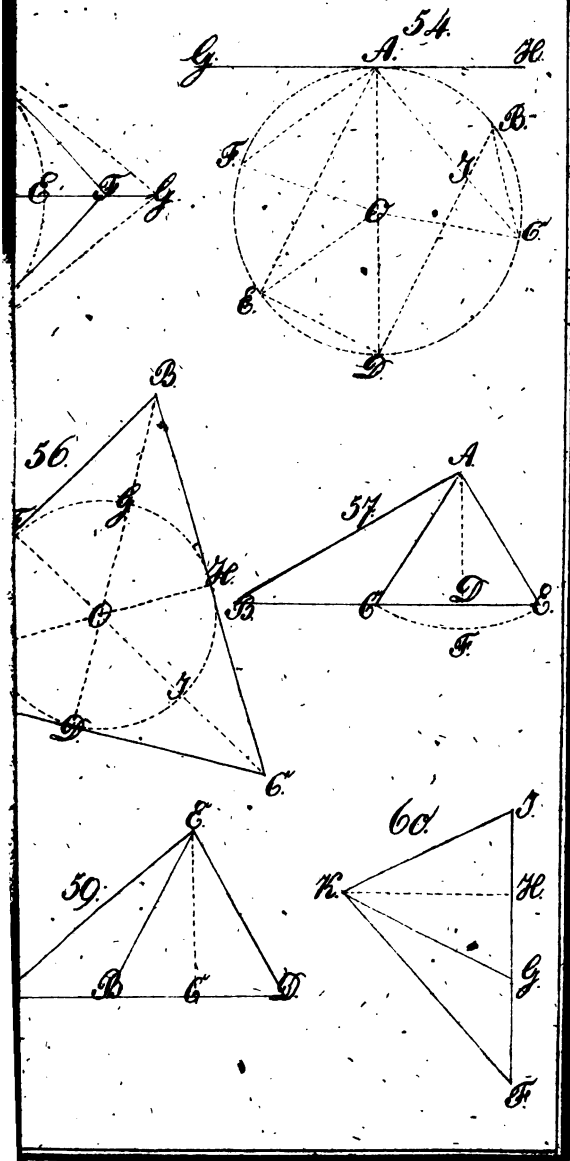


fec. Uckermann.

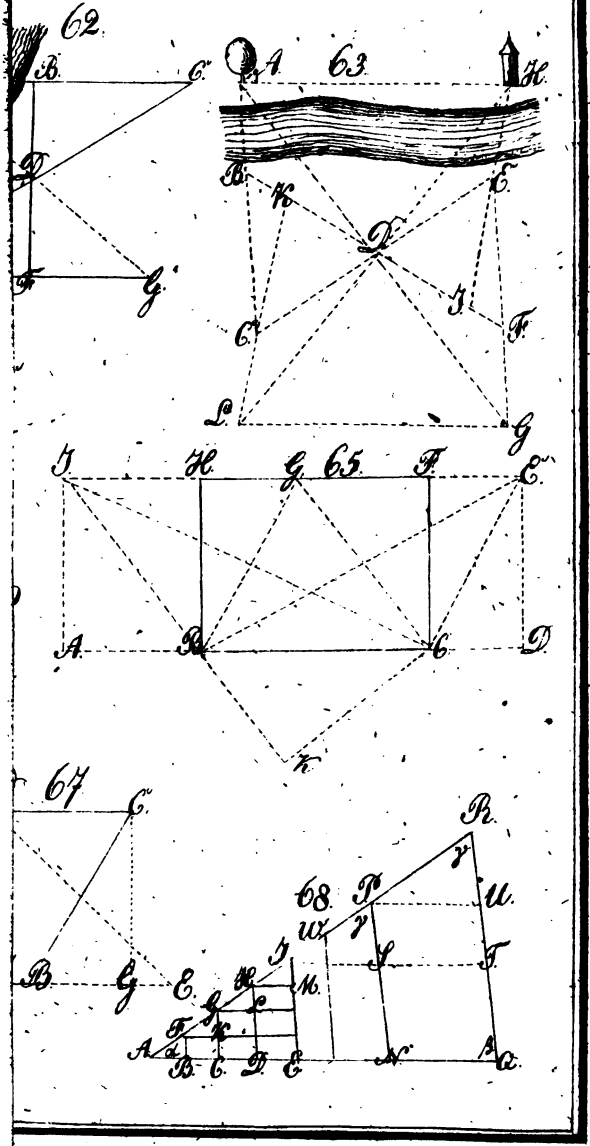



45
47
48
50
51

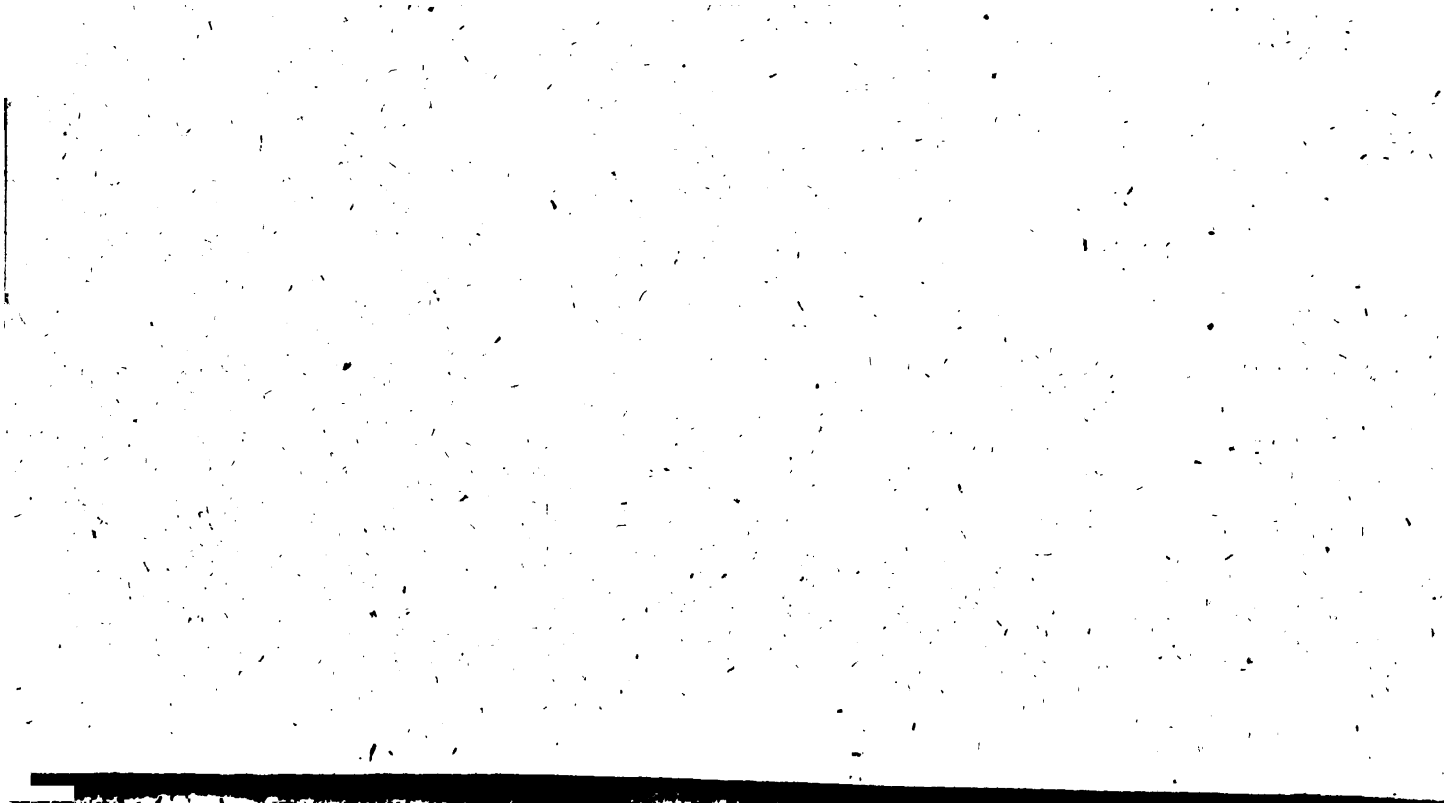


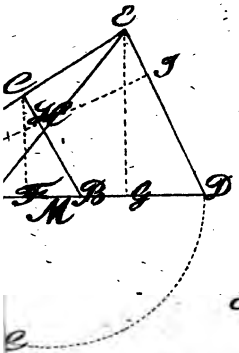


Fec. Uckerman

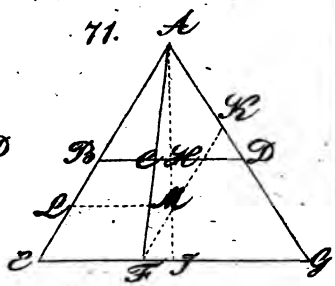


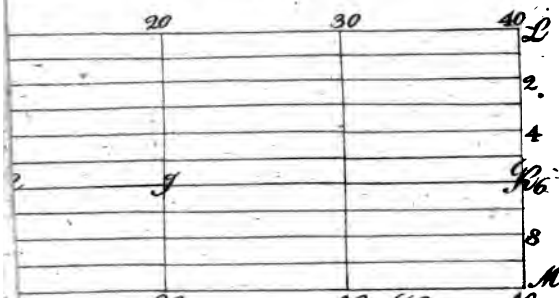
Fec. Ustermann

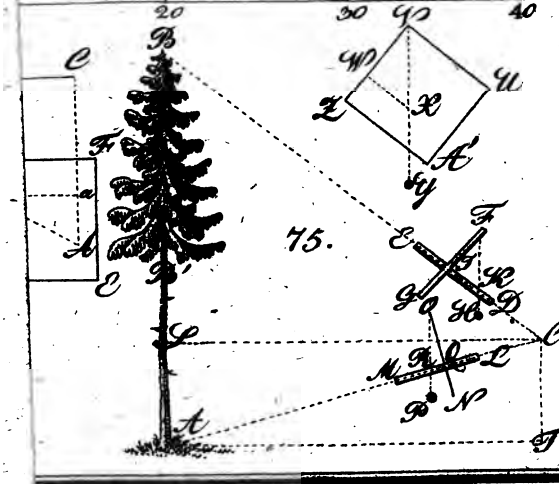




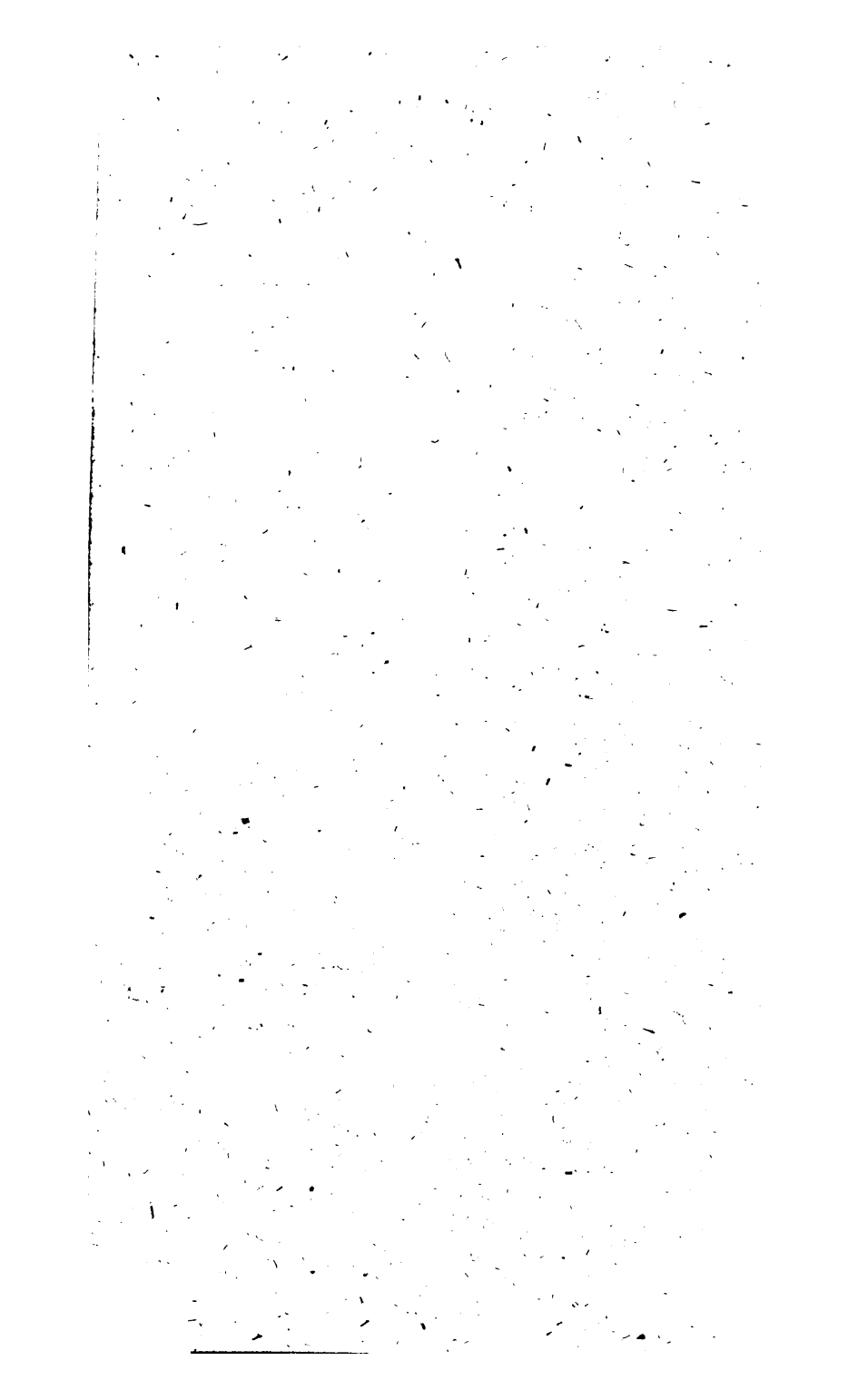
71.



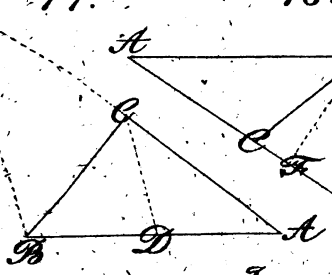




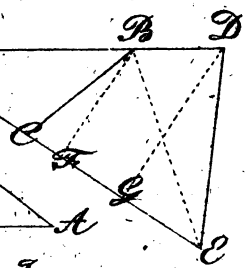
75.

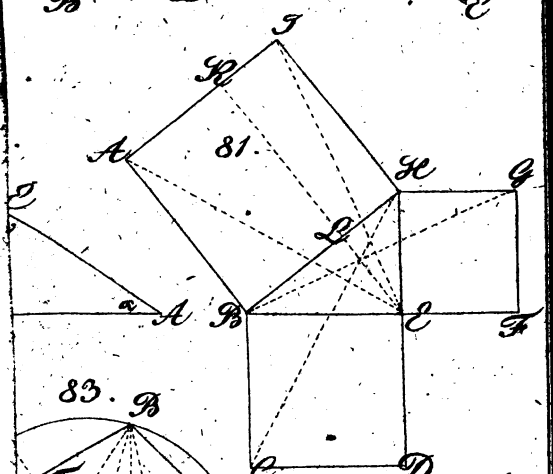


77.

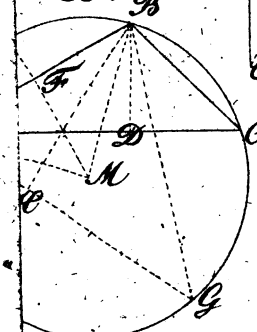


78.

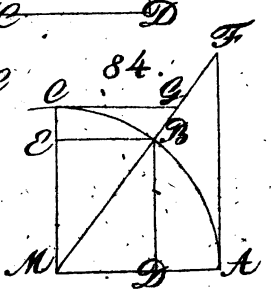


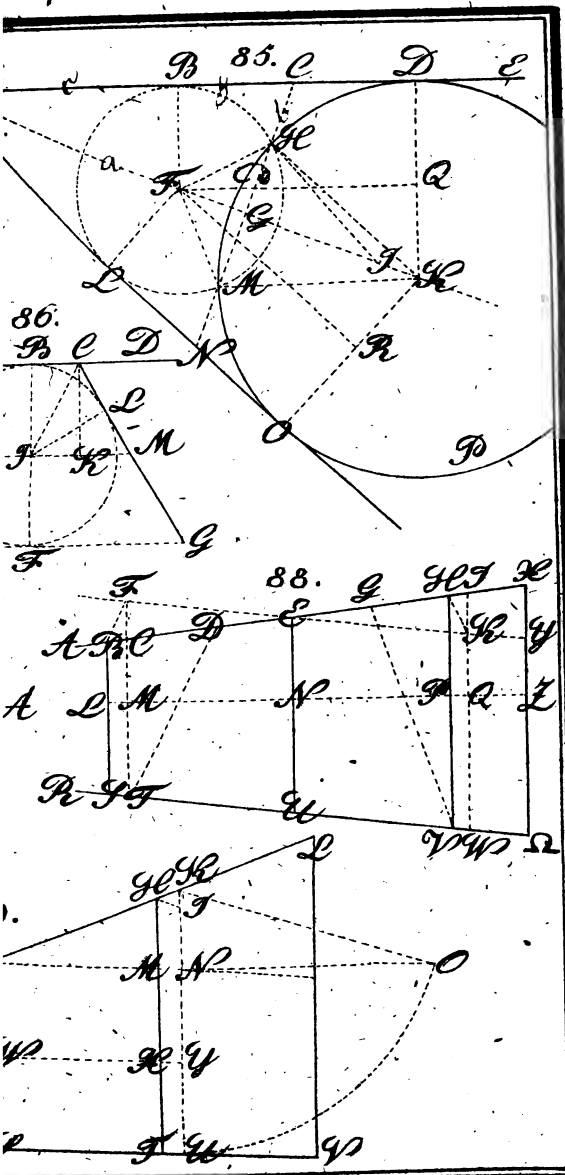


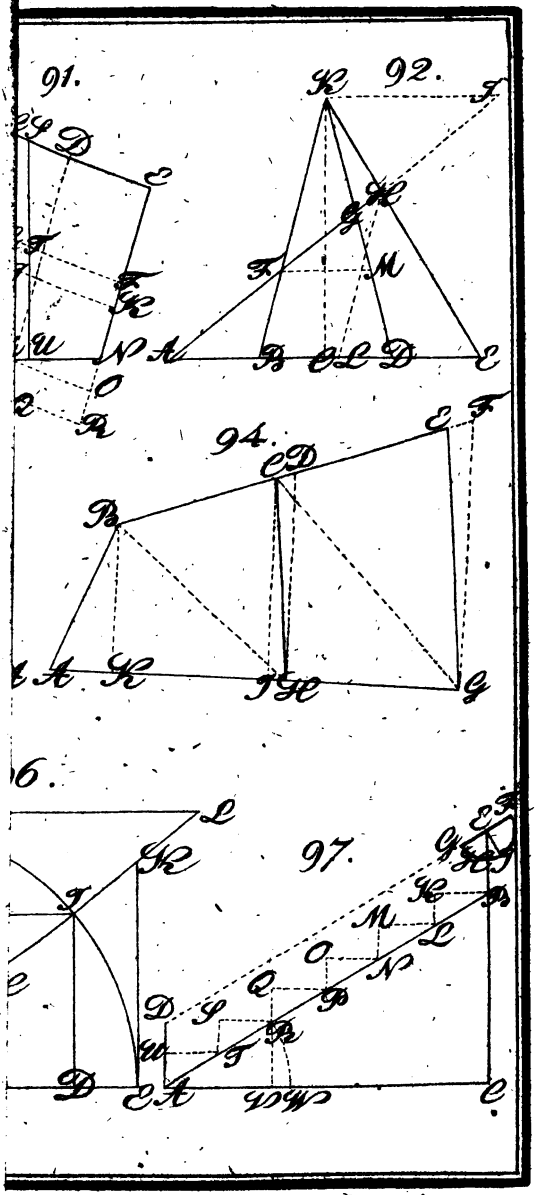
83. B

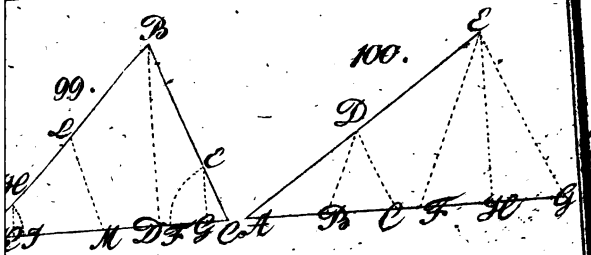


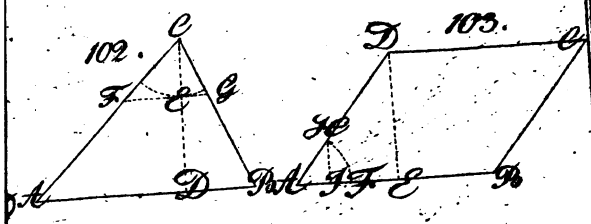
84.

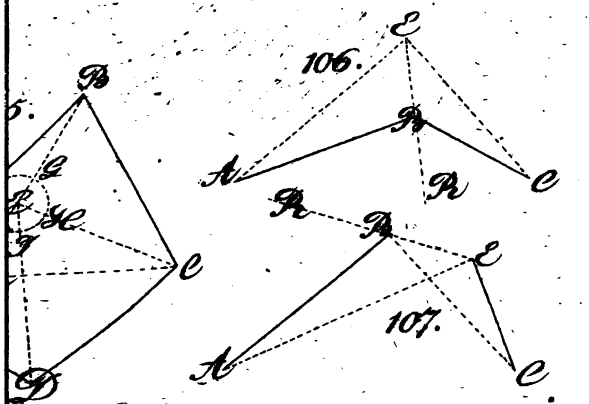


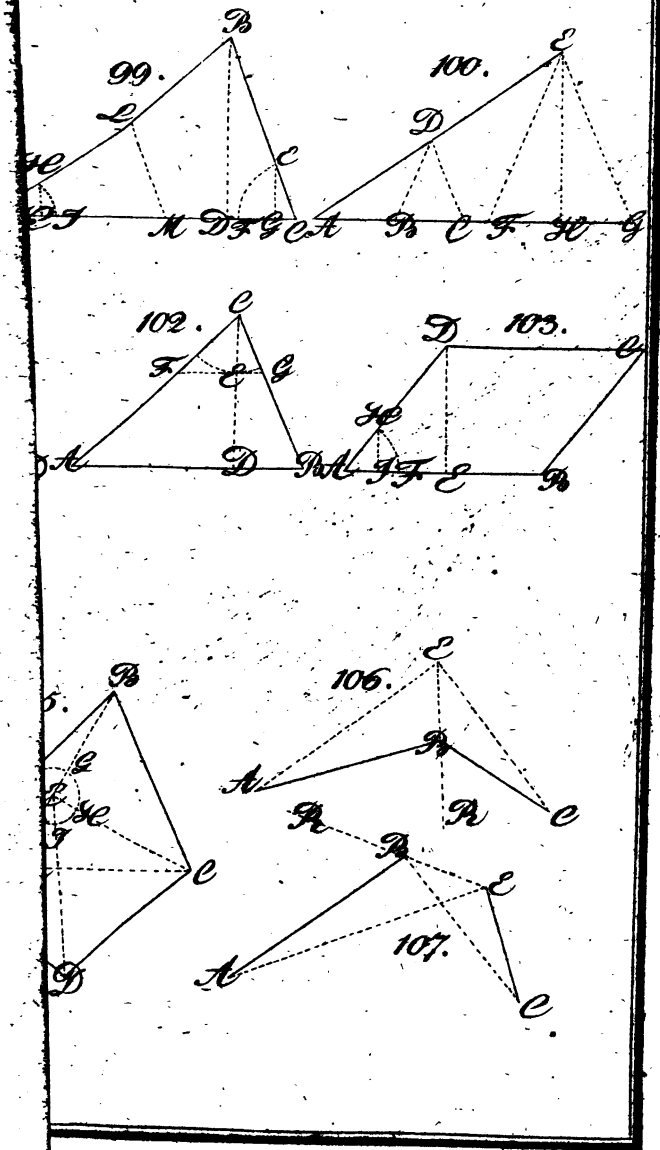

85.
86.
88.

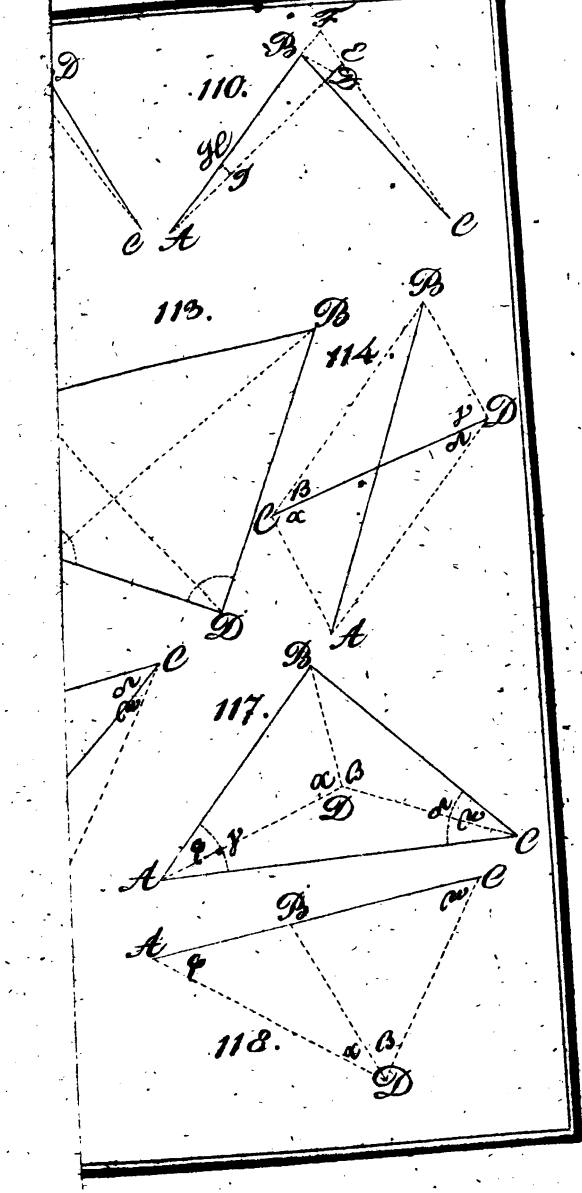

91.
92.
94.
96.
97.

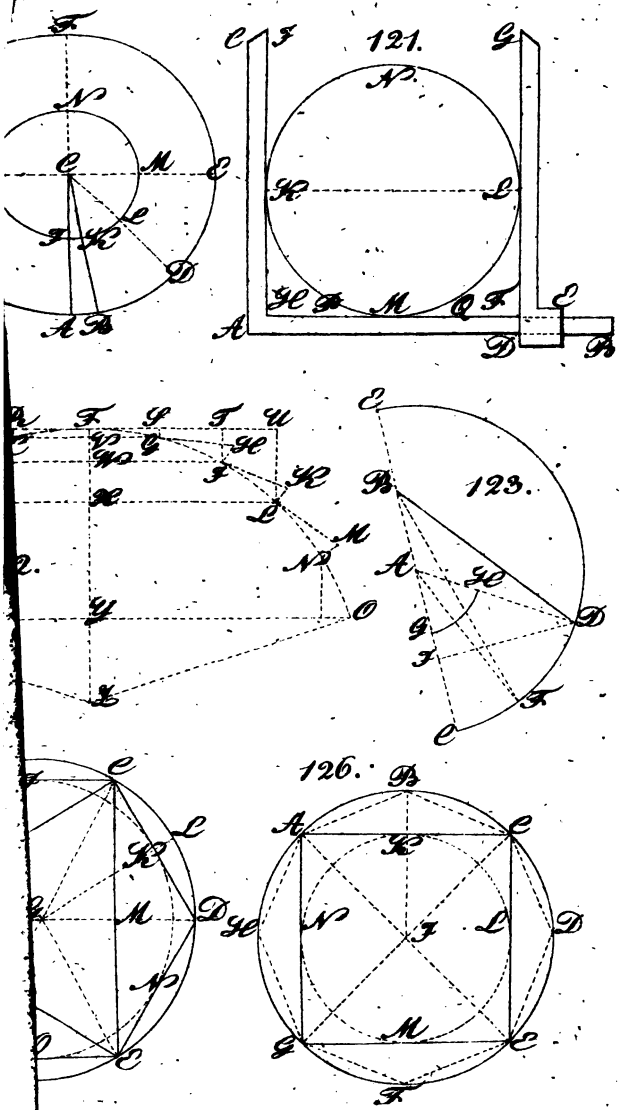

99.
100.

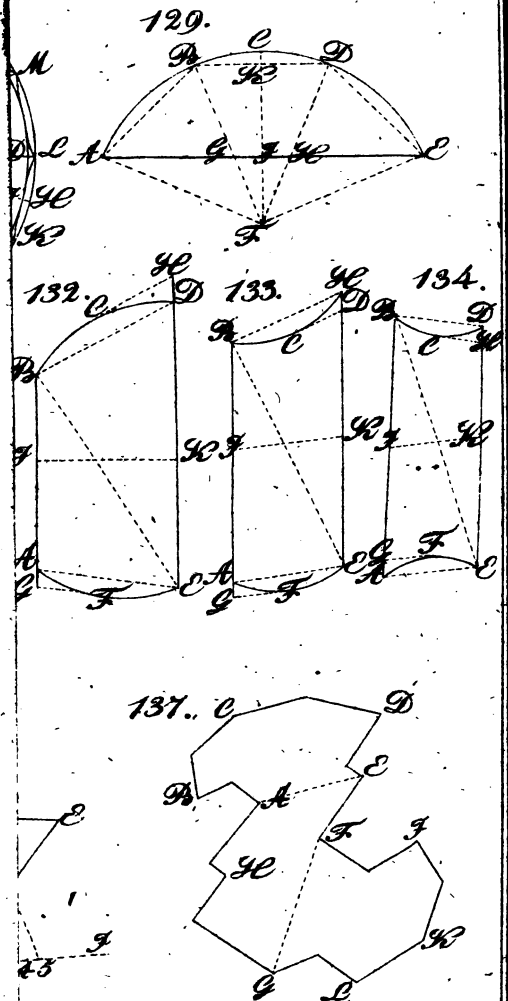

102.
103.

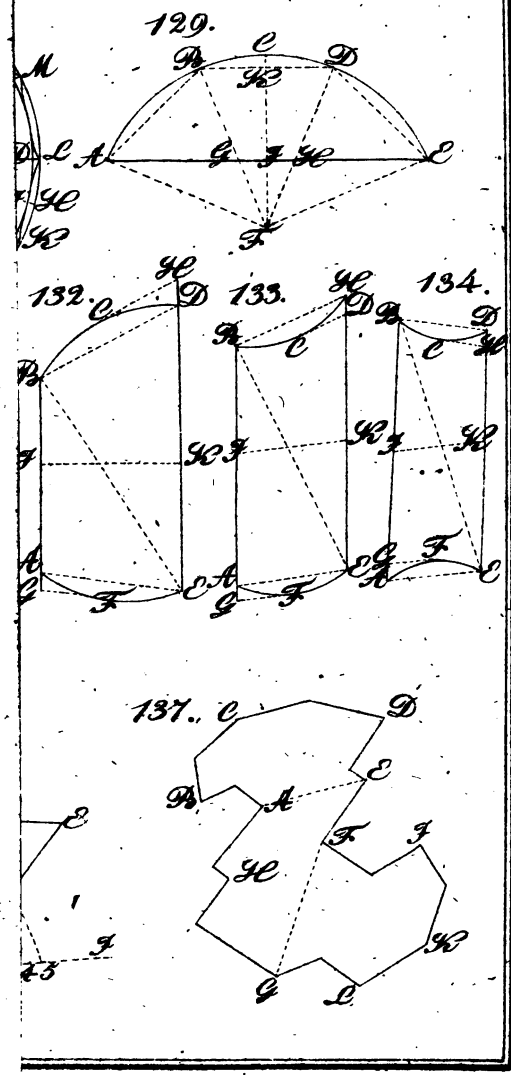

106.
107.

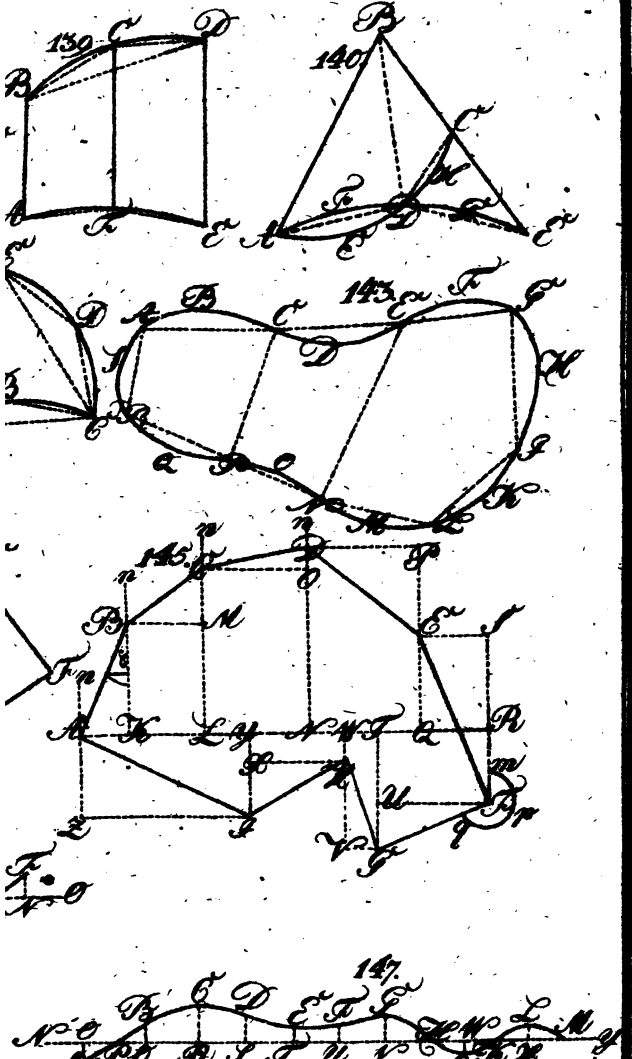

99.
100.
102.
103.
106.
107.

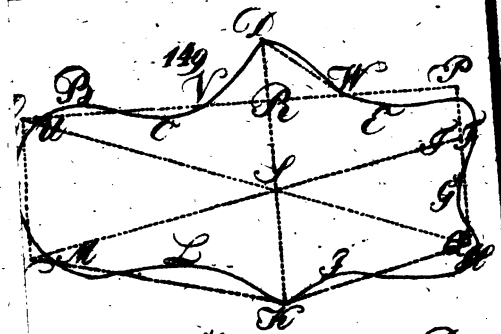

110.
113.
114.
117.
118.

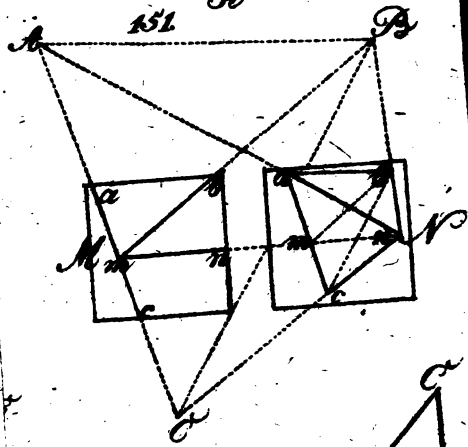

121.
123.
126.

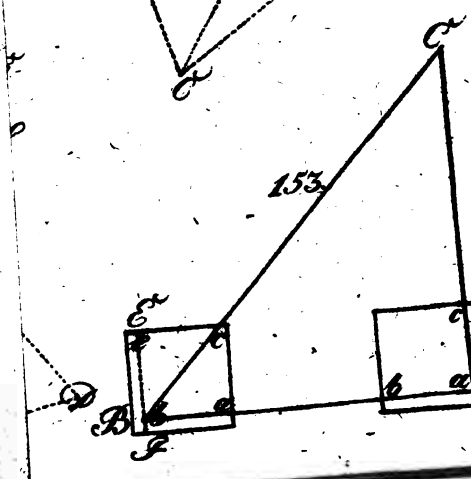

129.
132.
133.
134.
137.

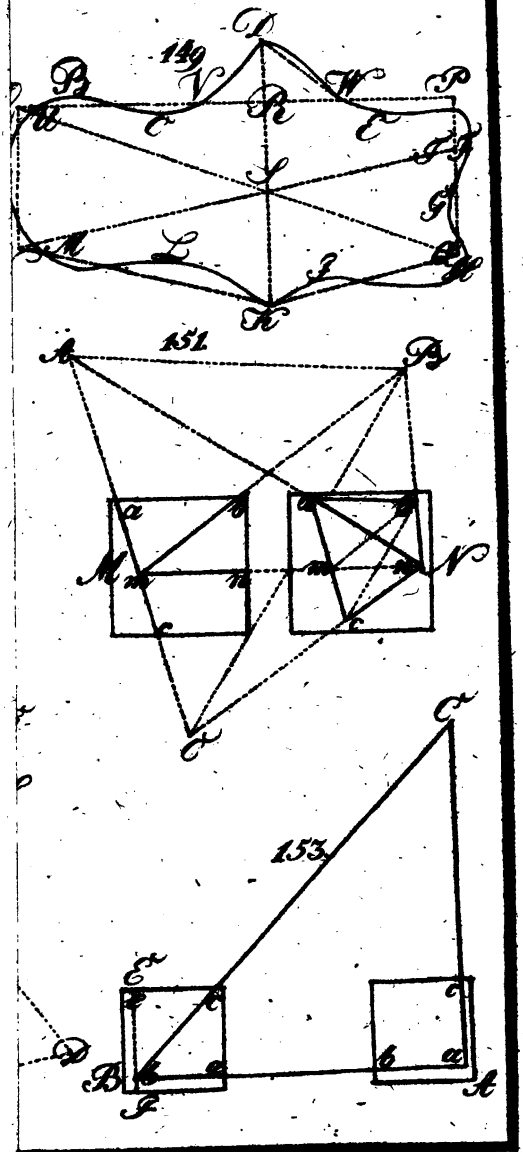

129.
132.
133.
134.
137.

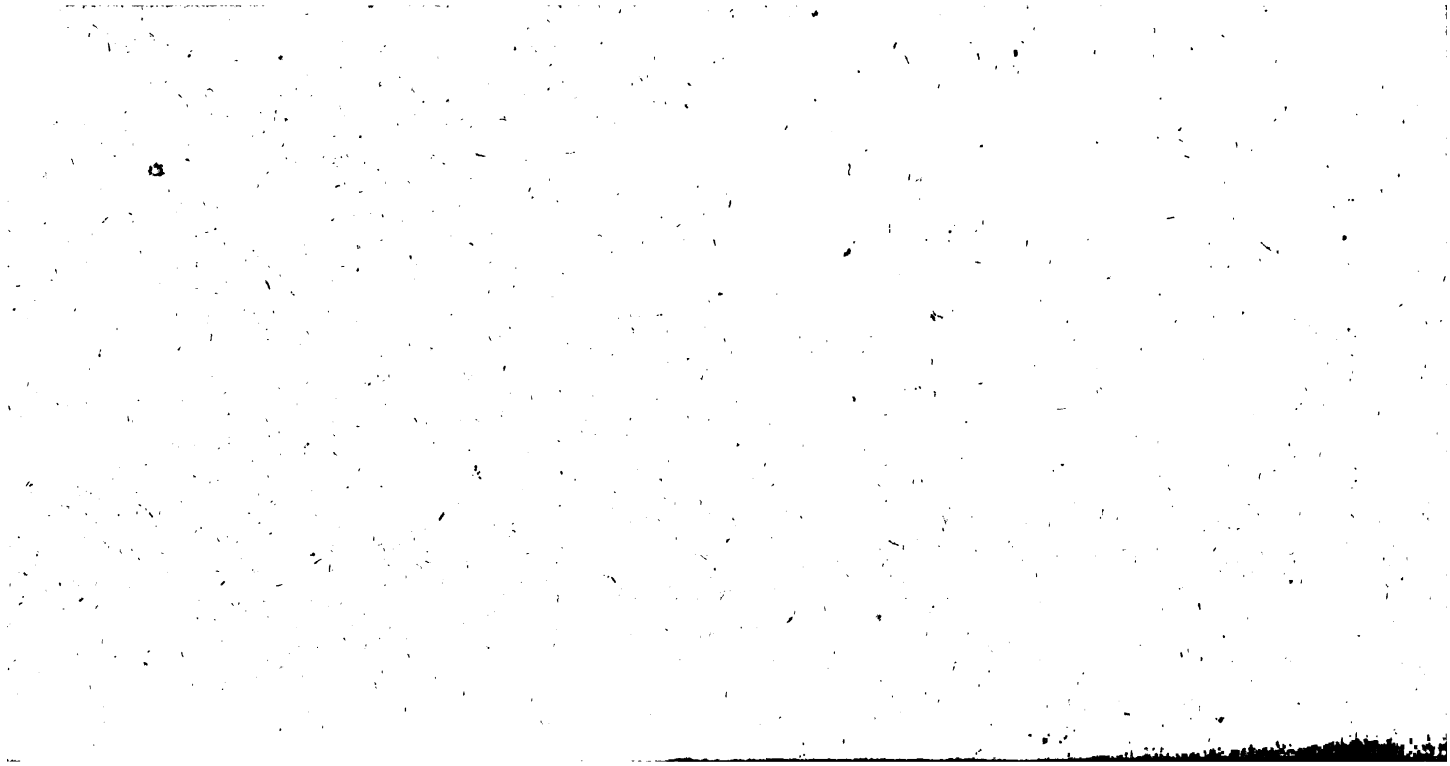

139.
140.
143.
145.
147.

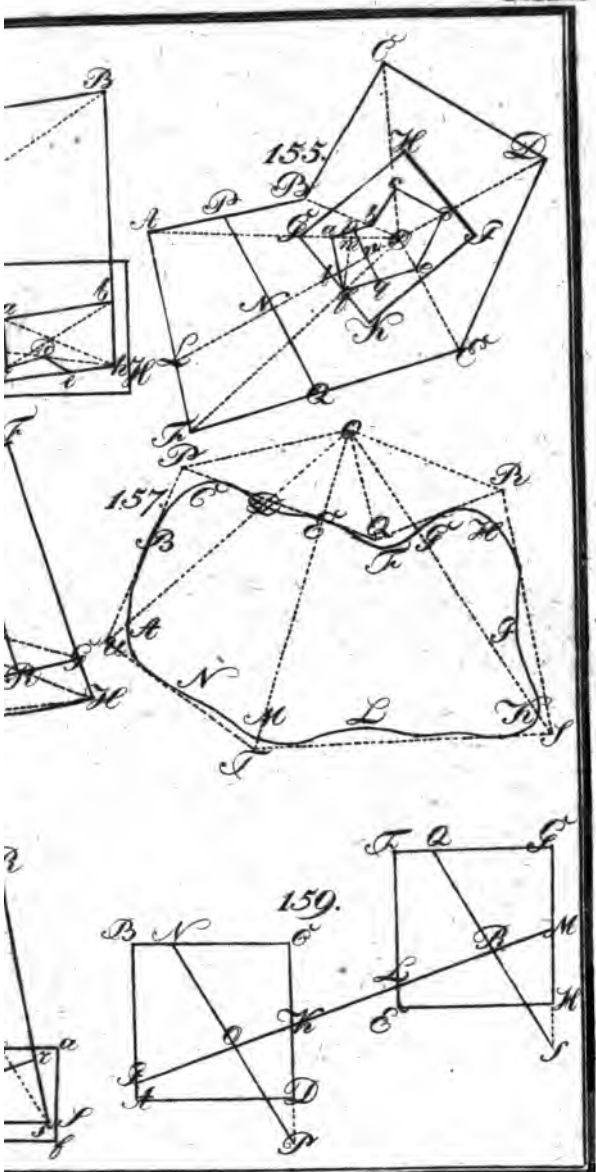

149

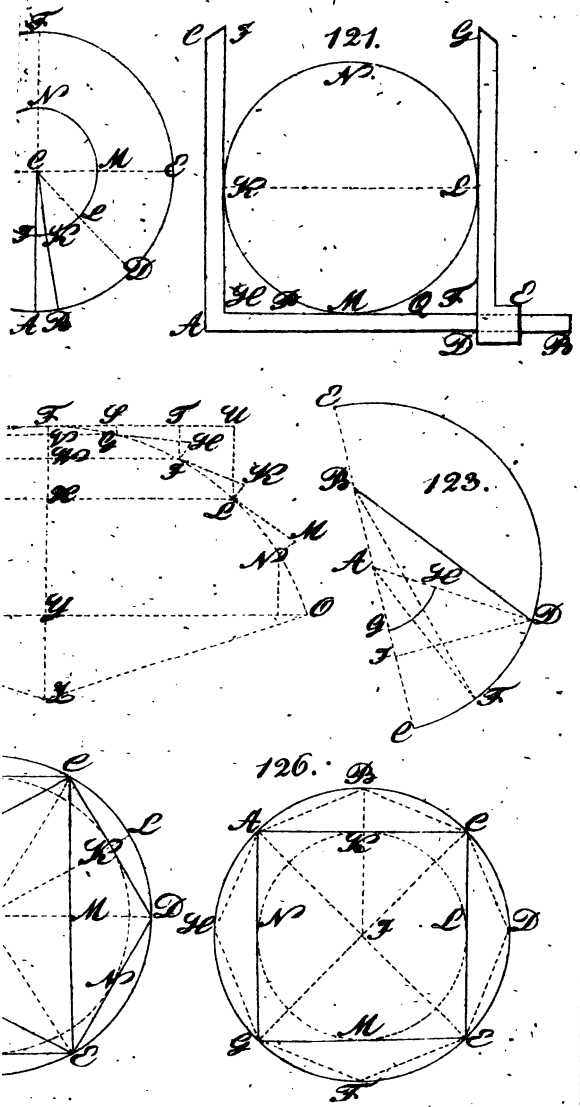

151

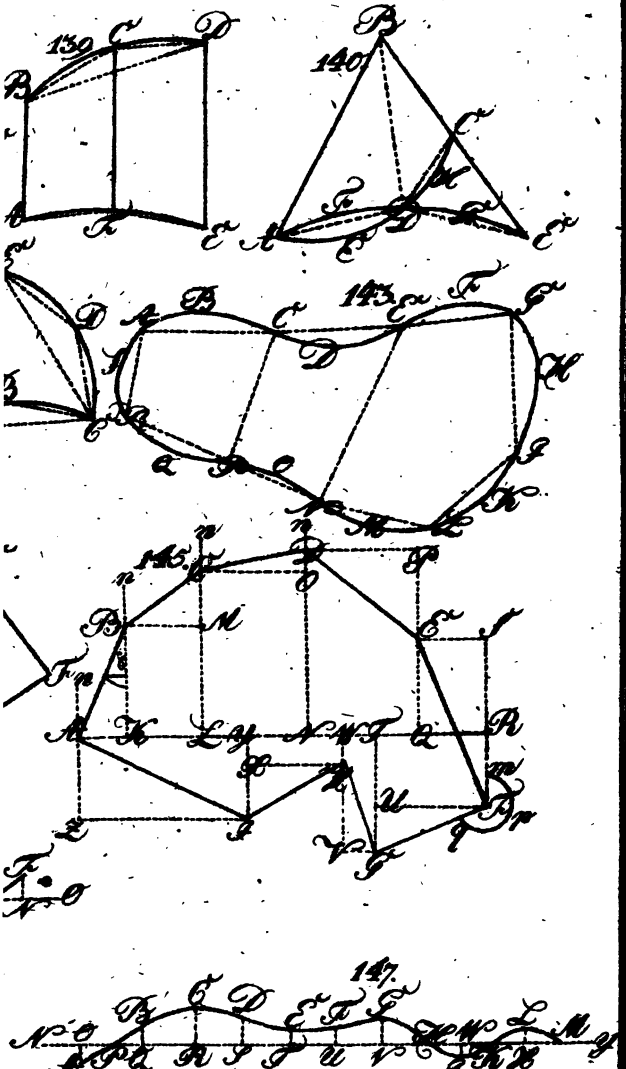

153

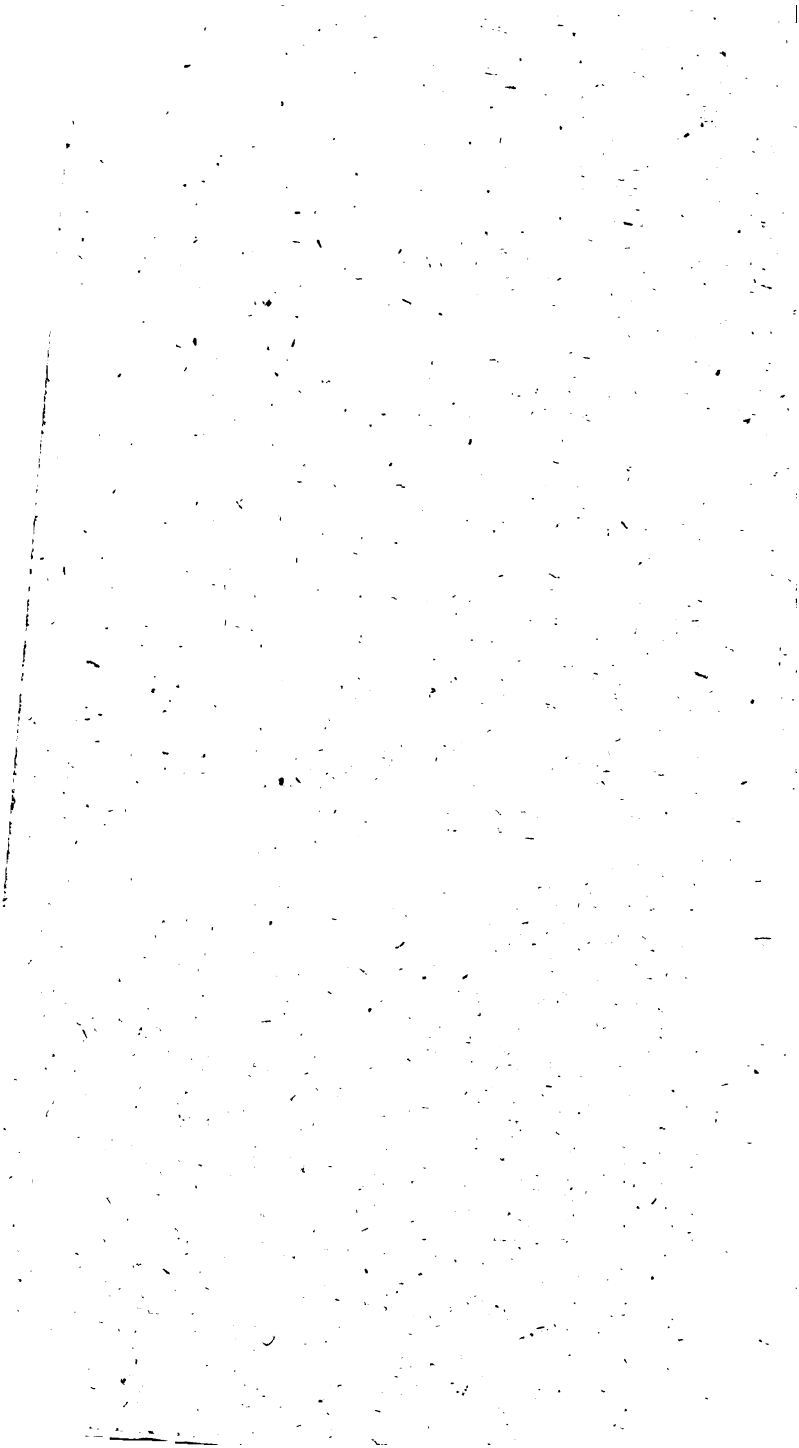

149
151
153

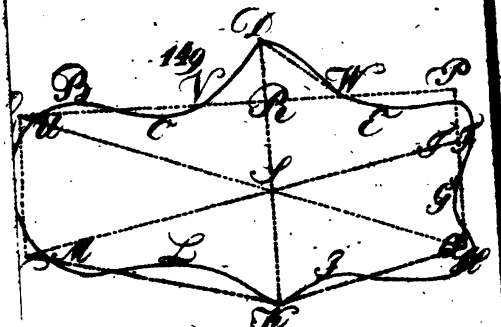



155.
157.
159.

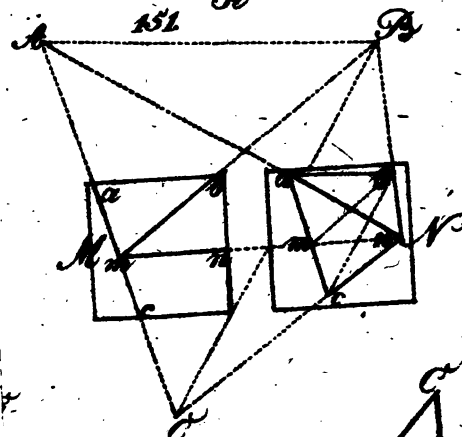

121.
123.
126.


139
140
143
145
147

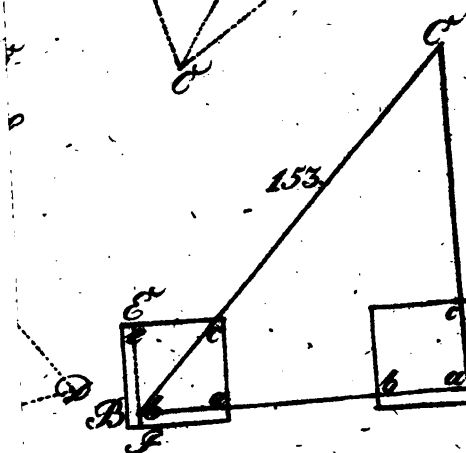


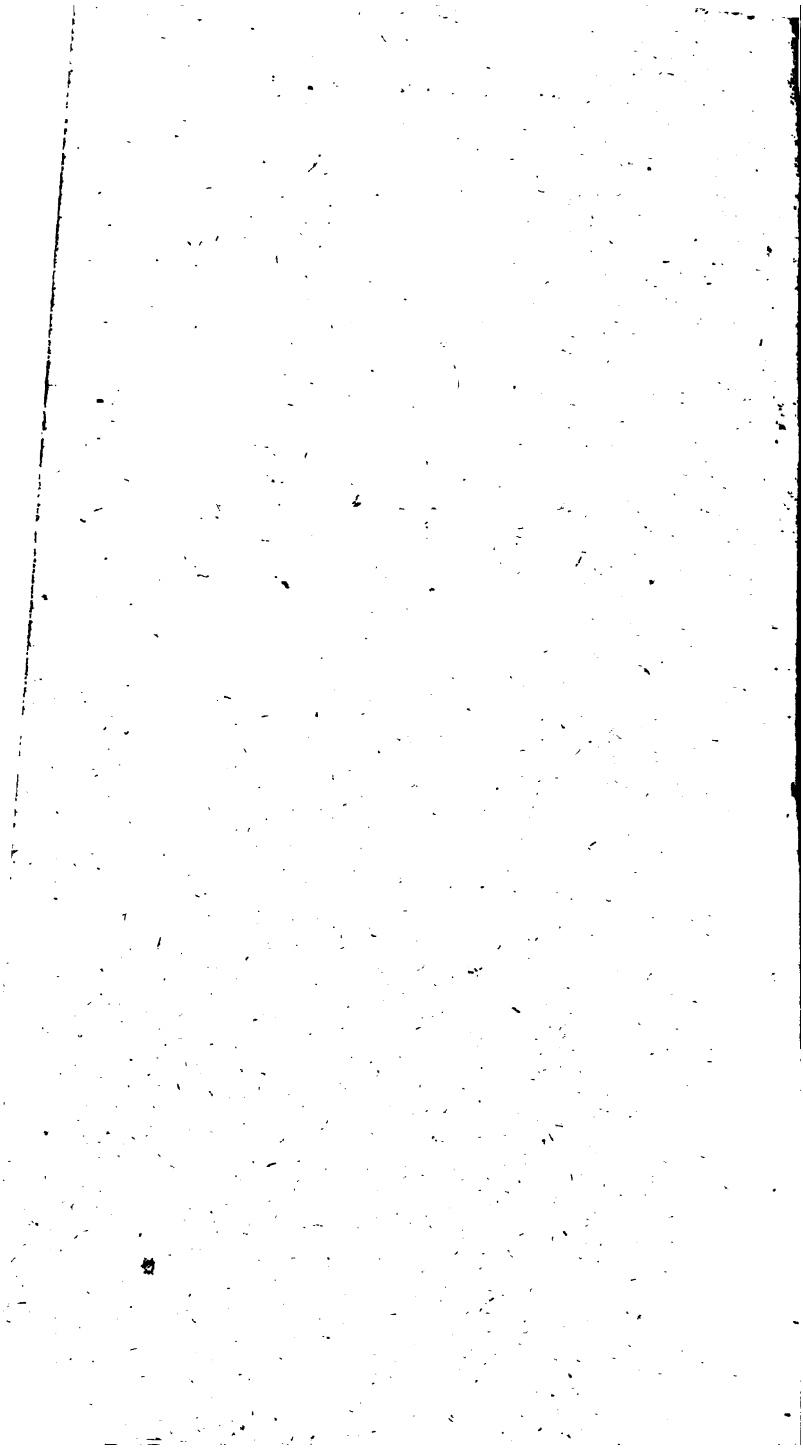


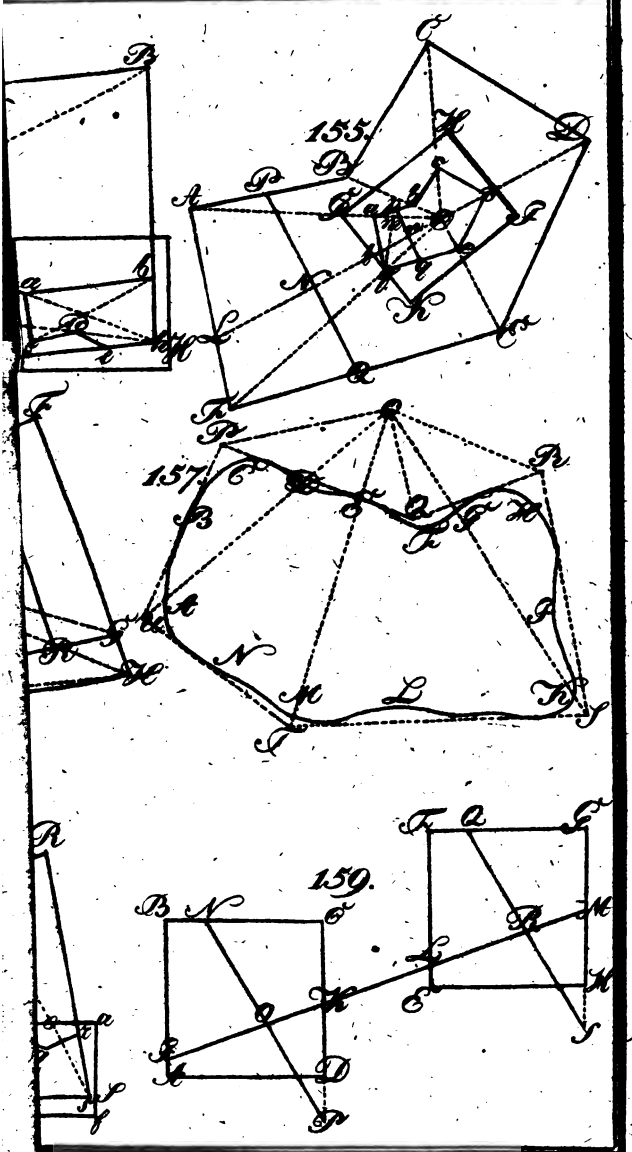
152

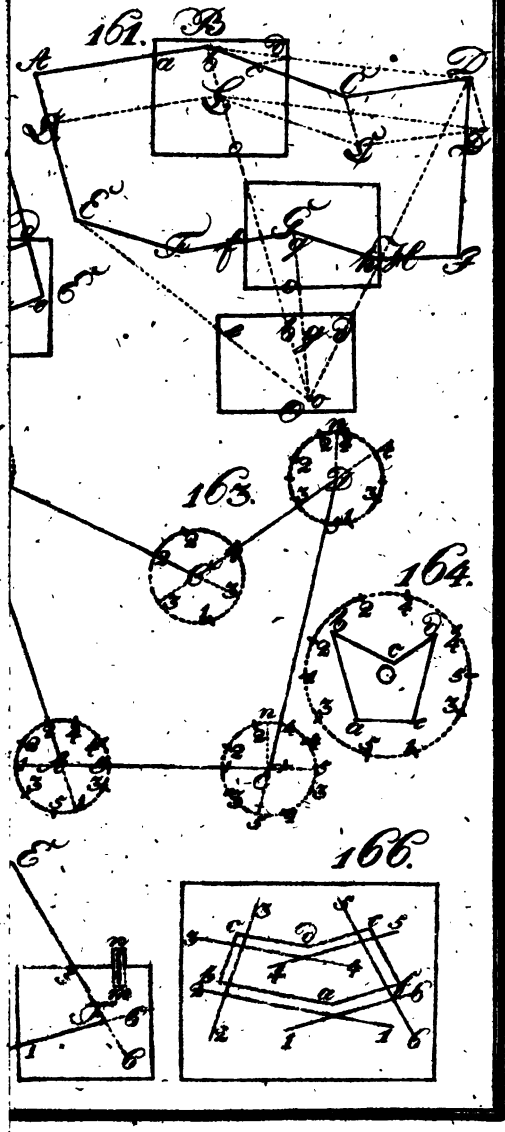


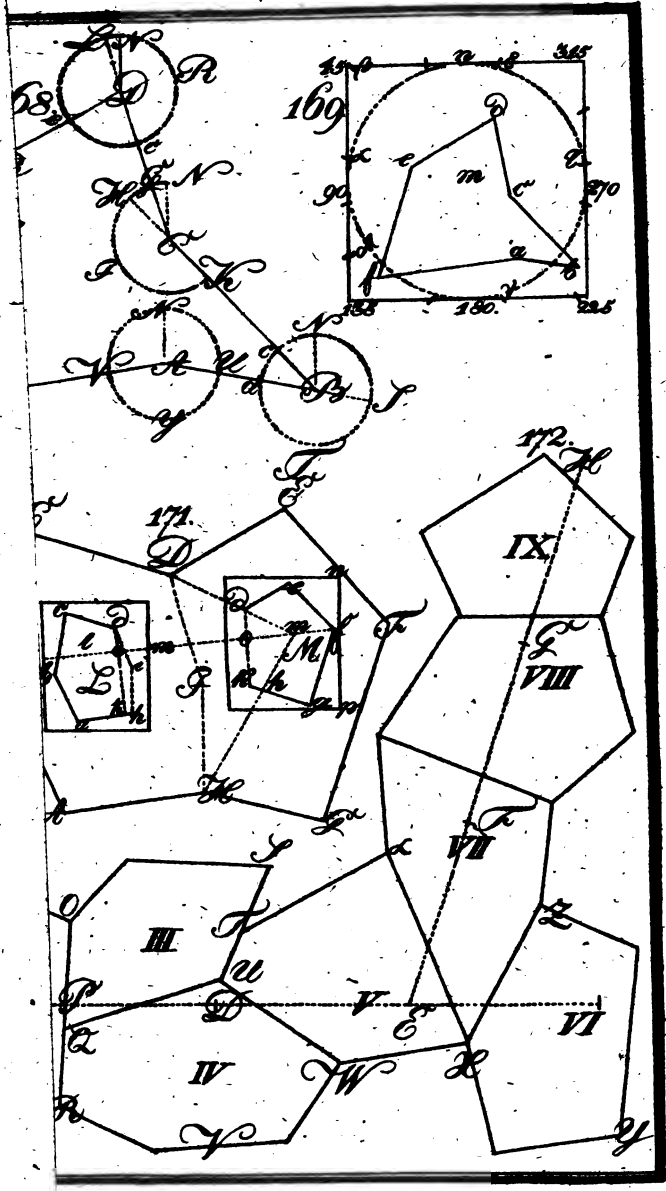
153



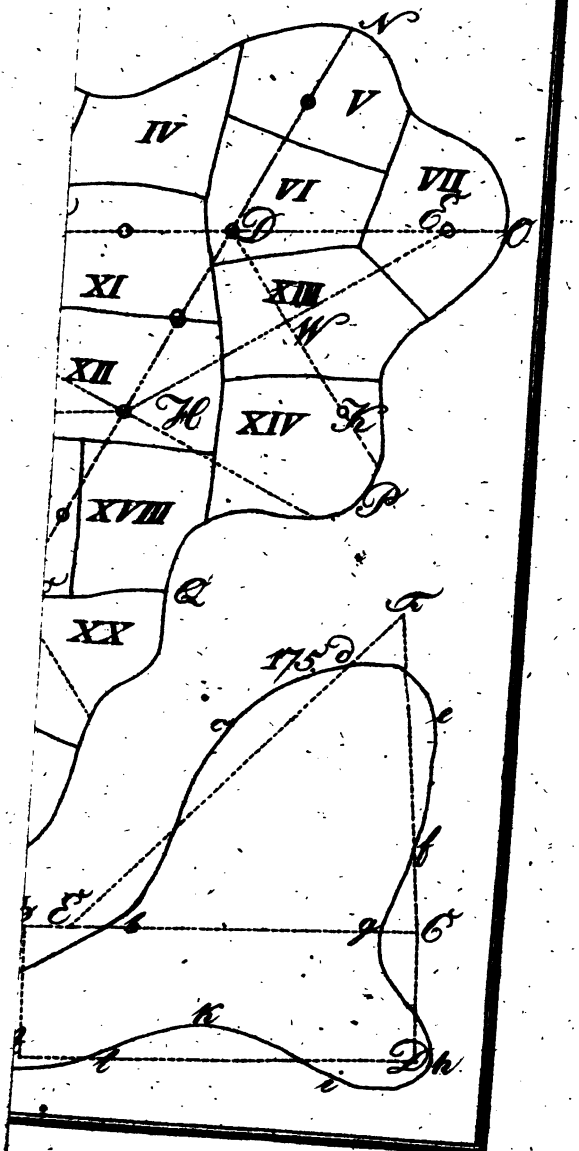


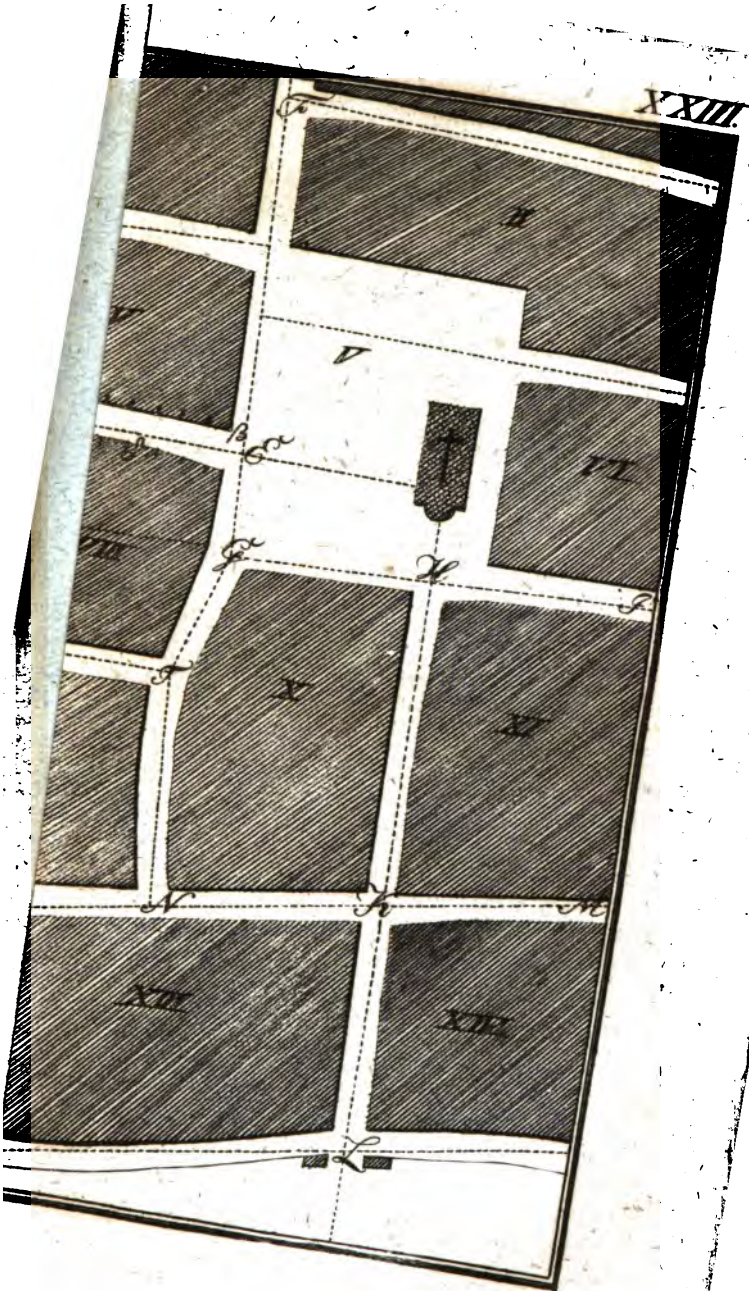

155.
157.
159.

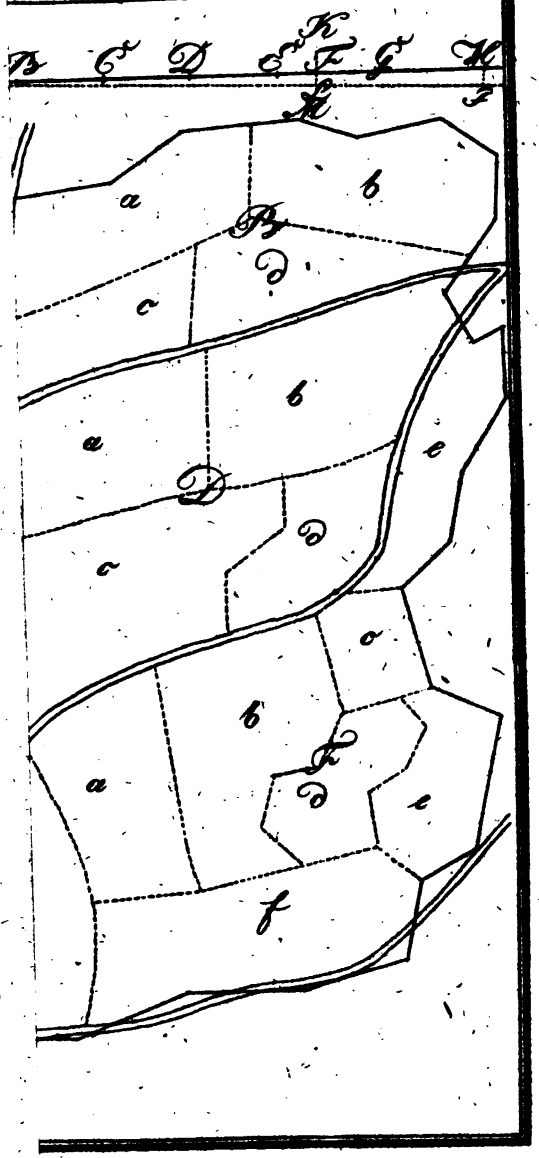

161.
163.
164.
166.

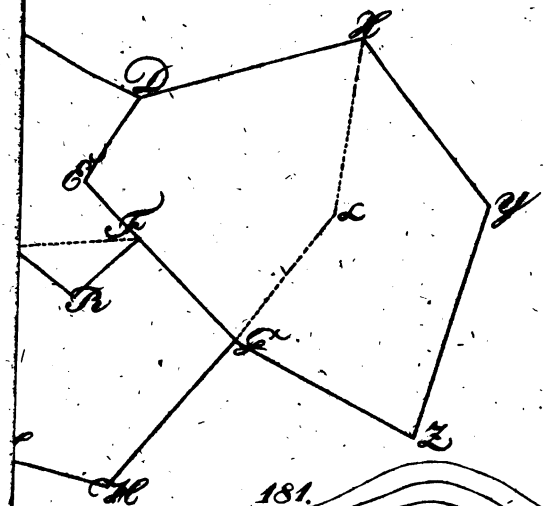

168.
169.
171.
172.
IX.
VIII
VII
III.
V.
VI
IV

XXII

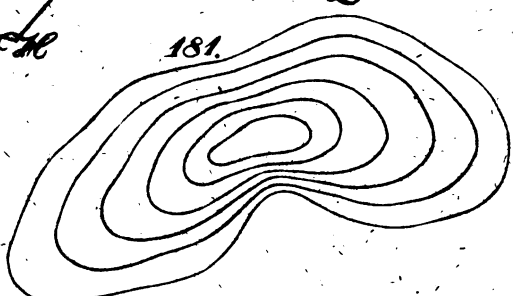

N
V
IV
VI
VII
D
E
O
XI
XIII
W
XII
H
XIV
K
P
XVIII
Q
XX
F
175
d
c
e
f
E
b
g
G
K
l
i
D
h


XXIII.
V
VI
VII
X
XI
XII
XIII
L

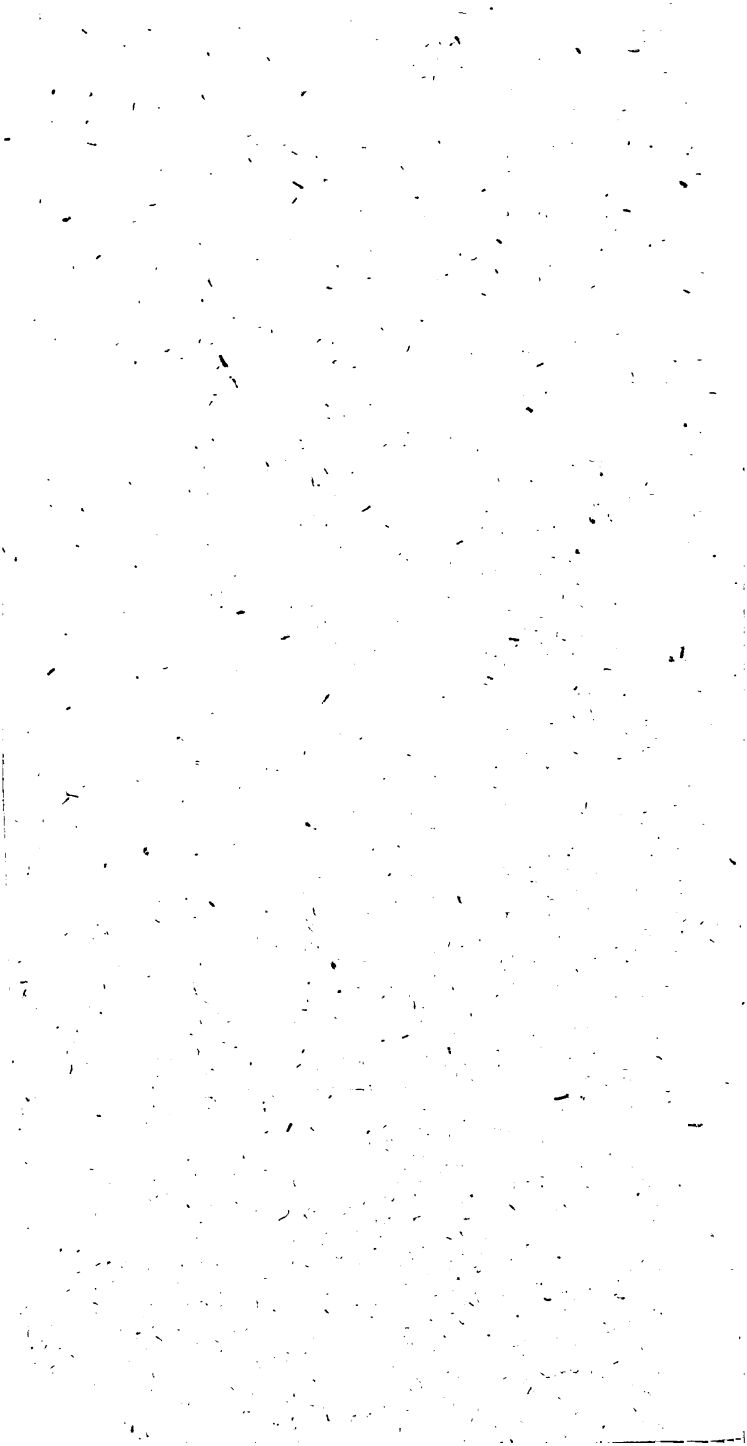

B
C
D
E
F
G
H
I
K
a
b
c
d
e
f



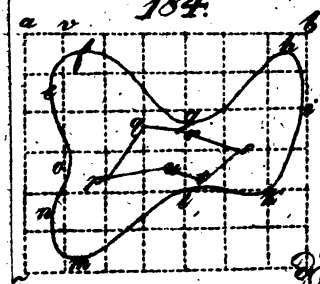
181.



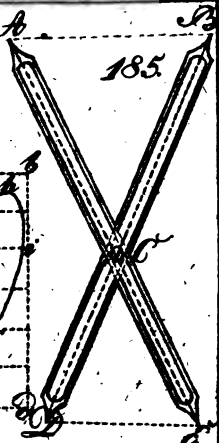
182.

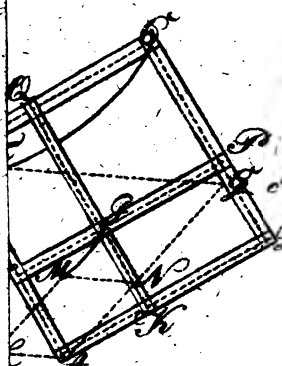


184.

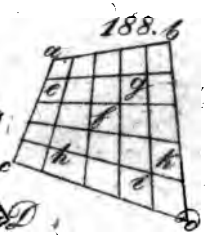


185.

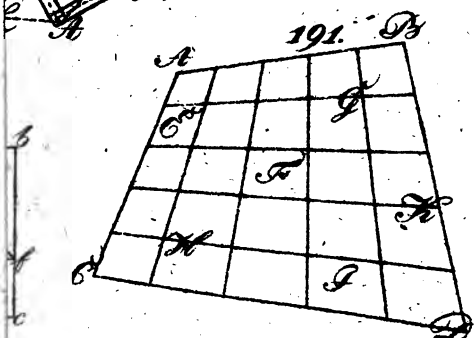


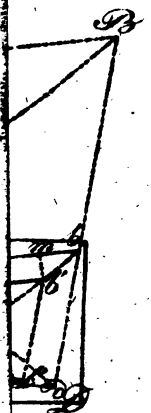


188.

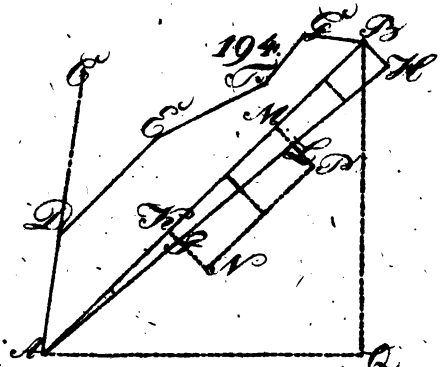


191.

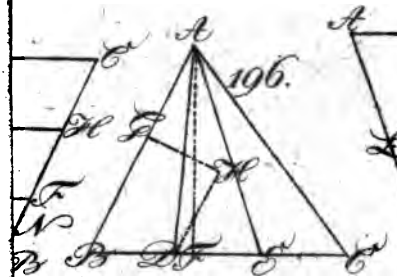




194.

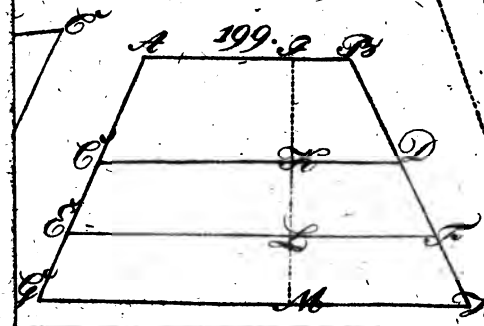


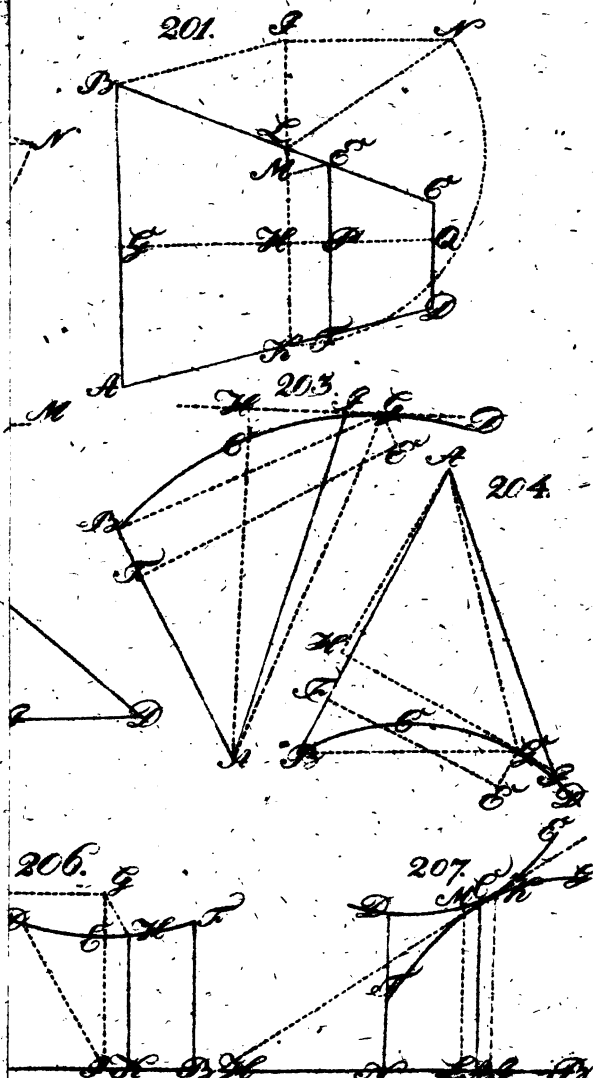
196.

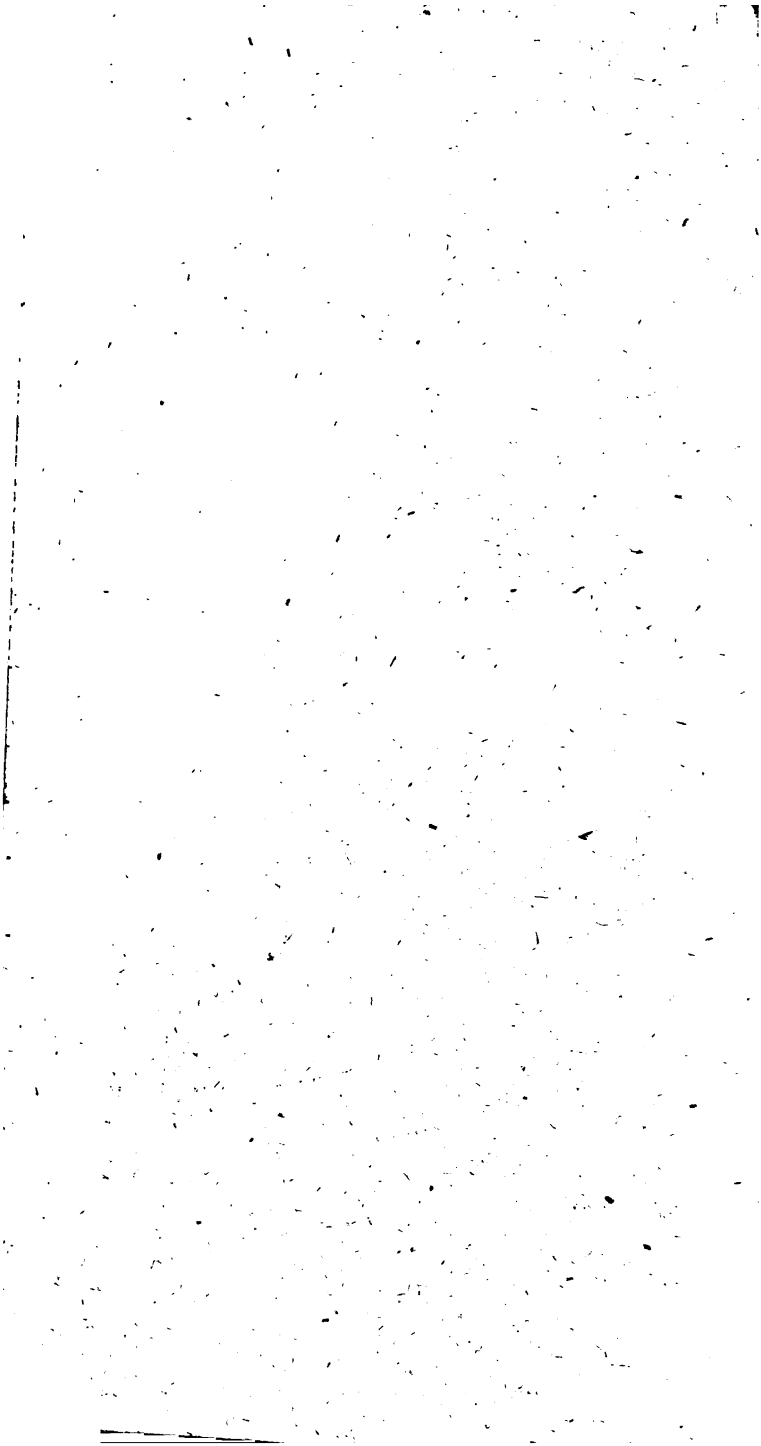


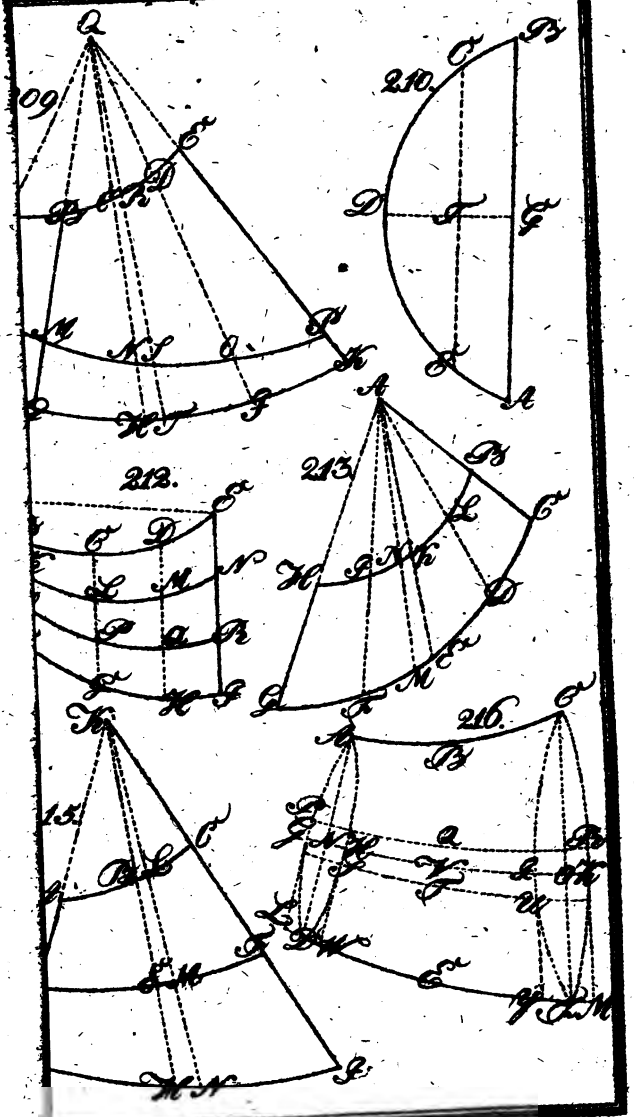
197.

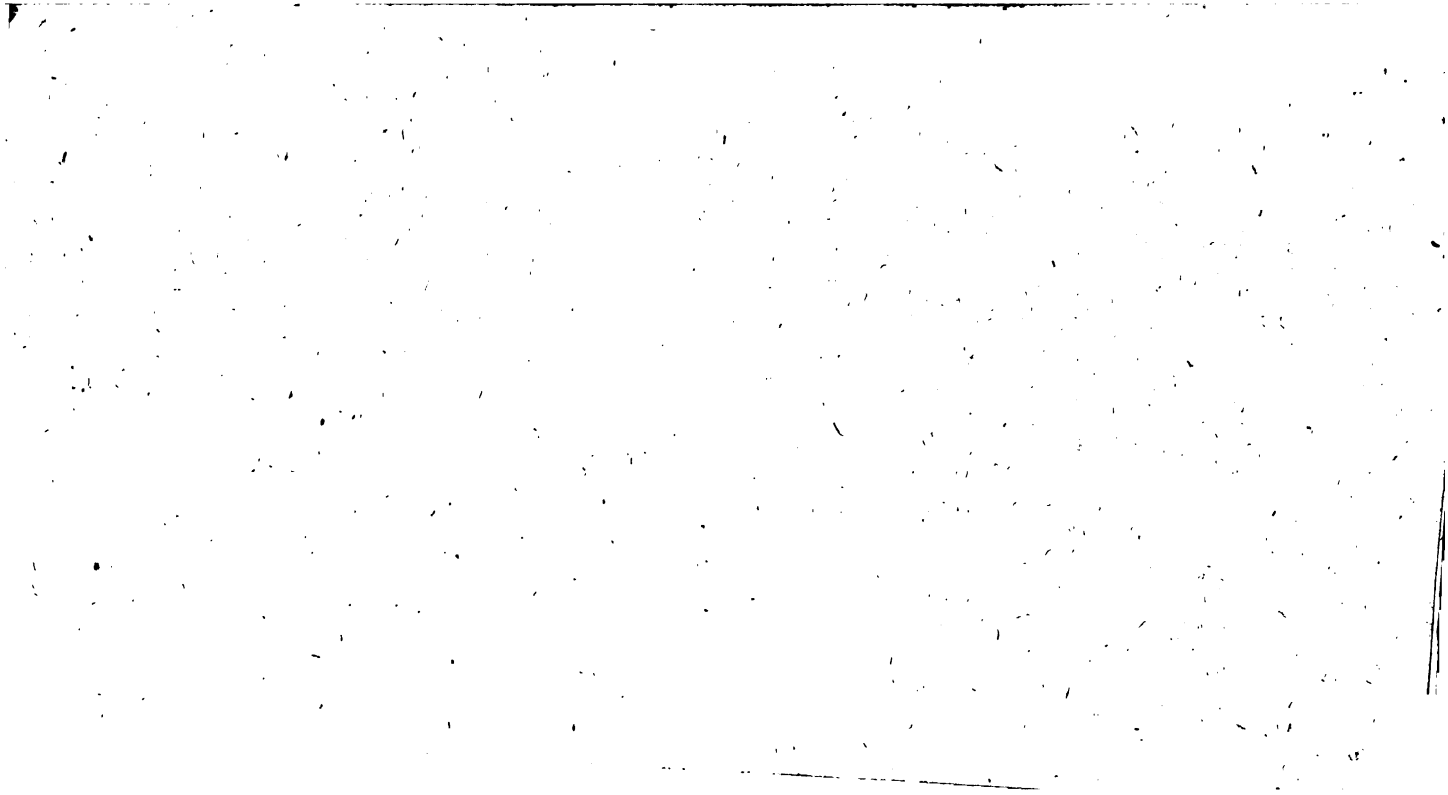
199.

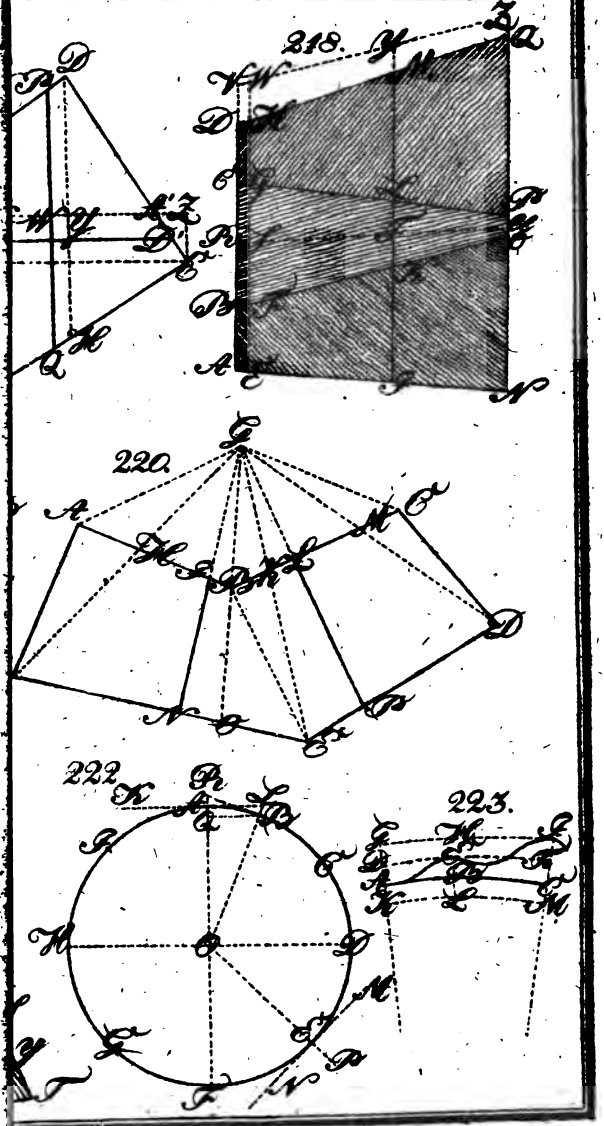


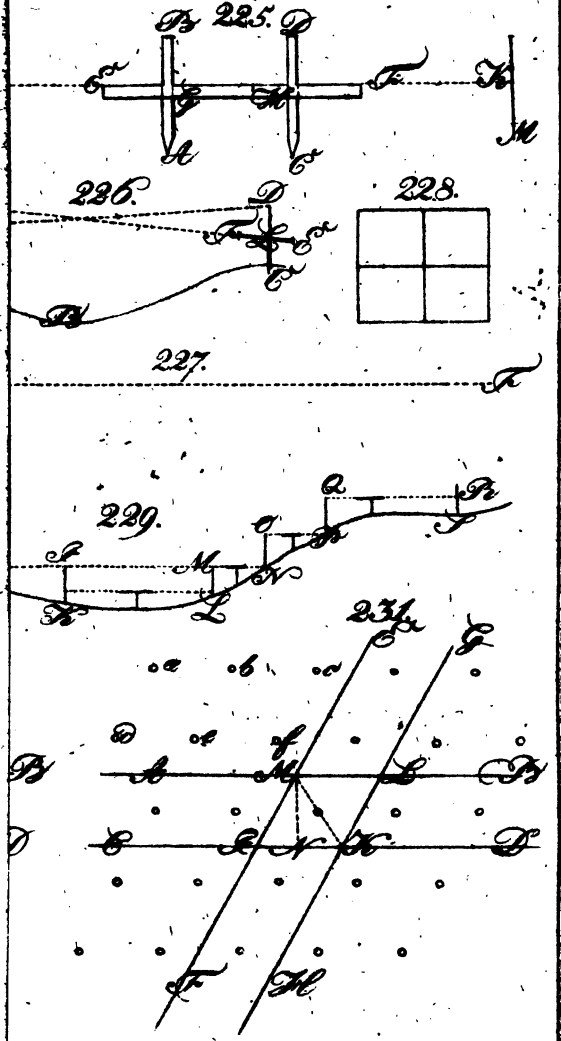

201.
203.
204.
206.
207.




209.
210.
212.
213.
215.
216.




218.
220.
222.
223.


225.
226.
228.
227.
229.
231.

3 2044 102 889 227